John Quincy Adams.

Accessions
26566

Shelf No.
~~5930a 3~~
Adams 736
.R33A
v.2

FOUNDED 1852
SIGILLVM PATRIBVS SIT DEVS NOBIS
BOSTONIA
CONDITA A.D.
1630.
QVI CVNCTOS REGIMINE DONAVIT A.D. 1852
BOSTON PUBLIC LIBRARY

GIVEN BY

Hon Chas F. Adams
July 2. 1891.

Boston Public Library

Digitized by the Internet Archive
in 2012

http://www.archive.org/details/analysedemontreo02reyn

USAGE
DE L'ANALYSE,
OU
LA MANIERE DE L'APPLIQUER

à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie ſimple & compoſée, à reſoudre les Problêmes de ces ſciences & les Problêmes des ſciences Phyſico-mathematiques, en employant le calcul ordinaire de l'Algebre, le calcul differentiel & le calcul integral. Ces derniers calculs y ſont auſſi expliqués & démontrés.

DEDIÉ À MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

Par le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

SECONDE EDITION,

Augmentée des Remarques de M. de Varignon.

TOME II.

A PARIS,

Chez QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Univerſité, rue Galande près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

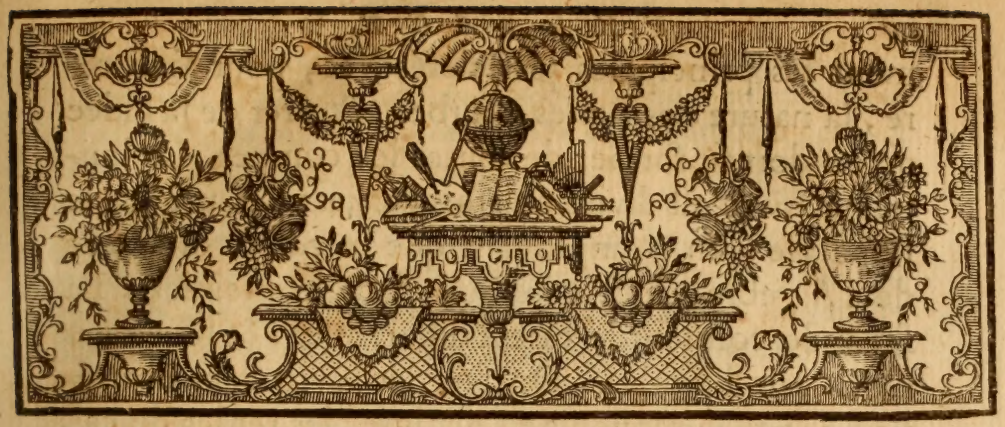
BOSTON PUBLIC LIBRARY

BOSTON ATHENÆUM LIBRARY

Adams
736
.R334
v.2

(.26.566)

Hon. Chas. F. Adams,
July 2, 1891.



PRÉFACE,

QUI EST UN EXTRAIT DU VIIIe LIVRE ou ſecond Volume, ſur l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie, & dans les Sciences Phyſico-Mathematiques.

CE huitiéme Livre contient les uſages de l'Analyſe que l'on a expliquée & démontrée dans les ſept premiers Livres. Les Lecteurs qui commencent, y verront les utilités de l'Analyſe, & la maniere d'en appliquer les methodes à découvrir les proprietés des figures de la Geometrie ſimple & compoſée, & à réſoudre les Problêmes de ces Sciences, & les Problêmes des Sciences Phyſico-Mathematiques. Ils y apprendront auſſi les nouveaux calcus *differentiel* & *integral*, qui ſervent principalement à la connoiſſance des lignes courbes. Pour les faire concevoir clairement, il falloit auparavant faire connoître la maniere dont l'Analyſe réduit les lignes droites & courbes à des équations ; que ces équations expri-

ment les principales proprietés, &, pour ainſi dire, la nature des lignes courbes ; & tirer de là l'idée qu'on doit ſe former de toutes les courbes. Ce huitiéme Livre eſt diviſé en trois Parties : Les uſages de l'Analyſe, en n'employant que le calcul ordinaire de l'Algebre, ſont expliqués dans la premiere. La ſeconde contient le calcul differentiel, & les uſages qu'en fait l'Analyſe. On fait découvrir dans la troiſiéme, par le moyen de l'Analyſe, les regles du calcul integral, & l'on fait voir enſuite les uſages qu'elle fait de ces regles.

PREMIERE PARTIE.

Sur l'uſage de l'Analyſe, en n'employant que le calcul ordinaire de l'Algebre.

ON fait voir dans la premiere Section, que l'Analyſe repreſente les lignes & les figures de la Geometrie par les lettres de l'Alphabet, & tous les rapports ſimples & compoſés que peuvent avoir ces lignes & ces figures par le calcul de ces lettres ; & que par conſequent les lignes & les figures ſont les valeurs geometriques des expreſſions litterales, & les rapports de ces lignes & de ces figures ſont comme les objets repreſentés par les calculs de l'Analyſe. Cela doit faire appercevoir aux Commençans l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie, & leur faire concevoir tout l'artifice des Methodes qu'elle donne pour en réſoudre les Problêmes, qui conſiſte en ceci.

Elle repreſente par des lettres differentes les grandeurs inconnues que l'on cherche, & les grandeurs connues ou données dans chaque Problême ; elle trouve par le calcul les équations qui expriment les rapports connus entre les grandeurs connues & les inconnues, leſquels rapports ſont les conditions qui déterminent la nature du Problême : Elle découvre les grandeurs inconnues, en les ſeparant des grandeurs connues, & faiſant en ſorte, par des calculs re-

glés, que les lettres des inconnues deviennent égales à des lettres des seules grandeurs connues jointes ensemble par l'addition, ou la soustraction, ou la multiplication, &c. & c'est là la résolution analytique du Problême. Pour avoir la résolution geometrique qu'elle represente, l'Analyse employe la Geometrie, & elle fait tracer les lignes & les figures qui ayent entr'elles les rapports & les proportions exprimées par la résolution analytique ; ce qui donne les lignes & les figures qui sont la résolution geometrique du Problême.

L'art qu'on vient d'expliquer est mis en pratique dans tout ce huitiéme Livre. Pour commencer par les choses les plus faciles, on l'employe dans la premiere Section à découvrir les proprietés des triangles rectangles considerés seuls, & ensuite dans le cercle ; & à trouver par ces proprietés la résolution geometrique des équations du second degré, c'est-à-dire, les lignes qui sont les valeurs de l'inconnue de ces équations.

Pour faire voir l'utilité de l'Analyse dans les Sciences Physico-Mathematiques, on l'employe dans la seconde Section à découvrir la résolution des Problêmes de l'art de jetter des bombes, & de ceux qui sont sur les centres de pesanteur & d'oscillation ; ces derniers servent à donner la justesse aux horloges.

Les Commençans pourront déja voir dans ces deux premieres Sections le parfait accord de l'Analyse avec la Geometrie & avec la nature même. Car lorsque l'Analyse exprime le Problême qu'on veut résoudre par une équation du second degré, & qu'elle donne deux valeurs positives de l'inconnue que l'on cherche dans le Problême, la résolution geometrique fournit aussi deux lignes differentes representées par ces valeurs : dans les Problêmes de l'art de jetter les bombes, il y a deux inclinaisons du mortier representées par les deux valeurs analytiques, qui sont propres à lui faire jetter la bombe par une même force de poudre à l'endroit où on la veut faire tomber ; & dans les Problêmes sur le centre d'oscillation d'un pendule composé, il y a deux endroits dans le pendule, qui répondent aux deux valeurs analytiques, propres à placer la lentille, pour faire que les vibrations du pendule marquent les secondes. Quand les

deux valeurs analytiques ſe trouvent égales, les lignes geometriques qu'elles repreſentent le ſont auſſi ; les deux inclinaiſons du mortier ſe reduiſent à celle de 45 degrés, qui donne la plus grande étendue de tous les jets de bombe par une même force de poudre ; & les deux endroits du pendule où il faut mettre la lentille ſe réuniſſent au point, où arrêtant la lentille, on rend les vibrations du pendule les plus promptes qu'il eſt poſſible. Quand l'Analyſe découvre que les deux valeurs ſont impoſſibles, on trouve une contradiction dans la réſolution geometrique ; l'endroit où l'on veut faire tomber la bombe, ſe trouve hors de la portée de la poudre ; & l'on trouve auſſi qu'il y a une contradiction dans les ſuppoſitions que l'on a faites ſur le pendule compoſé, &c. Tout le reſte du huitiéme Livre eſt employé à faire voir les uſages de l'Analyſe dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes, & dans la réſolution des Problêmes Phiſico-Mathematiques qui en dépendent.

On explique dans la troiſiéme Section la maniere de reduire les courbes à des équations qui en expriment les principales proprietés : la voici. On ſuppoſe ſur le plan où eſt chaque courbe une ligne droite dont la poſition eſt donnée ſur le plan, & un point fixe d'où elle part, qu'on nomme ſon *origine*, qui eſt auſſi donné. Cette droite ſe nomme la ligne des *coupées* : on ſuppoſe une infinité d'autres droites toutes paralleles entr'elles qui partent de tous les points de la courbe, & vont toutes couper la ligne des coupées, on les appelle les *ordonnées* ; la partie de la ligne des coupées depuis l'origine juſqu'à l'ordonnée qui la termine, eſt la coupée de cette ordonnée ; &, pour abreger on nomme chaque coupée & ſon ordonnée correſpondante, les *coordonnées*. Or dans toutes les courbes regulieres il y a un rapport commun qui regne entre les coordonnées, qu'on peut regarder comme le rapport commun à tous les points de la courbe d'où partent les ordonnées. Ainſi en nommant chaque coupée par une même lettre, qu'on appelle changeante, parcequ'elle repreſente ſucceſſivement toutes les coupées ; repreſentant de même chaque ordonnée par une autre lettre qu'on nomme changeante par la même raiſon ; marquant auſſi par des lettres differentes les lignes connues qui ſervent à dé-

terminer le rapport commun aux coordonnées : l'Analyſe exprime ce rapport commun à tous les points de la courbe par une équation ; les changeantes des coordonnées y tiennent lieu de deux inconnues. On a fait voir dans la premiere Section, que l'on peut de même exprimer par une équation le rapport commun de tous les points d'une ligne droite, en concevant de tous ſes points des droites paralleles tirées à la ligne des coupées ſur le même plan où eſt la ligne droite.

C'eſt de ces équations, qui expriment la nature des courbes, que l'Analyſe deduit leurs proprietés, & la reſolution des Problêmes qui les regardent. C'eſt de ces mêmes équations qu'elle prend la diſtinction des courbes en geometriques & en mechaniques : les équations des premieres ne contiennent que des expreſſions ordinaires de l'Algebre, le nombre des dimenſions des changeantes eſt déterminé, & les coordonnées ſont toujours de ſimples lignes droites : Parmi les courbes mechaniques, les unes ont des courbes pour l'une ou l'autre des coordonnées, ou pour toutes les deux; d'autres ont des lignes droites égales à des arcs de courbe pour l'une ou l'autre des coordonnées, ou pour toutes les deux. Il y en a dont le nombre des dimenſions des coordonnées n'eſt pas déterminé ; la plûpart ne peuvent s'exprimer que par des équations qui contiennent des differentielles. Enfin les équations des courbes geometriques ſervent à les ranger en differens ordres qu'on appelle *genres*, ſelon le nombre des degrés où ſont élevées les puiſſances ſeparées des changeantes, ou ſelon le nombre des dimenſions du produit des changeantes multipliées l'une par l'autre, quand ce produit eſt le ſeul terme qui contient des changeantes, ou quand il a plus de dimenſions que la puiſſance la plus élevée de l'une ou de l'autre des changeantes ſeparées.

Les courbes geometriques les plus ſimples, ou du premier genre, ſont celles qui s'expriment par des équations où la plus haute puiſſance des changeantes ſeparées ne monte qu'au ſecond degré, ou bien dans leſquelles le produit des changeantes multipliées l'une par l'autre, n'eſt que de deux dimenſions ; on les appelle *Sections coniques*, parcequ'elles peuvent ſe former par la ſection commune d'un plan & d'un cône. Les Geometres anciens & nouveaux ſe ſont appliqués à décrire ces courbes, à en découvrir les proprietés, à en

reſoudre les Problêmes, & à les faire ſervir à la reſolution de beaucoup d'autres Problêmes ; cela les a rendues de grand uſage. On enſeigne dans cette troiſiéme Section leur formation, c'eſt-à-dire, la maniere de les décrire ſur un plan, 1°. par le mouvement continu du point d'interſection de deux regles mobiles ; 2°. en trouvant ſucceſſivement les points par où elles doivent paſſer. On tire de leur formation les équations qui en expriment la nature, & l'on déduit de ces équations les principales proprietés de ces courbes. On a eu ſoin de n'oublier aucune de celles qui ſont neceſſaires à l'intelligence de ce huitiéme Livre, afin que les Lecteurs qui ſçavent au moins mediocrement les Elemens d'Euclide, n'euſſent beſoin d'aucun autre Ouvrage pour entendre celui-ci.

Dans les Sections coniques, (& c'eſt à peu près la même choſe dans les courbes geometriques des genres plus élevés,) il y a une ligne déterminée des coupées pour chacun des angles que les ordonnées, paralleles entr'elles, peuvent faire avec leurs coupées : cette ligne déterminée s'appelle le diametre de la courbe. L'équation de la courbe par rapport à ce diametre eſt la plus ſimple de toutes, c'eſt-à-dire, qu'elle a le moins de termes : mais quand on prend ſur le plan de chacune de ces courbes une ligne des coupées differente du diametre, & qui ne lui eſt pas parallele ; l'équation de la courbe, par rapport à cette ligne des coupées, a un plus grand nombre de termes que l'équation la plus ſimple. Dans la reſolution des Problêmes qui ſe reduiſent aux Sections coniques, on trouve rarement l'équation la plus ſimple, laquelle feroit diſtinguer d'abord celle des Sections coniques à laquelle le Problême ſe rapporte : mais il ſe preſente ordinairement une équation qui a plus de termes que celle de la courbe par rapport au diametre ; & cependant les changeantes de l'équation n'ayant que deux dimenſions, la courbe qu'elle exprime eſt l'une des Sections coniques. Il faut donc avoir des marques certaines pour diſtinguer à laquelle des Sections coniques appartient l'équation qu'on a trouvée & des moyens pour trouver le diametre de cette Section conique, & les autres lignes neceſſaires pour la décrire par la même methode dont on s'eſt ſervi pour décrire une telle Section conique. On a mis pour cela un Problême dans la troiſiéme

troiſiéme Section, qui en eſt le ſeptiéme, où l'on enſeigne à trouver, par le moyen de l'équation ſimple de chacune des Sections coniques, l'équation la plus compoſée de chacune des mêmes Sections, laquelle exprime le rapport commun à tous les points de la courbe par rapport à une ligne des coupées ſur le même plan de la courbe qui eſt differente du diametre, & ne lui eſt pas parallele, & dont l'origine eſt differente de l'origine du diametre. L'on tire de ces équations compoſées de chacune des Sections coniques, les marques certaines pour diſtinguer, dans la reſolution des Problêmes qui s'y reduiſent, la Section conique en particulier à qui convient l'équation que l'on peut trouver. L'on fait voir auſſi la maniere de ſe ſervir des équations compoſées de chacune des ſections coniques, que donne ce ſeptiéme Problême, pour trouver, dans les équations compoſées qui ſe preſentent dans la reſolution des Problêmes, & qui ſe rapportent à une Section conique, le diametre & les autres lignes neceſſaires pour la décrire. Cela ſe fait par la methode des indéterminées, en regardant les connues de chaque équation du ſeptiéme Problême comme des indéterminées, & en comparant chaque terme de cette équation avec chaque terme correſpondant de l'équation qui s'eſt preſentée dans la reſolution du Problême: car l'on détermine, par le moyen des équations que donnent ces comparaiſons, les valeurs du diametre & des autres lignes qu'il faut avoir pour décrire la Section conique exprimée par l'équation qui reſout le Problême.

En regardant de près les veſtiges que M^r Deſcartes a laiſſés dans le ſecond & dans le troiſiéme Livre de ſa Geometrie, on voit aſſez qu'il s'eſt ſervi de la methode dont on vient de parler, (qui eſt expliquée dans le ſeptiéme Problême de cette troiſiéme Section, & dans les Remarques qui le ſuivent,) pour diſtinguer dans la reſolution du Problême de *Pappus*, qu'il donne dans le ſecond Livre, à quelles Sections coniques ſe reduiſoient les équations qui ſe ſont preſentées à lui dans cette reſolution, & pour trouver le diametre & les autres lignes neceſſaires pour décrire ces Sections coniques. Il s'en eſt encore ſervi, dans la reſolution des équations qu'il donne dans le troiſiéme Livre, pour décrire les Sections coniques qui jointes enſemble ſe coupent en des points

dont les ordonnées ou bien les coupées ſont la reſolution des équations. Cependant les Commentateurs de Mr Descartes n'ont point expliqué cette methode qui auroit éclairci ſa Geometrie, & l'auroit rendue plus facile. *Mr Craige* en Angleterre, & *M^r le Marquis de l'Hôpital* en France, ſont les premiers qui l'ont donnée au Public.

On explique dans la même troiſiéme Section la methode generale de décrire toutes les courbes Geometriques, en trouvant ſucceſſivement les points par où elles doivent paſſer. On y a mis auſſi quelques Exemples des courbes mechaniques. Enfin, pour n'oublier aucune des courbes qu'on a pu imaginer juſqu'à preſent, l'on y donne une idée des courbes qu'on nomme *exponentielles* & *parcourantes*.

La quatriéme Section eſt ſur les uſages que l'Analyſe fait des courbes; l'on en explique ſeulement deux: le premier eſt pour trouver, par le moyen des courbes Geometriques, les lignes qui ſont les valeurs geometriques des équations déterminées, c'eſt-à-dire, qui n'ont qu'une inconnue; ceſt ce qu'on appelle *conſtruire les équations*; le ſecond eſt pour reſoudre, par le moyen des courbes, pluſieurs Problêmes Phyſico-mathematiques. La conſtruction des équations eſt une des belles parties de la Geometrie compoſée. Pour l'expliquer à fond d'une maniere courte, mais ſans obſcurité, on l'a déduite du principe d'où elle dépend naturellement, que voici.

Si l'on prend les équations de deux lignes geometriques où les mêmes lettres changeantes marquent les coordonnées, & que l'on ôte l'une des deux changeantes, par exemple la changeante des coupées, dans l'une de ces deux équations par le moyen de l'autre équation, il en naîtra une troiſiéme équation qui n'aura qu'une ſeule changeante ou inconnue. Or les deux lignes geometriques de ces équations étant jointes l'une à l'autre de façon que leurs coupées ſoient communes ou paralleles entr'elles, & qu'elles partent d'une même origine, & qu'il en ſoit de même de leurs ordonnées, elles ſe couperont en autant de points qu'il y a de dimenſion dans la plus haute puiſſance de l'inconnue demeurée ſeule dans la troiſiéme équation: Et ſi l'on tire de tous les points d'interſection de ces deux lignes geometriques, des ordonnées juſqu'à la ligne des coupées de celle qu'on a

décrite la premiere, elles ſeront les valeurs geometriques de l'inconnue de la troiſiéme équation, ſi cette inconnue eſt celle des ordonnées; les coupées qui ſe terminent à ces ordonnées ſeront les valeurs geometriques de l'inconnue de la troiſiéme équation, ſi c'eſt l'inconnue des coupées qui y ſoit demeurée. Ce principe répand une lumiere ſur la methode que donne l'Analyſe pour trouver les équations des lignes geometriques, qui priſes deux à deux ſont propres à conſtruire telle équation déterminée qu'on voudra; & pour joindre enſemble ces deux lignes geometriques d'une maniere propre à les faire couper dans les points qui auront pour ordonnées ou pour coupées les lignes qui ſont les valeurs geometriques de l'inconnue de cette équation déterminée; il répand, dis-je, une lumiere ſur cette methode qui la rend claire aux commençans, quoiqu'elle ſoit très-courte. On prend pour exemple la conſtruction de toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, & l'on fait voir la maniere de l'executer par l'union d'une parabole donnée & du cercle; & encore par l'union d'une hyperbole donnée entre les aſymptotes dont l'Angle eſt aigu ou obtus, & du cercle. On a mis cette derniere maniere de conſtruire toutes les équations du troiſiéme & du quatriéme degré, parcequ'elle renferme quelques difficultés qui auroient pû embarraſſer les commençans.

On pourra encore remarquer en cet endroit l'exacte convenance de l'Analyſe & de la Geometrie. Il y a autant d'interſection des deux lignes geometriques employées à conſtruire l'équation, qu'il y a de valeurs analytiques de l'inconnue de cette équation. Quand toutes les valeurs que fournit l'Analyſe ſont poſitives & differentes, les lignes qui en ſont les valeurs geometriques ſont toutes differentes, & du côté des lignes poſitives. Lorſque l'Analyſe donne des valeurs négatives, les valeurs geometriques ſont du côté des lignes négatives. Quand le ſecond terme de l'équation eſt évanoui, la ſomme des valeurs négatives que donne l'Analyſe eſt égale à celle des poſitives; l'on trouve auſſi dans la conſtruction geometrique, que la ſomme des lignes du côté des grandeurs négatives eſt égale à celle des lignes qui ſont du côté des poſitives. S'il y a des valeurs analytiques égales, l'on trouve autant d'interſections des lignes

geometriques qui ſe réuniſſent enſemble. Enfin dans les cas où l'Analyſe trouve des valeurs impoſſibles, les lignes geometriques employées à la conſtruction ne ſe coupent ni ne ſe touchent point du côté que devroient être les valeurs geometriques correſpondantes.

On explique à la fin de la même quatriéme Section quelques uſages des courbes pour la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques. On fait voir que les traces des bombes jettées à toutes les inclinaiſons poſſibles du mortier, ſont des paraboles. On tire d'ordinaire des proprietés de la parabole la reſolution des Problêmes de l'art de jetter les bombes: mais comme l'on à reſolu ces Problêmes dans la ſeconde Section ſans ſe ſervir de la parabole, on donne la reſolution de deux autres Problêmes ſur toutes les paraboles que peut décrire une bombe jettée par une même force de poudre à toutes les differentes inclinaiſons qu'on peut donner au mortier. On fait voir auſſi dans la même Section que l'ellipſe & l'hyperbole ſont les figures qu'il faut donner aux verres, afin que les rayons qui y entrent paralleles à l'axe ſoient diſpoſés, par les refractions qu'ils ſouffrent en paſſant de l'air dans les verres, ou des verres dans l'air, à ſe réunir dans un point donné. Enfin on fait découvrir par l'Analyſe, que la cycloïde eſt la courbe que le centre de peſanteur d'un pendule ſimple, ou le centre d'oſcillation d'un pendule compoſé doit décrire, afin que ſes vibrations grandes ou petites ſoient toutes d'une égale durée: ce qui fait concevoir qu'un tel pendule eſt ce qu'il y a de plus propre à moderer le mouvement des horloges, & à les rendre la meſure exacte du temps.

SECONDE PARTIE.

Sur le calcul differentiel, & ſur l'uſage de l'Analyſe en ſe ſervant de ce calcul.

ON fait remarquer dans la premiere Section, que ce n'eſt point une choſe nouvelle dans la Geometrie que de conſiderer des parties de grandeur d'une ſi extrême petiteſſe, qu'on ne peut les faire entrer en comparaiſon avec les gran-

deurs ordinaires que l'on peut déterminer. Les plus anciens Geometres, comme on le voit dans le douziéme Livre d'Euclide, & dans les Ouvrages d'Archimede, ont pris ces parties infiniment petites pour principe de quelques-unes de leurs démonſtrations. Car pour démontrer, par exemple, que deux cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, & deux circonferences comme leurs diametres; ils ont ſuppoſé qu'on pouvoit concevoir dans l'un & l'autre de ces cercles deux polygones ſemblables inſcrits, ou deux polygones ſemblables qui leur fuſſent circonſcrits, dont les côtés fuſſent d'une telle petiteſſe, que la difference des polygones inſcrits ou circonſcrits d'avec leurs cercles fût moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée, quelque petite que pût être cette grandeur. Or ces polygones étant entr'eux comme les quarrés des diametres des cercles, & leurs circuits comme ces mêmes diametres; la ſuppoſition qu'ils avoient faite leur faiſoit conclure que les cercles & les circonferences avoient le même raport que les aires & que les circuits de ces polygones.

Ce n'a donc point été de nos jours une nouvelle découverte que d'employer dans la Geometrie ces parties des grandeurs entieres, ſi petites qu'elles n'ont aucun raport fini avec elles. Ce que les illuſtres Auteurs du calcul differentiel & integral ont ajouté à cette ſuppoſition que les Anciens ont priſe de la nature, n'a été que de donner des expreſſions convenables à ces petites parties qui ſont les premiers élemens des grandeurs; & de trouver un calcul qui leur fût tellement propre, qu'on pût leur appliquer les methodes de l'Analyſe, & qu'on pût remonter de ces parties infiniment petites aux grandeurs entieres ou integrales dont elles ſont les premiers élemens. Le fondement du calcul differentiel eſt commun aux anciens & aux nouveaux Geometres. La certitude des démonſtrations poſées ſur ce fondement eſt la même. La maniere même d'employer, dans les démonſtrations & dans les reſolutions des Problêmes, ces parties des grandeurs plus petites que toute grandeur qu'on peut déterminer, eſt commune aux uns & aux autres. Car comme les Anciens ne ſuppoſoient cette difference infiniment petite entre le cercle & le polygone d'une infinité de côtés qui lui étoit inſcrit ou circonſcrit, que pour faire leur démonſtra-

tion ; qu'ils ne la concevoient ſubſiſtante que pendant la démonſtration ; & qu'au moment qu'ils l'avoient faite, ils regardoient cette difference comme devenant nulle, & que le polygone inſcrit ou circonſcrit, qui étoit pour ainſi dire l'infinitiéme, ne differoit en rien du cercle. Les nouveaux Geometres n'employent auſſi les même differences infiniment petites que pendant la reſolution des Problêmes ; ils ne les reçoivent réelles & ſubſiſtantes que pendant leur calcul ; & au moment qu'il leur a donné la reſolution, ils ſuppoſent que les differences s'évanouiſſent & deviennent nulles, & que les grandeurs qu'ils ſuppoſoient ne differer des grandeurs entieres qu'ils cherchoient que par des differences infiniment petites, n'en different point du tout. La certitude du calcul differentiel doit donc être au même degré que celle des démonſtrations des anciens Geometres qui avoient le même principe, & qui ont été reçues de tout le monde. La ſeule difference eſt que les Anciens ne faiſoient ſur ce principe que des démonſtrations qu'on appelle *per abſurdum*, & que les nouveaux calculs démontrent tout directement.

On apperçoit même diſtinctement, en y regardant de près, les *ſecondes differences* renfermées dans la ſuppoſition des Anciens, quoiqu'ils n'y fiſſent pas de reflexion, & qu'ils n'en euſſent pas beſoin dans leurs démonſtrations. Car dans l'exemple qu'on a pris d'eux ſur le polygone inſcrit dans le cercle, qui devoit avoir tant de côtés que la difference de l'aire du polygone inſcrit dans le cercle, fût plus petite que toute grandeur finie & déterminée ; il eſt évident qu'il falloit qu'ils conçuſſent celui des polygones inſcrits, qui étoit, pour ainſi dire, le dernier, comme ayant un nombre infini de côtés ; autrement la difference de ſon aire d'avec le cercle eût été finie & déterminée, ce qui auroit détruit leur ſuppoſition : Or l'on conçoit diſtinctement que la difference de l'aire de ce dernier polygone d'avec le cercle, moindre, par la ſuppoſition, qu'aucune grandeur finie, étoit compoſée du nombre infini des petits ſegmens de cercle, dont les petits côtés du polygone étoient les cordes : C'eſt pourquoi ces petits ſegmens étoient juſtement ce qu'on appelle des *ſecondes differences* dans les nouveaux calculs, puiſqu'il y en avoit une infinité pour faire une premiere dif-

ference, qui étoit celle de l'aire du polygone inſcrit d'avec l'aire du cercle.

Après avoir établi la ſuppoſition des parties des grandeurs plus petites qu'aucune grandeur finie, on donne les expreſſions de ces petites parties qu'on nomme *differences* ou *differentielles*. L'on a pris les expreſſions de Mr Leibnits comme moins capables de cauſer des mépriſes dans les calculs & dans l'impreſſion, & parcequ'elles ſoulagent davantage l'imagination: On met enſuite le calcul des premieres differences, des ſecondes differences, des troiſiémes, &c. C'eſt ce qu'on nomme le *calcul differentiel*.

On explique dans les trois Sections ſuivantes l'uſage de l'Analyſe en ſe ſervant du calcul differentiel. Mais comme l'on s'eſt propoſé d'être court dans ce Volume des uſages de l'Analyſe, & d'y apprendre cependant à fond aux commençans la maniere de découvrir les principales proprietés de toutes les courbes; on a réduit à des formules generales les Problêmes qui les font trouver. Ces Problêmes ſont de deux ſortes; la reſolution complette des uns dépend du ſeul calcul differentiel; la reſolution des autres ſe commence par le calcul differentiel, & s'acheve par le calcul integral. On fait découvrir aux Lecteurs dans la ſeconde Section les formules pour reſoudre les Problêmes qui ne dépendent que du calcul differentiel, comme les formules pour trouver les tangentes, les ſoutangentes, les perpendiculaires, les ſouperpendiculaires de toutes les courbes, & les autres lignes qui ont rapport à celles qu'on vient de nommer; les formules pour trouver les ordonnées & les coupées des points des courbes où les tangentes de ces points ſont paralleles aux coordonnées, ce qui comprend la reſolution des Problêmes ſur les quantités qu'on nomme *les plus grandes & les moindres*; les formules pour découvrir dans les courbes qui ſont en partie concaves, & en partie convexes, les points qui ſeparent ces parties, qu'on nomme lespoints *d'inflexion*; & dans les courbes qui rebrouſſent leur chemin, les points *de rebrouſſement*. Enfin les formules pour trouver les *developées* de toutes ſortes de courbes. Ces courbes developées ſervent à former les courbes dont elles ſont les developées, par le developement inſenſible d'un fil qu'on conçoit les enveloper. L'Extrémité de ce fil, à meſure qu'il ſe develope, décrit les cour-

bes dont elles ſont les developées. Elles ſont devenues de grand uſage dans la geometrie compoſée & dans la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques depuis que *M. Hugens* en a fait la découverte. On donne des exemples pour apprendre aux commençans la maniere de ſe ſervir de toutes ces formules, & pour reſoudre par leur moyen les Problêmes des courbes particulieres dont ces formules expriment la reſolution generale.

On fait de même découvrir aux Lecteurs dans la troiſiéme Section les formules generales pour reſoudre les principaux Problêmes ſur toute ſorte de courbes, dont la reſolution ſe commence par le calcul differentiel, & s'acheve par le calcul integral; comme les formules de la rectification des courbes, c'eſt-à-dire, pour en trouver la longueur; celles qui ſervent à meſurer leurs aires, qu'on appelle leur quadrature; celles dont on tire la meſure des corps ſolides formés par la révolution des courbes autour d'une ligne droite priſe pour axe ſur le même plan; celles qui font connoître la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides; enfin celles qui font découvrir les centres de peſanteur des courbes, de leurs ſurfaces, des ſolides qui en peuvent être formés, & des ſurfaces courbes de ces ſolides. On fait voir auſſi la maniere d'appliquer ces formules à l'uſage par des exemples particuliers. On a eu ſoin de mettre parmi ces exemples les differentielles particulieres de la rectification & de la quadrature des Sections coniques, qu'on appelle *les élemens* de leur rectification ou de leur quadrature, afin de s'en ſervir dans la troiſieme Partie pour faire concevoir clairement les methodes qu'on y doit donner pour trouver, dans les cas où les methodes du calcul integral ne donnent pas les integrales exactes de quelques differentielles, pour trouver, dis-je, dans ces cas les integrales finies de ces differentielles, en les reduiſant à la rectification ou à la quadrature des Sections coniques.

Les Methodes qu'on a expliquées au long dans le ſeptiéme Livre, ſont miſes en uſage dans la quatriéme Section pour exprimer par *des ſuites* infinies les integrales des differentielles dont les Regles du calcul integral ne donnent pas les integrales exactes & finies. On auroit pu en donner une infinité d'exemples; mais on a choiſi ceux qui ſuffiſoient pour apprendre aux commençans à s'en former eux-mêmes tant qu'il

qu'il leur plaira, ſans trouver d'autre peine dans l'application des Methodes, que celle du calcul, & qui pouvoient en même temps les inſtruire de choſes neceſſaires dans la Geometrie & dans les Parties pratiques des Mathematiques. Un de ces exemples ſur la rectification des arcs de cercle, fait découvrir une formule generale pour trouver, avec la corde ou le ſinus d'un arc donné, la corde ou le ſinus de tel autre arc qu'on voudra; cette formule peut ſuffire pour faire par de ſimples ſubſtitutions les tables des ſinus; & les Lecteurs peuvent trouver des formules ſemblables pour faire les tables des tangentes & des ſecantes. Un autre exemple ſur la quadrature de l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes fait découvrir une formule pour faire, par de ſimples ſubſtitutions, une table des logarithmes hyperboliques. L'on y explique ces logarithmes, la maniere de les reduire aux logarithmes ordinaires, & la maniere de trouver une formule, avec laquelle on puiſſe, par le moyen d'un logarithme donné, avoir le nombre dont il eſt le logarithme. On explique de plus les logarithmes des lignes. On verra dans la troiſiéme Section de la troiſiéme Partie, qu'ils ſont d'uſage dans la Geometrie compoſée. Enfin on fait voir que les mêmes methodes ne ſervent pas ſeulement à trouver *les ſuites* qui ſont les integrales des élemens des courbes, de leur quadrature, des ſurfaces courbes, & des ſolides formés par la revolution des courbes; mais auſſi *les ſuites* qui ſont les valeurs connues des lettres inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans ces élemens. On a mis pour exemple le Problême qui fait découvrir une formule pour trouver, par le moyen d'un ſecteur quelconque d'ellypſe, dont le ſommet eſt à l'un des foyers, & dont l'un des côtés eſt ſur l'axe, l'ordonnée de l'arc de l'ellypſe qui eſt la baſe du ſecteur. Cette formule donne la reſolution directe du Problême aſtronomique que *Kepler* propoſa à tous les Geometres de ſon temps, & dont il ne put trouver qu'une reſolution indirecte. Ce fameux Aſtronome, qui eſt à preſent fort ſuivi des Sçavans, ſuppoſe que les Planetes decrivent des ellypſes par leurs mouvemens propres, & il le prouve en particulier de Mars par le moyen des obſervations. Il ſuppoſe que le temps moyen d'une revolution entiere doit ſe meſurer par l'aire entiere de l'ellypſe, qu'on

peut concevoir diviſée en 360 ſecteurs égaux, leſquels pris de ſuite meſurent le temps moyen des parties de la revolution entiere; il nomme *anomalie moyenne* chaque ſomme de ces ſecteurs priſe de ſuite depuis l'axe d'où il comptoit ces ſommes; il lui falloit, pour chacune de ces ſommes, ou pour chaque anomalie moyenne, trouver l'angle que formoient au foyer les deux côtés du ſecteur qui comprenoit chacune de ces ſommes, il appelloit cet angle *l'anomalie veritable*; c'eſt-à-dire, qu'il lui falloit trouver pour chaque lieu moyen de la planete, le vrai lieu de cette planete. La formule dont on vient de parler, ſert à découvrir les deux côtés du triangle rectangle, dont l'angle, qui eſt *l'anomalie veritable*, eſt l'un des angles aigus: ainſi elle fait trouver la reſolution de ce Problême, qui peut ſervir pour les tables aſtronomiques.

TROISIEME PARTIE.

Sur l'uſage de l'Analyſe pour découvrir les regles du calcul integral, & ſur l'uſage que l'Analyſe fait de ces regles.

LA methode de retourner des differentielles aux grandeurs entieres, qu'on appelle *integrales*, dont elles ſont les differentielles, eſt ce qu'on nomme *le calcul integral*. Ainſi les principes fondamentaux de ce calcul dependent du calcul differentiel. On établit dans la premiere Section trois propoſitions fondamentales du calcul integral, qui ſont des ſuites neceſſaires du calcul differentiel; & l'on en déduit, par le moyen de l'Analyſe, les regles du calcul integral pour trouver les integrales exactes des differentielles qui leur ſont ſoumiſes. La premiere & la plus feconde de ces propoſitions eſt pour découvrir les integrales des differentielles qui n'ont qu'une même changeante. On enſeigne aux Commençans dans les Corollaires de cette propoſition la maniere de trouver les integrales des differentielles les moins compoſées, & de toutes les grandeurs complexes, (dont les termes ſont diſtingués par les differentes puiſſances d'une même changeante,) élevées à une puiſſance quel-

conque dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif. On leur fait remarquer qu'une integrale qui a un terme conſtant, c'eſt-à-dire ſans changeante, donne la même differentielle que ſi elle n'en avoit pas ; & qu'à cauſe de cela une même differentielle peut avoir pour integrale la grandeur changeante dont elle eſt déduite, augmentée ou diminuée de telle grandeur conſtante qu'on voudra. Ainſi l'on a beſoin de la regle, qu'on explique dans cette premiere Section, pour s'aſſurer dans la reſolution des Problêmes particuliers, ſi l'integrale qu'on trouve eſt complette : ou s'il lui manque une grandeur conſtante ; & pour trouver, dans ce dernier cas, la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou en ôter, pour la rendre complette.

Après avoir apris la maniere de trouver les integrales dans les cas particuliers les plus faciles, en les reduiſant à la premiere propoſition, l'on donne des methodes generales qui conviennent aux differentielles les plus compoſées ; Et comme les principales difficultés ſont ſur les differentielles qui ſont compoſées de grandeurs complexes, c'eſt-à-dire qui ont pluſieurs termes, élevées à des puiſſances dont les expoſans ſont des nombres rompus, ou des nombres négatifs, on rapporte toutes ces ſortes de differentielles à des formules generales, qu'on nomme *binomes*, quand la grandeur complexe n'a que deux termes ; *trinomes*, quand elle en a trois, & ainſi de ſuite. On enſeigne à reduire les differentielles particulieres aux generales, & l'on donne trois methodes qui font découvrir des formules generales des integrales de ces differentielles. La premiere n'eſt qu'un uſage de la table de la page 410, pour mettre les differentielles les plus compoſées en état d'y appliquer la premiere propoſition fondamentale : Cette premiere methode eſt facile à concevoir ; cependant les Commençans peuvent la paſſer dans les premieres lectures de cet Ouvrage, à cauſe de la longueur du calcul, & s'attacher à la ſeconde methode. Elle donne non ſeulement tous les termes des formules generales qui ſervent à trouver les integrales exactes des differentielles qui leur ſont ſoumiſes, mais encore les termes qui ſervent à trouver les integrales finies des differentielles qui n'en peuvent avoir d'exactes par les ſeuls termes des formules qui les donnent exactes ; & cela par la ſuppoſition

des rectifications ou des quadratures des Sections coniques, ou du moins de celles des courbes plus ſimples que ne ſont les courbes à qui appartiennent les differentielles dont on cherche les integrales finies. On applique d'abord cette ſeconde methode aux differentielles binomes. On l'étend enſuite aux trinomes, & les Lecteurs pourront l'étendre de ſuite aux differentielles plus compoſées. La troiſiéme methode fait découvrir une formule generale pour trouver les integrales des differentielles complexes, qui ayent un tel nombre de termes qu'on voudra ; elle en fait même découvrir pour les differentielles complexes multipliées les unes par les autres. On donne deux manieres de trouver ces formules generales, qui ſont toutes deux utiles. Les formules que cette troiſiéme methode fait découvrir conviennent aux differentielles binomes, trinomes, &c. en ſuppoſant égaux à zero les termes de ces formules qui ſont inutiles à ces differentielles. On fait voir la maniere d'appliquer ces formules aux differentielles particulieres.

On a mis vers la fin de la premiere Section les deux autres propoſitions fondamentales du calcul integral ; l'une n'eſt que pour les differentielles qui font un membre d'une équation dont zero eſt le ſecond membre ; l'autre eſt pour trouver les integrales des differentielles qui ont pluſieurs changeantes multipliées les unes par les autres ; on donne des moyens pour reduire à cette propoſition les differentielles qui peuvent s'y rapporter ; mais comme il y en a un grand nombre qu'on n'y peut pas reduire, du moins facilement, on donne des moyens particuliers (car on n'a pas encore découvert de methode generale) pour ſeparer les changeantes dans les differentielles qui en ont pluſieurs multipliées les unes par les autres, afin de les rapporter aux methodes des differentielles qui n'ont qu'une ſeule changeante.

Enfin on étend, à la fin de la premiere Section, aux ſecondes differences, aux troiſiémes, &c. les methodes qu'on a données pour trouver les integrales des premieres differences.

Il y a un grand nombre de differentielles dont on ne peut pas trouver les integrales exactes par les methodes de la premiere Section. On peut bien trouver des *ſuites infinies*

qui en ſoient les integrales ; mais on aime mieux les avoir en termes finis. C'eſt ce qui a fait chercher des methodes pour avoir les integrales finies de ces differentielles en ſuppoſant les rectifications ou la quadrature des courbes plus ſimples que ne ſont celles auxquelles ſe rapportent ces differentielles ; & il y en a un grand nombre dont on peut avoir les integrales en termes finis, en ſuppoſant les rectifications ou les quadratures des ſeules Sections coniques. On a mis dans la ſeconde Section les Problêmes qui font découvrir ces integrales en termes finis. Le premier ne donne rien de plus que les formules de la ſeconde methode de la premiere Section ; on n'a pas laiſſé de le mettre pour faire voir comment on arrive au même but par differentes voyes. Le troiſiéme Problême, qui enſeigne à transformer les differentielles & les courbes en d'autres differentielles & en d'autres courbes dont les integrales & les aires ſoient égales, eſt de grand uſage pour changer les differentielles complexes où les puiſſances des changeantes ſont fort élevées en d'autres plus ſimples, & pour changer de même des courbes d'un genre fort élevé en d'autres plus ſimples, & même pour les reduire aux Sections coniques, de maniere que les aires de ces courbes plus ſimples ſoient égales aux aires des courbes plus compoſées dont elles ſont les tranſformées : ce qui rend plus facile la découverte des integrales des differentielles fort compoſées. On a mis auſſi dans la ſeconde Section une methode particuliere pour avoir en termes finis, en ſuppoſant la quadrature du cercle ou de l'hyperbole équilatere, les integrales des differentielles que l'on y peut reduire. Enfin on donne dans le quatriéme Problême la methode de trouver les integrales des differentielles des courbes méchaniques, dont les ordonnées ou bien les coupées ſont égales à des arcs de courbe, comme du cercle, de la parabole, &c. ou bien aux puiſſances quelconques de ces arcs, en ſuppoſant la rectification de ces arcs.

On explique dans la troiſiéme Section le calcul differentiel & le calcul integral qui conviennent aux courbes dont les équations contiennent des expreſſions *logarithmiques*, ou bien des expreſſions *exponentielles*. Ces calculs donnent les moyens d'appliquer à ces ſortes de courbes les formules de

la ſeconde & troiſiéme Section de la ſeconde Partie, pour trouver leurs tangentes, leurs perpendiculaires, les points où les tangentes ſont paralleles à leurs coordonnées, leurs points d'inflexion ou de rebrouſſement, leurs developées, leurs rectifications, leurs quadratures, la meſure des ſolides formés par leur revolution autour d'une ligne droite, la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides, & les centres de peſanteur de ces courbes, de leurs ſurfaces, & des corps formés par leur revolution: l'on en donne des exemples, & l'on explique auſſi la maniere de conſtruire ces ſortes de courbe par le moyen de la *courbe logarithmique*. Les deux dernieres Sections ſont ſur l'uſage du calcul integral qui a été expliqué dans les trois premieres.

Les principaux uſages du calcul integral ſont de faire découvrir les rectifications des courbes, leurs quadratures, la meſure des ſolides formés par la revolution des courbes autour d'une ligne droite, la meſure des ſurfaces courbes de ces ſolides, & les centres de peſanteur de ces courbes, de leurs aires, des ſolides qui en peuvent être formés, & des ſurfaces courbes de ces ſolides. On explique dans la quatriéme Section la methode generale pour reſoudre ces Problêmes, qui ne conſiſtent qu'en ceci: Il faut ſubſtituer dans les formules de ces Problêmes qu'on a données dans la troiſiéme Section de la ſeconde Partie, les valeurs des lettres de ces formules priſes des équations particulieres des courbes auxquelles on veut les appliquer. Ces ſubſtitutions reduiront les formules à être les élemens de la rectification de ces courbes ou de leur quadrature, &c. Il faut enſuite trouver, par les methodes qu'on a données dans les trois premieres Sections de cette troiſiéme Partie, les integrales de ces élemens, ces integrales exprimeront les rectifications qu'il falloit trouver, ou les quadratures, &c.

On applique cette methode à des exemples dans la quatriéme Section, & pour être court, en faiſant voir cependant aux Commençans l'uſage des principales methodes qu'on a données pour trouver les integrales, on a mis un premier exemple qui en contient une infinité. L'on y fait découvrir la rectification d'une infinité de courbes compriſes ſous l'équation des paraboles de tous les degrés à l'infini. Avant la découverte des nouveaux calculs on avoit

regardé avec admiration l'invention de la rectification de la ſeconde parabole cubique qui eſt à la fin du premier Volume de la geometrie latine de M^r Deſcartes ; on verra dans ce premier exemple que les nouveaux calculs font trouver la rectification d'un nombre infini de courbes. Les Commençans pourront s'exercer à trouver eux-mêmes la rectification des courbes qu'il leur plaira de choiſir dans l'ordre de celles qu'on démontre, dans ce premier Exemple, avoir des rectifications exactes ; car ils n'auront qu'à prendre dans les équations des courbes qu'ils auront choiſies, les valeurs des lettres de la formule qui contient en general toutes ces rectifications, & les ſubſtituer dans cette formule. On démontre dans le même Exemple qu'il y a un autre nombre infini de courbes compriſes ſous la même équation de toutes les paraboles, dont on peut trouver la rectification exprimée par un nombre fini de termes, en ſuppoſant celle de la parabole ſimple ; on donne la methode generale de trouver ces rectifications finies, & on l'applique à des exemples, afin qu'il ne reſte plus que la ſeule peine du calcul à ceux qui voudront en faire eux-mêmes tant d'autres exemples qu'il leur plaira. Ils y verront l'uſage des formules de la ſeconde methode de la premiere Section, & du premier Problême de la ſeconde Section, & que ces deux methodes donnent les mêmes reſolutions.

Pour faire voir la maniere de trouver les quadratures des courbes, on a choiſi un exemple, où il faut ſeparer les changeantes qui ſont multipliées l'une par l'autre dans l'équation de la courbe de cet Exemple ; & il eſt en même temps très-propre à faire remarquer le juſte raport de l'Analyſe à la Geometrie compoſée. Car l'équation de la courbe eſt du troiſiéme degré ; elle n'a point de ſecond terme : Et en prenant l'une après l'autre toutes les valeurs déterminées poſitives & négatives que peut avoir la ligne des coupées, il ne reſte plus d'inconnue dans l'équation que celle des ordonnées. Or en prenant ſucceſſivement les valeurs poſitives que peut avoir la ligne des coupées, on voit que l'inconnue a trois valeurs, deux poſitives, & la troiſiéme négative qui eſt égale à la ſomme des poſitives ; ce qui fait connoître qu'il y a trois ordonnées ; les deux poſitives forment ſucceſſivement chacune une branche de la courbe du côté des

ordonnées positives, & la négative forme une troisiéme branche de la courbe de l'autre côté, & l'ordonnée de cette troisiéme branche est toujours égale à la somme des ordonnées correspondantes des deux autres branches. Il y a une valeur positive de la coupée où les deux valeurs positives de l'ordonnée deviennent égales; ce qui fait voir que les deux branches formées par les deux ordonnées positives se réunissent au point où conviennent ces deux ordonnées égales, & l'ordonnée de la troisiéme branche est double de chacune de ces ordonnées égales: si l'on prend une valeur positive de la coupée qui surpasse celle qui convient aux deux ordonnées positives égales, on trouve que les deux valeurs positives de l'inconnue sont impossibles, & qu'il ne reste que la seule valeur négative; ce qui fait voir que les deux branches que forment les ordonnées positives ne s'étendent pas plus loin du côté des coupées positives, mais que la branche que forme l'ordonnée négative continue son chemin à l'infini. Quand on prend les valeurs négatives que peut avoir la coupée, on trouve toujours qu'il y a deux valeurs impossibles de l'inconnue des ordonnées, & qu'il ne reste qu'une valeur réelle: Elle sert à former une branche de la courbe du côté des coupées négatives. On fait voir aussi dans le même Exemple la maniere de trouver les asymptotes de cette courbe, pour apprendre aux Commençans comment ils doivent s'y prendre pour trouver les asymptotes des autres courbes qui peuvent en avoir.

La cinquiéme & derniere Section est sur l'usage que fait l'Analyse du calcul differentiel & du calcul integral pour trouver la nature des courbes, c'est-à-dire, pour trouver les équations qui en expriment les principales proprietés. La plûpart des Problêmes Physico-mathematiques se reduisent à la recherche des courbes qui en donnent la resolution. On en a mis plusieurs Exemples vers la fin de cette derniere Section, & on les peut regarder comme en faisant une seconde partie. On explique dans la premiere Partie ce qu'on appelle *la methode inverse des tangentes:* cette methode est regardée comme l'un des grands avantages que la Geometrie composée a retiré de la découverte des nouveaux calculs: voici ce qu'on entend par cette methode. On a donné dans la seconde Section de la seconde Partie la maniere de

trouver,

trouver, par le moyen de l'équation des courbes, leurs tangentes, soutangentes, perpendiculaires, souperpendiculaires, & les autres lignes qui y ont raport ; la maniere de retrouver les équations des courbes quand on en a les tangentes données, ou les soutangentes, ou les perpendiculaires, ou les souperpendiculaires, &c. est ce qu'on appelle *la methode inverse des tangentes*. Cette methode étoit inconnue avant la découverte des nouveaux calculs ; *Mr de Beaune* proposa un Problême sur cette methode à Mr Descartes, qui fit bien connoître le besoin que l'on avoit de calculs differens, de ceux de l'Algebre ordinaire pour resoudre ces sortes de Problêmes. On a donné quatorze Exemples de cette methode pour la rendre familiere ; le Problême de Mr de Beaune fait le quatorziéme ; le premier, le second, le septiéme, le huitiéme, le onziéme & le treiziéme contiennent chacun une infinité d'autres Exemples ; le douziéme, le treiziéme & le quatorziéme ne faisant découvrir que des équations differentielles des courbes que l'on cherche, on donne la construction de ces courbes, pour apprendre aux commençans la maniere de construire les courbes dont on n'a que des équations differentielles.

On a mis dans la seconde partie de cette derniere section six Exemples Physico-mathematiques, pour faire voir l'usage de l'Analyse dans la resolution des Problêmes Physico-mathematiques en employant les nouveaux calculs. Mr Descartes, pour faire voir l'utilité de ses découvertes pour ces sortes de Problêmes, a mis dans le second Livre de sa Geometrie la construction des courbes dont il faut donner les figures aux verres, afin qu'ils rassemblent en un point donné les rayons qui partent d'un autre point donné, par le moyen des refractions de ces rayons à l'entrée ou au sortir de ces verres. Ces courbes, qui sont devenues celebres parmi les Geometres, s'appellent *les Ovales de Mr Descartes* ; il a caché l'Analyse qui lui a fait decouvrir & construire ces ovales. On les a prises pour le premier Exemple ; l'on y verra combien l'invention en est facile par les nouveaux calculs ; que les regles les plus simples de ces calculs font trouver d'abord la construction de ces ovales ; & que l'Analyse fait découvrir par un calcul très-simple & très-facile que ces ovales deviennent des ellipses quand les rayons y

entrent paralleles, & des hyperboles, quand ils ſe preſentent paralleles pour en ſortir.

Ce celebre Auteur propoſe un autre Problême vers la fin du même ſecond Livre, & il laiſſe à ſes Lecteurs à en trouver la reſolution: le voici. L'une des ſurfaces d'un verre étant la figure formée par la revolution de laquelle on voudra des Sections coniques ſur leur axe, trouver la conſtruction de la figure qu'il faut donner à l'autre ſurface de ce verre, afin que les rayons qui partent d'un même point donné, ou qui ſont paralleles, ſoient diſpoſés par les deux refractions qu'ils doivent ſouffrir à l'entrée & au ſortir du verre à ſe réunir à un point donné. On prend pour ſecond Exemple ce Problême, ſans le borner aux ſeules Sections coniques, mais l'étendant à toutes les courbes, c'eſt-à-dire, ſuppoſé que l'une des ſurfaces d'un verre ait la figure de telle courbe qu'on voudra, (qui ſoit ſeulement ſuppoſée connue,) il faut trouver la conſtruction de la figure qu'on doit donner à la ſeconde ſurface du verre, afin que les rayons qui partent d'un point donné, ou qui ſont paralleles, ſoient diſpoſés, par les refractions qu'ils doivent ſouffrir à l'entrée & au ſortir du verre, à ſe réunir à un point donné.

On a pris pour troiſiéme Exemple le Problême fameux où l'on cherche la courbe formée par une chaîne compoſée de petits anneaux égaux lorſqu'elle eſt attachée par ſes deux ſeules extremités ſur un plan vertical. L'illuſtre Auteur des nouveaux calculs a donné la conſtruction & de beaux uſages de cette courbe dans les Journaux des Sçavans & dans les Actes de Lipſic, mais il a ſupprimé l'équation de la courbe & l'analyſe de ſa conſtruction. On fait découvrir dans ce troiſiéme Exemple l'équation de cette courbe, l'on en donne trois conſtructions, dont la troiſiéme eſt celle de Mr Leibnits, & on les fait découvrir toutes trois par l'Analyſe.

Les trois derniers Problêmes ont été propoſés par Mr Bernoulli à preſent Profeſſeur à Baſle. Les Mathematiques lui ont de grandes obligations, & à feu Mr Bernoulli ſon frere, des nouvelles découvertes qu'ils ont faites ſur les nouveaux calculs, & de l'émulation qu'ils ont excitée parmi les Sçavans en leur propoſant des Problêmes qu'ils avoient reſolus, mais dont ils tenoient les reſolutions cachées, afin que les autres euſſent le plaiſir de les trouver eux-mêmes:

ce qui nous a donné la reſolution d'un grand nombre de Problêmes nouveaux & utiles. M^r le Marquis de l'Hôpital eſt celui qui a le plus enrichi les Mathematiques des reſolutions complettes de ces Problêmes, quelque difficiles qu'ils fuſſent: il a donné celle des trois Problêmes qui finiſſent cette Section, mais il a entierement ſupprimé l'Analyſe du premier, & il a ſupprimé une grande partie de celle des deux autres, par les mêmes motifs que Mrs Bernoulli.

Le quatriéme Exemple eſt le Problême où il s'agit de trouver la courbe ſur laquelle il faut qu'un corps peſant ſe meuve librement pour aller le plus promptement qu'il ſoit poſſible d'un point donné à un autre point donné, en ſuppoſant que ces deux points donnés ne ſont pas dans une même ligne verticale. On fait découvrir par l'Analyſe ſans y mêler aucune ſyntheſe, que la cycloïde eſt la courbe qui reſout le Problême.

Le cinquiéme exemple eſt le Problême où il faut trouver la courbe dont la revolution autour d'une ligne droite donnée, forme la ſurface courbe qu'il faut donner à la partie d'un Vaiſſeau qui eſt dans l'eau, afin qu'il trouve en voguant dans la mer la moindre reſiſtance de la part de l'eau qui ſoit poſſible. On fait découvrir par l'Analyſe l'équation de cette courbe, & la conſtruction que l'on en donne.

Enfin l'on cherche dans le ſixiéme Exemple quelle eſt la courbe ſur laquelle un corps peſant deſcendant par le ſeul mouvement qu'il recevroit de ſa peſanteur, il la preſſeroit en chaque point avec une force preciſément égale à celle de ſa ſeule peſanteur lorſqu'il eſt en repos, ou avec laquelle il tireroit un fil auquel il ſeroit attaché en repos. On fait auſſi découvrir par Analyſe l'équation de cette courbe, que l'on trouve être une courbe geometrique. Mais ce Problême ſuppoſant les propoſitions qui regardent la chûte des corps par le ſeul mouvement qu'ils reçoivent de leur peſanteur, au lieu de les mettre en ſuppoſitions, on les a démontrées, tant celles qui regardent les chûtes perpendiculaires, que celles qui ſont ſur les chûtes inclinées, & ſur les chûtes qui ſe font par des courbes; afin que les commençans viſſent clairement la reſolution que l'on donne en la deduiſant des premiers principes, ſans avoir beſoin d'aucun autre ouvrage pour entendre à fond celui-ci.

Ils auront dans les ſept premiers Livres, dans la premiere Section de la ſeconde Partie du huitiéme où eſt expliqué le calcul differentiel, & dans les trois premieres Sections de la troiſiéme Partie du huitiéme Livre où l'on a mis les Regles du calcul integral, les methodes qui leur ſont neceſſaires pour reſoudre les Problêmes des Mathematiques, & ils trouveront dans le huitiéme Livre entier ce qu'il leur faut ſçavoir de Geometrie compoſée. Car on leur fait connoître toutes les courbes que peut contenir cette ſcience. On leur fait découvrir par Analyſe les principales proprietés des courbes les plus ſimples qui ſont les Sections coniques. On leur apprend à reduire les courbes aux équations qui en expriment la nature. On leur enſeigne à tirer de ces équations les proprietés de ces courbes, & on leur a mis des formules generales qui leur feront découvrir celles de ces proprietés qui ſont les plus conſiderables & les plus utiles, par de ſimples ſubſtitutions. On leur a auſſi appris par beaucoup d'Exemples la maniere d'appliquer les methodes de l'Analyſe à la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques. Enfin on a eu ſoin, dans tout l'Ouvrage, & dans les reſolutions les plus compoſées, de marquer juſqu'aux moindres démarches de l'eſprit pour arriver à ces reſolutions, afin qu'ils ne fuſſent arrêtés nulle part, & qu'ils devinſſent en état d'entendre toutes les nouvelles découvertes, & de faire eux-mêmes celles qu'ils voudront entreprendre.

ANALYSE

ANALYSE COMPOSÉE,

ou

ANALYSE QUI ENSEIGNE A RESOUDRE les Problêmes qui se réduisent à des équations composées.

LIVRE VIII.

Où l'on fait voir l'usage de l'Analyse dans la Geometrie & dans les Sciences physico-mathematiques; c'est-à-dire, on explique la maniere de se servir de l'Analyse pour résoudre les Problêmes de ces Sciences.

AVERTISSEMENT.

ON a ajouté ce dernier Livre pour les Lecteurs qui sçavent au moins médiocrement la Geometrie ordinaire : Ils y verront comment les calculs & les operations de l'Analyse sont les expressions de tous les raports des lignes & des figures de la Geometrie simple & composée, qui en font découvrir les proprietez les plus compliquées, & résoudre les Problêmes d'une maniere simple, facile, qui n'embarasse

pas l'imagination, & qui laiſſe à l'eſprit l'étendue dont il a beſoin pour découvrir aiſément tout ce que ces Sciences peuvent contenir de plus difficile, & pour pénétrer juſqu'à l'infini.

Pour exciter la curioſité des Lecteurs, & pour faire voir l'utilité de l'Analyſe, qui étoit regardée par ceux qui ne la ſçavent pas comme contenant de pures ſpéculations, on a mêlé dans ce huitiéme Livre pluſieurs Problêmes des Sciences phyſico-mathematiques; comme ceux qui ſervent à donner aux pendules à ſecondes toute la juſteſſe poſſible pour les rendre la meſure exacte du tems; ceux qui ſervent à l'art de jetter les bombes, pour les faire tomber exactement où l'on voudra, ceux qui ſervent à faire connoître les figures que l'on doit donner aux verres pour raſſembler en un point les rayons de lumiere, &c.

On s'eſt ſeulement propoſé de faire connoître les uſages de l'Analyſe & la maniere de s'en ſervir dans la réſolution des Problêmes qui s'expriment par des figures; & non pas de faire un corps de Geometrie dont toutes les parties fuſſent liées par la dépendance mutuelle des propoſitions qui ſeroient déduites les unes des autres. Cependant on a tâché de mettre de l'ordre dans les matieres qu'on y traite, de maniere que les plus ſimples précedaſſent, autant que cela ſe pouvoit, les plus compoſées, & qu'elles ſerviſſent à s'éclaircir mutuellement; & l'on a pris ſoin pour rendre tous les Problêmes que l'on réſout clairs & faciles aux Lecteurs qui commencent, de mettre du moins en ſuppoſitions (n'étant pas ici le lieu de les démontrer) tous les principes d'où ils dépendent, & qu'il faut avoir en vûe pour en concevoir clairement la réſolution.

On partagera ce huitiéme Livre en trois parties. On expliquera dans la premiere la maniere de ſe ſervir de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques, en n'employant dans les operations que les calculs de l'Algebre ordinaire. Dans la ſeconde Partie on enſeignera les uſages de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes des mêmes Sciences, en y employant *le calcul differentiel*. On fera voir dans la troiſiéme Partie comment l'Analyſe fait trouver *les Regles du calcul integral*; & on expliquera enſuite l'uſage de ces Regles dans la réſolution des Problêmes de la Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques.

PREMIERE PARTIE.

De l'uſage de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de la Geometrie & des Sciences phyſico-mathematiques, en ſe ſervant des ſeuls calculs de l'Algebre ordinaire.

PREMIERE SECTION.

Où l'on fait voir comment les calculs de l'Analyſe expriment tous les raports des lignes & des figures, en font découvrir les proprietez, & réſoudre les Problêmes.

PREMIERE SUPPOSITION OU DEMANDE.

267. POUR exprimer par les calculs de l'Analyſe les raports & les proprietez des figures de la Geometrie, il faut marquer les lignes de ces figures par les lettres de l'alphabet; par exemple dans la premiere figure on nommera a le côté AB du triangle ABH; b, le côté BH; c, le côté AH; & de même des autres figures. On marque ainſi ces dénominations, $AB = a$; $BH = b$; $AH = c$; ou bien $AB\,(a)$ &c. FIG. I.

Quand il y a dans les figures des lignes égales, on les nommera par une même lettre; de même quand une ligne eſt double, triple, &c. d'une autre ligne déja exprimée par la lettre a, on la nommera $2a$, $3a$, &c. quand elle en eſt la moitié, le tiers, &c. par $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c.

268. Il eſt évident que l'addition & la ſouſtraction des lettres qui expriment les lignes des figures, marquent que ces lignes ſont ajoutées enſemble, ou retranchées les unes des autres; par exemple ſi $AK = d$, & $AB = a$; la ſouſtraction $a - d$ marquera que AK eſt retranchée de AB; par conſequent $a - d = KB$. Il en eſt de même de l'addition. FIG. V.

269. L'expreſſion $\frac{a}{b}$ marque le raport de la ligne $AB\,(a)$ à la ligne $BH\,(b)$, ce qu'il faut remarquer dans l'expreſſion de tous les autres raports des lignes.

270. La multiplication des grandeurs, par exemple de la grandeur a par la grandeur b, que l'on marque par ces lettres jointes enſemble ab, ou par $a \times b$, eſt une proportion

dont le premier terme eſt l'unité, le ſecond & le troiſiéme ſont les grandeurs a & b à multiplier l'une par l'autre, & le quatriéme terme eſt le produit ab de ces grandeurs; ainſi chaque produit dans les operations de l'Analyſe exprime une ligne qui eſt le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers termes qui ſont connus, ſont l'unité & les deux grandeurs multipliées l'une par l'autre. Par exemple dans la premiere figure, ſuppoſé que AK ſoit l'unité ainſi $AK = 1$; que $AB = a$, $AM = e$; l'on a, en ſuppoſant KM & BH paralleles, cette proportion $AK(1).AB(a) :: AM(e).AH = \frac{ae}{1}$, ou ſimplement $ae = AH$; parcequ'on peut toujours ſous-entendre l'unité ſous un produit, ou ſous une grandeur ſans la marquer. L'on voit donc que le produit de deux lignes $AB(a)$ & $AM(e)$ eſt une autre ligne $AH = ae$, qui eſt la quatriéme proportionelle à l'unité AK & à ces deux lignes $AB(a)$ & $AM(e)$.

En ſuppoſant que les triangles AKM, ABH, ſont ſemblables, que $AK = 1$, $AB = a$, $KM = k$, $BH = h$; BH eſt auſſi le produit de $KM(k)$ par $AB(a)$; puiſqu'on a cette proportion $AK(1).KM(k) :: AB(a).BH(h = ak)$.

D'où l'on voit que quand on a deux lignes données $KM(k)$ & $AB(a)$; pour trouver la ligne $BH(h = ak)$, qui eſt leur produit, il n'y a qu'à faire les deux triangles ſemblables AKM, ABH, où AK ſoit $= 1$, $KM = k$, $AB = a$, & l'on trouvera $BH = ak$.

271. Le produit de trois lignes aef, marque deux proportions; par la premiere, l'unité eſt à la ligne a, comme la ligne e eſt à la ligne ae, qui eſt la quatriéme proportionelle, à l'unité & aux lignes a & e; par la ſeconde proportion l'unité eſt à la ligne ae, comme la ligne f eſt au produit des trois aef, qui eſt une ligne quatriéme proportionelle à l'unité & aux lignes ae & f.

D'où l'on voit que le produit de quatre lignes $aefg$, marque trois proportions; le produit de cinq lignes $aefgh$, marque quatre proportions, &c. & que dans ces proportions le produit total n'eſt qu'une ligne qui réſulte de toutes ces proportions.

272. Quand les produits ſont compoſez de lettres égales, comme 1, a, aa, a^3, a^4, a^5, &c. il eſt évident que les pro-

portions des lignes qui donnent ces produits ſont continues, & qu'ainſi tous ces produits pris de ſuite font une progreſſion geometrique de lignes, dont la premiere après l'unité eſt repréſentée par la lettre a, qui eſt la racine de tous ces produits, ou de toutes ces puiſſances.

273. La diviſion d'une grandeur $AH\,(ae)$ par une autre $AM\,(e)$, FIG. I. que l'on marque ainſi $\frac{ae}{e} = \frac{a}{1}$, ou ſimplement a, eſt une proportion inverſe de la multiplication, dont le premier terme eſt $AH\,(ae)$ ou la grandeur à diviſer; le ſecond terme eſt le diviſeur $AM\,(e)$; le troiſiéme terme eſt le quotient $AB\,(\frac{ae}{e} = a)$; le quatriéme terme eſt l'unité $AK\,(1)$; ou bien, en faiſant en ſorte que les trois premiers termes de la proportion ſoient les trois termes donnez, la diviſion eſt une proportion dont le premier terme eſt le diviſeur $AM\,(e)$, le ſecond terme eſt la grandeur à diviſer $AH\,(ae)$; le troiſiéme terme eſt l'unité $AK\,(1)$; le quatriéme eſt le quotient $AB\,(\frac{ae}{e} = a)$

D'ou l'on voit que le quotient d'une diviſion n'exprime qu'une ligne qui eſt le quatriéme terme d'une proportion dont le diviſeur eſt le premier terme, la grandeur à diviſer le ſecond, & l'unité le troiſiéme.

De même en ſuppoſant les triangles AKM, ABH ſemblables, & que $AB = a$; $BH = b = ak$; $KM = k$, & $AK = 1$; la ligne $KM\,(k)$ ſera le quotient de $BH\,(ak)$ diviſée par $AB\,(a)$; puiſque $AB\,(a).\ BH\,(ak) :: AK\,(1).\ KM\,(k)$.

D'où il eſt évident que quand on a deux lignes données $BH\,(ak$ ou $b)$, & $AB\,(a)$; pour trouver la ligne $KM\,(k)$, qui eſt le quotient de $BH\,(ak)$ diviſée par $AB\,(a)$, il n'y a qu'à faire les deux triangles ſemblables ABH, AKM, ou $BH = ak$ ou b, $AB = a$, $AK = 1$, & la ligne $KM\,(k)$ ſera le quotient.

L'on voit auſſi que ſi la ligne à diviſer étoit repréſentée par le produit de pluſieurs lettres $aefg$, qui marque que cette ligne eſt le dernier terme d'une proportion précedée de pluſieurs autres, l'on pourroit par la diviſion en repaſſant par toutes ces proportions, revenir à la premiere, dont le dernier terme ne ſeroit exprimé que par deux lettres, comme ae.

274. Quand l'expreſſion de la grandeur ou de la ligne à divi-

ſer AH, n'a aucune lettre commune avec l'expreſſion du diviſeur AB, que AH eſt, par exemple, exprimée par c, & AB par a, la diviſion ſe marque ainſi $\frac{c}{a}$; & ſuppoſant que AK eſt l'unité, l'on a toujours la même proportion $AB(a).\ AH(c) :: AK(1).\ AM = \frac{1c}{a}$.

275. D'où il eſt viſible que $\frac{AH}{AB}\left(\frac{c}{a}\right)$, qui eſt l'expreſſion du raport de AH à AB, eſt la même choſe que $\frac{AM}{AK}\left(\frac{\frac{c}{a}}{1}\right)$; les raports égaux exprimant des grandeurs égales, & l'on voit auſſi qu'on peut toujours ſous-entendre l'unité écrite ſous une grandeur entiere ou rompue, comme étant le dénominateur de la fraction dont cette grandeur eſt le numerateur, ſans que cela en change la valeur.

REMARQUE.

276. ON doit remarquer que dans les comparaiſons des lignes, l'unité eſt ordinairement arbitraire; c'eſt-à-dire, qu'on peut prendre une des lignes données pour l'unité, en raportant toutes les autres à cette ligne comme à leur unité : Mais quand on a ainſi déterminé l'unité, on ne doit plus dans toute la queſtion que l'on veut réſoudre, prendre d'autre
FIG. I. ligne pour l'unité; ainſi ſuppoſant dans les deux triangles ſemblables AMK, AHB, que $AK = a$, $AB = b$, $AH = d$, $AM = c$; ſi l'on prend la ligne $AK\ (a)$ pour l'unité l'expreſſion $\frac{bc}{a} = AH\ (d)$ marquera le produit des lignes $AB(b)$, $AM(c)$, qui eſt $AH = \frac{bc}{a}$.

Quand on a ainſi déterminé une des lignes d'une queſtion comme a pour être l'unité, on y trouve ces deux commoditez. 1°. On peut l'effacer des produits où elle ſe trouve, ce qui abrege l'expreſſion de ces produits, ſans en diminuer la valeur, l'unité ne changeant rien dans la valeur des produits où elle ſe trouve; ainſi $aabc = bc$, $\frac{bcd}{aa} = bcd$. 2°. On peut dans une équation rendre tous les termes d'un même nombre de dimenſions, en multipliant chaque terme par l'unité repetée autant de fois qu'il lui manque de dimenſions pour égaler les dimenſions des autres termes, ce qui les rendra homogenes. Ainſi on rendra tous les termes de $x^3 + px - bcd = 0$, homogenes, en écrivant $x^3 + apx - bcd = 0$; ou bien en diviſant les termes qui ont le plus de dimenſions par l'unité repetée autant de fois qu'il manque

de dimenſions aux autres pour les égaler. Par exemple, on peut rendre homogenes tous les termes de $xx - bbcx - ccdd = 0$, en écrivant $xx - \frac{bbcx - ccdd}{aa} = 0$.

277. Les extractions des racines dans les calculs de l'Analyſe, que l'on marque par les ſignes radicaux $\surd$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, &c. comme $\surd ab$, $\sqrt[3]{abc}$, &c. & par les grandeurs mêmes qui ſont les racines, quand cela ſe peut, comme a eſt la racine quarrée de aa, b la racine cubique de b^3, &c. ſont les expreſſions des Problêmes ou des figures que l'on fait dans la Geometrie, pour trouver les lignes qui ſont moyennes proportionelles entre d'autres lignes, ou entre l'unité & d'autres lignes. Par exemple, $\surd ab$ marque la ligne qui eſt moyenne proportionelle entre la ligne a & la ligne b; $\sqrt[3]{abc}$ exprime la premiere des deux lignes moyennes proportionelles entre la ligne qui eſt priſe pour l'unité, & la ligne qui eſt exprimée par le produit abc des trois lignes a, b, c; & ainſi des autres.

COROLLAIRE I.

278. IL eſt évident, après ce que l'on vient d'expliquer, que tous les calculs de l'Analyſe peuvent être repréſentez par les lignes & les figures de la Geometrie, par le moyen des triangles ſemblables & des proportions des lignes; & que tous les raports de ces lignes qui forment les figures de la Geometrie, peuvent être marquez par les expreſſions & les calculs de l'Analyſe.

COROLLAIRE II.

279. IL eſt de même évident que l'on peut changer, pour la commodité du calcul, des expreſſions compoſées en d'autres plus ſimples, & des expreſſions embaraſſantes en d'autres plus faciles, ſans en changer la valeur.

Par exemple, en nommant a la ligne priſe pour l'unité, on peut réduire les produits les plus compoſez à une ſeule lettre. Si l'on a $bcde$, 1°. faiſant $a . b :: c . \frac{bc}{a}$, qu'on ſuppoſera $= m$, l'on aura $am = bc$; & ſubſtituant am au lieu de bc, on aura $amde = bcde$. 2°. Faiſant enſuite $a . m :: d . n$, l'on aura $an = md$; & ſubſtituant cette valeur de md dans $amde$, on aura $aane = bcde$. 3°. Faiſant enfin $a . n :: e . p$, on aura $ap = ne$; & ſubſtituant cette valeur de ne dans $aane$, on aura $a^3p = bcde$; où ſupprimant l'unité a^3, on aura $p = bcde$.

Si l'on avoit $\frac{bcde}{fgh}$, on trouveroit $a^3p = bcde$, & $aaq = fgh$; & l'on auroit $\frac{bcde}{fgh} = \frac{a^3p}{a^3q} = \frac{p}{q}$; enſuite faiſant $q.p :: a(1).r$, on auroit $\frac{p}{q} = \frac{r}{a} = r$.

Si l'on avoit une fraction dont le numerateur & le dénominateur fuſſent complexes; c'eſt-à-dire, continſſent pluſieurs produits joints par + & —, on pourroit abreger de même l'expreſſion de cette fraction complexe.

On peut auſſi abreger l'expreſſion des fractions dont le numerateur & le dénominateur contiennent le produit de pluſieurs lettres comme $\frac{abcd}{efg}$, en faiſant en ſorte que la même lettre ſe trouve au numerateur & au dénominateur, ce qui la fait évanouir; car faiſant $a.b :: cm$, on aura $am = bc$, & $abcd = aamd$; puis faiſant comme $a.m :: d.n$, on aura $abcd = aaan$; faiſant de même pour le dénominateur $a.e :: f.p$, on aura $ap = ef$, & $efg = apg$; faiſant enſuite $a.p :: g.q$, on aura $aq = pg$; ainſi $efg = aaq$, & $\frac{abcd}{efg} = \frac{a^3n}{aaq} = \frac{an}{q}$; enfin faiſant $q.a :: n.r$, on aura $r = \frac{an}{q}$.

Si l'on avoit $bc - de$, en trouvant m moyenne proportionelle entre b & c, & n moyenne proportionelle entre d & e, l'on changeroit l'expreſſion $bc - de$ en $mm - nn$ qui lui ſeroit égale.

Il y a beaucoup d'autres manieres de changer ainſi les expreſſions en d'autres, ſans en changer la valeur que l'on tire des triangles ſemblables, & des autres figures de la Geometrie ordinaire.

Seconde ſuppoſition ou demande.

280. DANS les propoſitions de Geometrie où il s'agit de la ſurface des figures, les produits des calculs de l'Analyſe
FIG. 1. expriment les aires des figures; par exemple nommant a la baſe GF du quarré GH, & a ſa hauteur GI, aa eſt l'expreſſion de l'aire du quarré GH. De même nommant a la baſe AB du triangle rectangle ABH, & ſa hauteur BH, b; $\frac{1}{2}ab$ ſera l'expreſſion de l'aire du triangle ABH. Suppoſant auſſi dans le rectangle $GFBC$, ſa baſe $GF = a$, ſa hauteur $GC = b$; le produit ab ſera l'expreſſion de l'aire de ce rectangle. Il en eſt ainſi des autres.

Dans les propoſitions qui regardent les corps ſolides, les produits des operations analytiques expriment la ſolidité des

des corps; par exemple, nommant aa le quarré GH; si l'on conçoit le cube dont ce quarré est la base, a^3 sera l'expression de la solidité de ce cube; de même abc sera l'expression d'un prisme dont la base est représentée par le produit des lignes a & b, & la hauteur par c; $\frac{1}{3}abc$ sera l'expression d'une piramide qui aura la même base & la même hauteur que le prisme précedent. Il en est ainsi des autres.

L'addition & la soustraction des produits qui représentent des surfaces, expriment que ces surfaces sont ajoutées les unes aux autres, ou retranchées les unes des autres: c'est la même chose des produits qui expriment des solides.

Troisiéme supposition ou demande sur l'usage des signes + & — par raport à la Geometrie.

281. SUPPOSANT que les deux lignes DAE, CAB se coupent à angles droits au point A, & que les lignes paralleles à l'une & à l'autre qui sont dans les quatre angles droits, comme $RM, KM, OL, AO, KL, ON, PN, RQ, QP$, &c. soient compriſes dans un Problême, quand on a besoin de distinguer entre les paralleles à AB, celles qui vont vers la droite de celles qui vont vers la gauche, & entre les paralleles à DAE, celles qui descendent de celles qui vont en montant, on nomme parmi les premieres qui vont vers la droite ou vers la gauche, les unes positives & l'on met au devant le signe +, & les autres négatives & l'on met au devant le signe —; on fait la même chose pour distinguer entre les paralleles à DAE, celles qui descendent de celles qui montent. Il est libre au commencement de l'operation de prendre pour positives lesquelles on voudra entre celles qui vont de gauche à droite, ou de droite à gauche; & de même entre celles qui descendent & celles qui montent: Mais si l'on se détermine à mettre le signe + devant celles qui vont de gauche à droite, comme AB, DH, EF; celles qui vont de droite à gauche, comme AC, DI, EG, &c. doivent avoir le signe —. De même si l'on se détermine à mettre le signe + devant celles qui descendent, comme AE, BF, CG, &c. on doit écrire le signe — devant celles qui vont en montant, comme AD, BH, CI, &c. Le terme où commencent les positives & les négatives de gauche à droite, ou de droite à gauche, est la ligne DAE; le terme où com- FIG. I.

mencent les positives qui descendent & les négatives qui montent, est la droite CAB.

Appellant l'angle EAB le premier, DAB le second, CAE le troisiéme, & DAC le quatriéme, les lignes du premier seront toutes positives; entre les lignes du second, celles qui sont vers la droite sont positives, & celles qui montent sont négatives; dans le troisiéme, celles qui vont à gauche sont négatives, & celles qui descendent, positives; & dans le quatriéme, les unes & les autres sont négatives.

Supposant $AO = +a = +1$, $OL = +b$, $AE = +c$, l'on aura dans les triangles semblables OAL, EAF, AO $(+a$ ou $+1)$. $OL\ (+b) :: AE\ (+c)$. $EF = +\frac{bc}{a}$; d'où l'on voit comment $+$ multiplié par $+$, donne un produit qui a $+$.

Faisant $AO = +a = +1$, $AE = +c$, $ON = -d$, l'on aura dans les triangles semblables OAN, EAG, AO $(+a$ ou $+1)$. $AE\ (+c) :: ON\ (-d)$. $EG = -\frac{cd}{a}$.

Comme aussi en nommant $AK\ (+e)$, on aura à cause des triangles semblables OAN, KAM, $AO\ (+a$ ou $+1)$. $ON\ (-d) :: AK\ (+e)$. $KM = -\frac{de}{a}$; d'où l'on voit comment $+$ multiplié par $-$, ou $-$ par $+$, donne un produit qui a $-$.

Supposant encore $AR = -f$, l'on aura à cause des triangles semblables OAL, QAR, $AO\ (+a$ ou $+1)$. $OL\ (+b) :: AR\ (-f)$. $RQ = -\frac{bf}{a}$; d'où l'on voit encore comment $+$ par $-$, ou $-$ par $+$, donne un produit qui a $-$.

Enfin à cause des triangles semblables OAN, RAM, l'on aura $AO\ (+a$ ou $+1)$. $ON\ (-d) :: AR\ (-f)$. $RM = +\frac{df}{a}$; d'où l'on voit comment $-$ par $-$, donne un produit qui a $+$.

De même dans les surfaces le rectangle AF fait du produit de $+AE$ par $+AB$, sera positif.

Le rectangle AH fait de $-AD$ par $+AB$, sera négatif.

Le rectangle AG fait de $+AE$ par $-AC$, sera négatif.

Mais le rectangle AI fait de $-AD$ par $-AC$, sera positif; & du côté opposé au rectangle négatif AH fait de $-DA$ par $+AB$. L'on suppose dans tous les produits l'unité positive.

D'où l'on voit que les aires qui ſont dans les côtez oppoſez de la ligne qu'on a priſe pour terme entre les grandeurs poſitives & les négatives, ſont l'une poſitive, & l'autre négative.

On peut aiſément appliquer ceci aux produits qui expriment la ſolidité des corps.

COROLLAIRE.

282. LEs deux mêmes lignes DAE, CAB, ſe coupant au point A à angles droits, ou en faiſant enſemble au point A tel angle aigu qu'on voudra; qu'on tire la ligne FAI, faiſant au point A avec l'une ou l'autre tel angle aigu OAL, qu'on voudra : Concevant ces lignes prolongées à l'infini, & que par tous les points DAE on mene des lignes comme DI, RQ, OL, EF, &c. paralleles à la ligne CAB, juſqu'à la rencontre de FAI, & de même par tous les points de CAB des paralleles à DAE, juſqu'à la rencontre de la même ligne FAI, comme PQ, CI, KL, BF, &c. On ſuppoſera la ligne $AO = +a$, $OL = +b$; on nommera auſſi $+x$ chacune des lignes comme AE depuis A en deſcendant priſes ſur AOE, juſqu'à la rencontre de chaque parallele, comme EF; on nommera $+y$ chaque ligne comme EF menée par ce point E, parallele à AB; mais on nommera $-x$ chacune des parties AR, AD de la ligne AD, qui vont en montant, & qui ſe terminent aux paralleles RQ, DI, à CBA, & ces paralleles RQ, DI ſeront nommées $-y$. FIG. I.

Cela ſuppoſé, il eſt évident, à cauſe des paralleles, que $AO(+a).\ OL(+b) :: AE(+x).\ EF(+y)$; & par conſequent $+bx = +ay$, & $+y = +\frac{bx}{a}$ :: Et de même $AO(+a).\ OL(+b) :: AD(-x).\ DI(-y)$; d'où l'on aura $-bx = -ay$, & $-y = -\frac{bx}{a}$.

Il eſt évident que l'équation $y = \frac{bx}{a}$ convient à chacune des paralleles menée de chacun des points de AOE juſqu'à la ligne ALF; de ſorte qu'en déterminant la grandeur de chaque x, comme AE, la grandeur de $EF(y)$ qui lui répond eſt déterminée. Il faut entendre la même choſe de l'équation $-y = -\frac{bx}{a}$ par raport aux paralleles RQ, DI de l'autre côté.

D'où l'on voit que l'équation indéterminée $y = \frac{bx}{a}$; convenant à toutes les paralleles y par raport aux x qui leur répondent, & en exprimant la grandeur par raport à ces x correſpondantes; elle détermine le lieu de tous les points de la ligne droite AF qui paſſe par toutes les extrêmitez des y, & elle détermine ce lieu de la ligne droite AF par raport à la ligne AOE. Cela eſt cauſe qu'on nomme l'équation $y = \frac{bx}{a}$ *le lieu à la ligne droite, ou l'équation à la ligne droite*; & la ligne droite AF eſt la ligne à qui convient cette équation, qui étant prolongée en AI eſt auſſi la ligne à qui convient l'équation $-y = -\frac{bx}{a}$, qui eſt la même que la précedente.

Dans un lieu, par exemple, exprimé par $y = \frac{bx}{a}$, & conſtruit geometriquement par la figure EAF, DAI, on nomme le point A où commencent les x poſitives priſes ſur AE, & les x négatives ſur AD, *l'origine*: la ligne AE & AD ſur laquelle ſe prennent les x, ſe nomme *la ligne des coupées* ou *des abciſſes*: les lignes AE, AD, nommées x, s'appellent *les coupées* ou *les abciſſes*: les paralleles EF, OL, &c. qui ſont les y, ſe momment les *ordonnées*, & encore *les appliquées*; chaque abciſſe x & ſon ordonnée correſpondante y, ſe nomment les *coordonnées*: la ligne CAB menée par l'origine A parallele aux ordonnées, s'appelle *la ligne des ordonnées*; & l'on peut concevoir que les y ſe prennent ſur cette ligne, & raporter le lieu IAF à cette ligne CAB par le moyen des paralleles KL, PQ, &c. à la ligne DAE; car l'on aura $AK = OL\,(+b)$. $KL = AO\,(a)$ :: $AB = EF\,(y)$. $BF = AE\,(x)$; d'où l'on déduira $BF\,(x) = \frac{ay}{b}$; l'on trouvera de même PQ ou $CI\,(-x) = -\frac{ay}{b}$.

Dans une équation comme $y = \frac{bx}{a}$, qui exprime le lieu d'une ligne les x, & de même les y marquant des lignes qui vont en croiſſant ſucceſſivement, ou en diminuant ſucceſſivement; on les appelle grandeurs *changeantes* ou *variables*, & les grandeurs déterminées, comme $AO\,(a), OL\,(b)$, ſe nomment grandeurs *conſtantes*.

D'où l'on voit que dans les Problêmes de Geometrie, il faut diſtinguer les grandeurs variables, les inconnues, les indéterminées, & les déterminées ou connues. Les *variables* ſont celles qui dans une figure vont en croiſſant ou en diminuant ſucceſſivement, auſquelles convient un même raport,

& elles ſont marquées par des inconnues x, y, &c. Les inconnues ſont les grandeurs qu'on cherche pour la réſolution d'un Problême. Les indéterminées ſont les grandeurs qu'on met pour en repréſenter d'autres, comme dans x^n, l'expoſant n repréſente les grandeurs qu'on peut mettre à la place de cet expoſant, comme 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. on avertit quand les grandeurs ſont indéterminées; l'on a vû dans les livres précedens des exemples des indéterminées. Les grandeurs déterminées, qu'on nomme auſſi données & connues, & qu'on nomme *conſtantes* dans les Problêmes où il y a des variables, ſont les lignes ou figures déterminées, comme ſont les trois côtez d'un triangle donné, comme ſont des angles donnez, des triangles, des quarrez connus, &c.

Quand une ligne eſt ſuppoſée tracée ſur un plan, ſi elle eſt indéterminée, on dit qu'elle eſt *donnée de poſition*; & ſi de plus ſa longueur eſt déterminée, on dit qu'elle eſt *donnée de grandeur.*

Exemple de l'uſage des calculs de l'Analyſe pour découvrir les proprietez des Figures.

AVERTISSEMENT.

L'ANALYSE ſuppoſe les plus ſimples proprietez des figures démontrées par la Geometrie, comme les proprietez des perpendiculaires, des paralleles, des angles, & celles qui ne contiennent pas de raports ou de proportions; mais elle ſert à démontrer toutes celles où entrent les raports & les proportions, ſi ce n'eſt la ſeule propoſition qui eſt le principe de toutes les proportions des lignes & des figures, ſçavoir que dans tous les triangles ſemblables, les côtez oppoſez aux angles égaux, qu'on nomme côtez relatifs ou homologues, ſont proportionels.

EXEMPLE I. SUR LES TRIANGLES RECTANGLES.

AEB eſt un triangle rectangle en E, ſon hypothenuſe AB, eſt le diametre de la circonference AEB qui paſſe par le ſommet E de l'angle droit; ED eſt une perpendiculaire tirée du ſommet E ſur AB. Pour découvrir les proprietez de ce triangle, on ſuppoſera $AE = a$; $EB = b$; $AB = d$; $BD = x$, ce qui donnera $AD = d - x$.

283. 1°. Les triangles ſemblables AEB, AED, donneront $AB(d).AE(a)::AE(a).AD(d-x)$; d'où l'on aura la premiere équation $dd-dx=aa$. Par les triangles ſemblables AEB, EDB, l'on aura $AB(d).BE(b)::BE(b).BD(x)$; d'où l'on déduira la ſeconde équation $dx=bb$. Ajoutant enſemble la premiere & la ſeconde équation, l'on trouvera $dd=aa+bb$, c'eſt-à-dire, *le quarré de l'hypothenuſe eſt égal à la ſomme des quarrez des côtez*, qui eſt la proprieté des triangles rectangles.

284. 2°. Les triangles ſemblables ADE, EBD, donnent auſſi, en ſuppoſant $DE=c$, $AD(d-x).DE(c)::DE(c).DB(x)$; d'où l'on aura $dx-xx=cc$; c'eſt-à-dire *le quarré de DE, qui eſt moyenne proportionelle entre les deux parties AD, DB de l'hypothenuſe ou du diametre AB coupées par la perpendiculaire DE, eſt égal au rectangle des deux parties du diametre*, qui eſt une autre proprieté des triangles rectangles.

Corollaires qu'il faut ſe rendre familiers.

I.

285. L'HYPOTHENUSE $AB(d)$ d'un triangle rectangle, peut s'exprimer ainſi $AB(d)=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{BE}^2}$ $(\sqrt{aa+bb}.)$

II.

286. Le côté $AE(a)=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}$ $(\sqrt{dd-bb})$; le côté $BE(b)=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AE}^2}$ $(\sqrt{dd-aa}.)$

III.

287. La perpendiculaire $ED(c)=\sqrt{AD\times DB}$ $(\sqrt{dx-xx})$; & ſuppoſant que le milieu de $AB(d)$ eſt au point C, & que $CD=x$, l'on aura $AD=AC+CD=\frac{1}{2}d+x$, & $DB=BC-CD=\frac{1}{2}d-x$; ce qui donnera $ED(c)=\sqrt{AD\times DB}=\sqrt{\frac{1}{4}dd-xx}$. Si l'on ſuppoſe $AD=e$, $DB=f$, $ED=c$, l'on aura $\overline{ED}^2$ $(cc)=AD\times DB=ef$, & $c=\sqrt{ef}$.

IV.

288. Il eſt démontré dans la Geometrie qu'en tout cercle AEB, ſi l'on tire de l'extrêmité A du diametre AB une corde à un point quelconque E de la circonference, & une autre

corde EB de ce point E à l'autre extrêmité B du diametre, le triangle AEB eſt toujours rectangle en E; ainſi les expreſſions précedentes conviennent à ces lignes du cercle; ſçavoir $\overline{AB}^2\,(dd) = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = aa + bb$; & $AB\,(d) = \sqrt{aa+bb}$; & $AE\,(a) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{dd-bb}$; & $BE\,(b) = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{dd-aa}$. De même $\overline{ED}^2\,(cc) = AD \times DB = dx - xx$, & $ED\,(c) = \sqrt{dx-xx}$; mais auſſi $\overline{EB}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DB}^2 = dx - xx + xx = dx$; c'eſt pourquoi l'on aura $BE = \sqrt{dx}$.

D'où il ſuit que ſi deux cordes égales BE, $\beta\varepsilon$ ſont en deux differens cercles, nommant dans l'un le diametre AB, d, & DB, x, & dans l'autre le diametre δ, & la ligne qui répond à BD, ξ, l'on aura $\sqrt{dx} = \sqrt{\delta\xi}$; & par conſequent $dx = \delta\xi$, d'où l'on déduira $d.\ \delta :: \xi.\ x$.

Si l'on ſuppoſe $CD = x$, l'on aura $ED\,(c) = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{\frac{1}{2}d + x \times \frac{1}{2}d - x} = \sqrt{\frac{1}{4}dd - xx}$, & $AD\,(\frac{1}{2}d + x) = \frac{\overline{ED}^2}{DB}\,(\overline{\frac{1}{2}d - x})$

Si l'on ſuppoſe $EB = m$, $AB = d$, & $DB = x$, l'on aura $DB\,(x).\ EB\,(m) :: EB\,(m).\ AB\,(d)$; d'où l'on déduira $DB\,(x) = \frac{\overline{EB}^2}{AB}\left(\frac{mm}{d}\right)$, & $AB\,(d) = \frac{\overline{EB}^2}{DE}\left(\frac{mm}{x}\right)$. Il faut ſe rendre toutes ces expreſſions familieres.

V.

L'on peut concevoir de tous les points E de la demi- 289.
circonference BEA, en commençant au point B & allant de ſuite de B par E juſqu'à l'extrêmité A, des perpendiculaires comme ED ſur le diametre AB; & ſuppoſant $AB = d$, chaque perpendiculaire $ED = y$, & chaque diſtance BD du point B, juſqu'à la rencontre D de chaque perpendiculaire, égale à x; il eſt évident que chaque $\overline{DE}^2\,(yy)$ ſera égale au rectangle qui lui répond des deux parties du diametre $BD \times DA = dx - xx$; ainſi l'équation $yy = dx - xx$ convient à chacune de ces perpendiculaires DE. Les extrêmitez E de toutes ces perpendiculaires ED ſont dans la circonference; c'eſt-à-dire, la circonference paſſe par tous les points E; ainſi l'équation $yy = dx - xx$ marque le lieu de la circonference par raport au diametre AB;

& en déterminant la valeur de x telle qu'on voudra, pourvû qu'elle ſoit moindre que le diametre AB, on trouvera la valeur de y qui lui répond; & de même en déterminant telle valeur de y qu'on voudra, pourvû qu'elle n'excede pas $\frac{1}{2}d$, on trouvera la valeur de x qui lui répond, par la
176. réſolution des équations du ſecond degré. * Cela eſt cauſe qu'on nomme l'équation $yy = dx - xx$, ou $xx - dx + yy = 0$, *l'équation au cercle*, ou *le lieu du cercle*. Les abciſſes x ſont ſur le diametre BA, & B eſt leur origine; & les DE (y) ſont les ordonnées.

VI.

Suppoſant toujours $AB = d$, $ED = y$, ſi l'on ſuppoſe chaque $CD = x$, l'on aura $\overline{DE}^2$ $(yy) = AD \times DB = \frac{1}{2}\overline{d+x} \times \frac{1}{2}\overline{d-x} = \frac{1}{4}dd - xx$; ainſi $yy = \frac{1}{4}dd - xx$, ou $xx + yy - \frac{1}{4}dd = 0$, eſt auſſi *l'équation du cercle*, ou *le lieu au cercle*. L'origine eſt au centre C; les abciſſes CD (x) ſont ſur le demi diametre CB ou CA, & les ED (y) ſont les ordonnées.

VII.

290. On peut par le moyen du troiſiéme Corollaire, changer l'expreſſion d'un rectangle ab en un quarré cc, ſans en changer la valeur; il n'y a qu'à mener une ligne droite AB égale à la ſomme des lignes AD $(a) + DB$ (b), tracer une demi-circonference dont AB ſoit le diametre, & élever au point D, où elles ſe joignent, la perpendiculaire DE, qu'on nommera c juſqu'à la circonference; & l'on aura $\overline{DE}^2$ $(cc) = AD \times DB$ (ab). D'où l'on voit que ſi l'on avoit $xx = ab$, on trouveroit de la même maniere la valeur de x, car faiſant $AD = a$, & $DB = b$, DE ſera égale à x, étant moyenne proportionelle entre AD (a) & DB (b).

Si l'on avoit $xx = aa - bb$, on trouveroit de même la valeur de x, en faiſant $AD = a + b$, & $DB = a - b$, car DE ſeroit égale à x, puiſque $\overline{DE}^2$ $(xx) = AD \times DB = aa - bb$, & $x = \sqrt{aa - bb}$.

291. On peut encore trouver de cette autre maniere la valeur de x dans l'équation $xx = aa - bb$. Il faut faire $AB = a$, tracer un demi cercle ſur le diametre AB (a); & après avoir ouvert le compas de la grandeur de la ligne AE, qu'on ſuppoſe égale à b, & mis une des pointes ſur l'extrémité A, il faut marquer le point E où l'autre pointe coupe la demi-

la demi-circonference, & tirer EB, ce ſera la valeur de x; car $\overline{EB}^2 (xx) = \overline{AB}^2 (aa) - \overline{AE}^2 (bb)$; & $x = \sqrt{aa - bb}$.

292. Quand on a l'équation $xx = aa + bb$, on trouvera la valeur de x, en faiſant un angle droit AEB des deux lignes AE, EB, dont on ſuppoſe la premiere égale à a, & la ſeconde égale à b; puis tirant l'hypothenuſe AB par les extrêmitez AB, de ces lignes, AB ſera la valeur de x; car $\overline{AB}^2 (xx) = \overline{AE}^2 (aa) + \overline{EB}^2 (bb)$; & $x = \sqrt{aa + bb}$.

VIII.

Réſolution geometrique des équations du ſecond degré.

PREMIERE MANIERE.

293. TOUTES les équations du ſecond degré peuvent ſe réſoudre geometriquement par les Corollaires précedens; c'eſt-à-dire, on peut trouver les deux valeurs en lignes de l'inconnue de ces équations; car toutes ces équations peuvent ſe réduire à cette formule $xx \pm dx \pm ce = 0$; d, c, e, repréſentent des lignes données dans les Problêmes de ces équations. Or il faut réduire le terme connu ce * à un quarré bb, & la formule ſera $xx \pm dx \pm bb = 0$. Il faut faire évanouir le ſecond terme, en ſuppoſant $x = z \mp \frac{1}{2} d$; & l'on aura la transformée $zz = \frac{1}{4} dd \mp bb$; & $z = \pm \sqrt{\frac{1}{4} dd \mp bb}$. On trouvera la valeur de z par le ſeptiéme Corollaire, à laquelle ajoutant la ligne $= \frac{1}{2} d$, quand le ſecond terme a —, & en retranchant $\frac{1}{2} d$, quand le ſecond terme a +; l'on aura la valeur de x. * 290.

SECONDE MANIERE.

294. POUR rendre cette réſolution plus diſtincte, on réduira toutes les équations du ſecond degré à ces quatre formules.

		La premiere racine.	La ſeconde racine.
1re,	$xx - dx - bb = 0.$	$x = \frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd + bb}.$	$x = \frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd + bb}.$
2e,	$xx + dx - bb = 0.$	$x = -\frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd + bb}.$	$x = -\frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd + bb}.$
3e,	$xx - dx + bb = 0.$	$x = \frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd - bb}.$	$x = \frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd - bb}.$
4e,	$xx + dx + bb = 0.$	$x = -\frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd - bb}.$	$x = -\frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd - bb}.$

Pour trouver les valeurs geometriques des deux racines de la premiere & de la ſeconde formule, dont l'une eſt
FIG. II. poſitive, & l'autre négative, 1°. on tirera la ligne CD égale à la moitié de la ligne repréſentée par d dans les Problêmes exprimez par ces deux équations; c'eſt-à-dire, on fera $CD = \frac{1}{2}d$. 2°. On élevera la perpendiculaire $DE = b$. 3°. Du centre C avec l'hypothenuſe CE, on tracera la demi-circonference AEB, & on prolongera CD de côté & d'autre juſqu'à la circonference; & AD ſera la racine poſitive de la premiere formule, & DB ſa racine négative. Et au contraire DB ſera la racine poſitive de la ſeconde formule, & AD ſa racine négative.

Car $+AD = CD\,(+\frac{1}{2}d) + CA$ ou CE, ou $\sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{DE}^2}$ $(\sqrt{\frac{1}{4}dd + bb})$; ainſi $AD = x = \frac{1}{2}d + \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}$; & $DB = -CB$ ou $-CE$, ou $-\sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}\,(-\sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}) + CD$ $(+\frac{1}{2}d)$; ainſi $DB = x = +\frac{1}{2}d - \sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}$; & pour la ſeconde formule, il faut prendre la racine négative du côté de DA, & l'on aura $x = -DA = -DC\,(-\frac{1}{2}d) - CA$ ou $-CE\,(-\sqrt{\frac{1}{4}dd + bb})$; & la poſitive $x = +DB = +CB$ ou $+CE\,(+\sqrt{\frac{1}{4}dd + bb}) - CD\,(-\frac{1}{2}d)$.

Pour trouver les valeurs des deux racines de la troiſiéme & de la quatriéme formule, 1°. Il faut faire le diametre AB de la demi-circonference $AEB = d$; ainſi CA ou CE ou $CB = \frac{1}{2}d$. 2°. Il faut élever BF perpendiculaire ſur AB à l'extrêmité B; & faiſant $BF = b$, mener par F la ligne FE parallele à BA. 3°. Abaiſſer par le point E où elle rencontre la demi-circonference, la perpendiculaire ED au diametre qui le rencontrera en un point D; AD ſera la premiere racine poſitive de la troiſiéme formule; DB ſa ſeconde racine poſitive. De même AD ſera la premiere racine négative de la quatriéme formule, & DB ſa 2ᵉ racine négative

Car $x = AD = AC\,(+\frac{1}{2}d) + CD$ ou $+\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}$ $(+\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb})$; & $x = +DB = +CB\,(+\frac{1}{2}d) - CD$ ou $-\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}\,(-\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb})$. Pour la quatriéme formule, la premiere racine négative eſt $x = -AD = -CA$ $(-\frac{1}{2}d) - CD$ ou $-\sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{ED}^2}\,(-\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb})$; & la ſeconde racine négative $x = -DB = -CB\,(-\frac{1}{2}d)$ $+CD\,(+\sqrt{\frac{1}{4}dd - bb})$.

REMARQUE.

295. QUAND dans la réſolution des deux dernieres formules $BF\,(b)$ ſurpaſſe $CB\,(\frac{1}{2}d)$ la parallele FE au diametre $AB\,(b)$ ne peut pas rencontrer la demi circonference ; & dans ce cas le Problême eſt impoſſible, c'eſt-à dire il renferme contradiction ; ce qui fait voir le parfait raport de l'Analyſe à la Geometrie ; car dans ce cas où b ſurpaſſe $\frac{1}{2}d$, bb ſurpaſſe $\frac{1}{4}dd$; & $\sqrt{\frac{1}{4}dd-bb}$ eſt une grandeur imaginaire ; ainſi dans ce cas les deux racines de la troiſiéme & de la quatriéme formules ſont imaginaires.

Dans le cas où $BF\,(b)=CD\,(\frac{1}{2}d)$, la parallele FE ne rencontre la demi-circonference qu'en ce point E, d'où menant la perpendiculaire $ED\,(b)$, elle tombe au centre C ; alors les deux racines ſont égales, & valent chacune $AC\,(\frac{1}{2}d)$; dans ce cas $\sqrt{\frac{1}{4}dd-bb}=0$; & chaque racine eſt égale à $\frac{1}{2}d$.

EXEMPLE II.

296. $ABDE$ eſt un quadrilatere inſcrit dans un cercle, pour y trouver des triangles ſemblables qui faſſent découvrir les proprietez qui lui conviennent ; il faut tirer les diagonales AD, BE, & la ligne DF qui faſſe au point D l'angle EDF égal à l'angle ADB ; & l'on aura 1°. le triangle ADB ſemblable au triangle EDF ; car l'angle ADB eſt égal par la ſuppoſition à l'angle EDF, & les angles DAB, DEF ſont égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc BD. 2°. Les triangles ADE, BDF ſont auſſi ſemblables, parceque les angles ADE, BDF ſont égaux, contenant chacun les angles BDA, EDF égaux par la ſuppoſition ; & de plus l'angle commun FDA, & les angles DAE, DBF ſont auſſi égaux, ayant chacun pour meſure la moitié de l'arc DE. FIG. III.

Suppoſant à preſent $AE=a$, $AB=b$, $BD=c$, $DE=d$, $AD=e$, $BE=f$, $FE=x$; par conſequent $BF=BE\,(f)-FE\,(x)$. L'on aura à cauſe des triangles ſemblables ADB, EDF, $AD\,(e).\,DE\,(d)::AB\,(b).\,EF\,(x)$; d'où l'on déduira cette premiere égalité $ex=bd$. L'on aura auſſi à cauſe des triangles ſemblables ADE, DBF, $BF\,(f-x).\,AE\,(a)::BD\,(c).\,AD\,(e)$; d'où l'on déduira

cette ſeconde égalité $ef - ex = ac$. Ajoutant ces deux égalitez, on trouve $AD \times BE\,(ef) = AE \times BD\,(ac) + AB \times DE\,(bd)$; c'eſt-à-dire *qu'en tout quadrilatere inſcrit au cercle, le rectangle des diagonales* $AD \times BE\,(ef)$, *eſt égal à la ſomme des rectangles des côtez oppoſez* $AE \times BD + AB \times DE\,(ac+bd)$, qui eſt une proprieté de ce quadrilatere qui ſert dans la trigonometrie.

EXEMPLE III.

FIG. IV. 297. PARTAGER une ligne donnée $AB\,(a)$ en deux parties AC, CB, en ſorte que la partie AC ſoit moyenne proportionelle entre la ligne entiere AB & la partie CB.

Soit la partie inconnue que l'on cherche $AC = x$, ainſi $CB = a - x$; & par les conditions du Problême l'on aura $AB\,(a).\ AC\,(x) :: AC\,(x).\ CB\,(a-x)$; d'où l'on déduira l'équation $aa - ax = xx$, ou $xx + ax - aa = 0$. On trouvera la valeur poſitive de $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + aa}$, ou $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$, en faiſant (fig 2.) $CD = \frac{1}{2}a$, la perpendiculaire $DE = a$; traçant du centre C avec l'hypothenuſe CE priſe pour rayon l'arc BE, & prolongeant CD juſqu'à l'arc en B, car DB ſera $= x = +CB$ ou $+CE\,(+\sqrt{\frac{1}{4}aa + aa}) - CD\,(-\frac{1}{2}a) = AC$ (fig. 4.) que l'on cherchoit.

AVERTISSEMENT.

CES Exemples ſuffiſent pour faire voir l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie ſimple; il ſera plus utile de faire voir l'uſage de l'Analyſe dans les ſciences Phyſico-mathematiques qui ſervent à perfectionner les Arts, & dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes.

SECTION II.

Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe dans les ſciences Phyſico-mathematiques qui ſervent à perfectionner les Arts.

Uſage de l'Analyſe pour réſoudre les Problêmes de l'art de jetter les Bombes.

Principes que l'on ſuppoſe pris des traitez du mouvement.

DÉFINITIONS.

I.

298. ON ſuppoſera la maſſe du mobile $= m$, ſa viteſſe $= v$, la longueur parcourue $= l$, le temps employé à parcourir cette longueur $= t$. Quand il y aura differentes maſſes, viteſſes, longueurs, temps, on marquera les maſſes differentes par des m differentes, & de même les viteſſes, les longueurs & les temps.

II.

299. La quantité du mouvement eſt le produit de la maſſe par la viteſſe, c'eſt-à-dire mu; mais pour ne pas multiplier les difficultez, on ne conſiderera dans la ſuite qu'un même mobile; ainſi la quantité ou la force du mouvement ſera ſa viteſſe.

III.

300. Le mouvement *égal* ou *uniforme* eſt celui dont la viteſſe demeure la même pendant la durée du mouvement. Le mouvement *acceleré* eſt celui qui à chaque inſtant de ſa durée reçoit une nouvelle augmentation de viteſſe; le mouvement *retardé*, celui qui perd à chaque inſtant une partie de la viteſſe qu'il avoit : Le mouvement *uniformement* ou *également acceleré* ou *retardé*, celui qui à chaque inſtant reçoit une égale augmentation ou perd une égale quantité de ſa viteſſe. Comme on ne parlera ici que du mouvement acceleré ou retardé de cette derniere maniere, on le nommera ſimplement mouvement acceleré ou retardé.

SUPPOSITIONS QU'IL FAUT SE RENDRE FAMILIERES.

I.

Pour comparer enſemble les mouvemens uniformes.

301. DANS les mouvemens uniformes la viteſſe eſt égale à la longueur parcourue diviſée par le temps employé à la parcourir, $u = \frac{l}{t}$; par conſequent $t = \frac{l}{u}$, & $l = tu$.

302. Par conſequent quand les mouvemens uniformes ſont differens, $V.\ u :: \frac{L}{T}.\ \frac{l}{t} :: Lt.\ lT$; & $T.\ t :: \frac{L}{V}.\ \frac{l}{u} :: Lu.\ lV :: \frac{L}{l}.\ \frac{V}{u}$; & $L.\ l :: TV.\ tu :: \frac{T}{t}.\ \frac{u}{V}$.

303. Il ſuit de là, 1°. que quand $V = u$; $\frac{L}{T} = \frac{l}{t}$, & $L.\ l :: T.\ t$, ce qu'il faut bien remarquer, & que $Lt = lT$.

304. 2°. Que quand $T = t$; $L.\ l :: V.\ u$, ce qu'il faut bien remarquer, & que $Lu = lV$.

305. 3°. Que quand $L = l$; $V.\ u :: t.\ T$, & que $VT = ut$.

II.

Sur la peſanteur.

306. LA peſanteur, dont on n'examinera point ici la cauſe, fait qu'un corps peſant en deſcendant librement depuis le repos, acquiert à tous les inſtans de la chûte des degrez égaux de viteſſe. L'on n'aura ici nul égard à la reſiſtance de l'air, l'experience faiſant connoître qu'elle n'apporte pas de changement conſiderable à un corps très-peſant comme l'eſt une bombe. C'eſt pourquoi on ſuppoſera que les degrez de viteſſe que le corps peſant acquiert pendant chaque inſtant de ſa chûte, ſe conſervent entiers dans les inſtans ſuivans de la chûte, pendant leſquels le même corps en acquiert toujours de nouveaux. De ſorte que partageant la durée de la chûte en trois temps égaux, dont chacun ſoit $= t$, le premier degré de viteſſe s'acquiert depuis le repos juſqu'à la fin de $1t$, & il eſt tout acquis à la fin de $1t$, & il demeure entier dans les deux temps ſuivans; pendant le ſecond temps le corps peſant acquiert un ſecond degré de viteſſe égal au premier, & ce ſecond degré eſt tout acquis à la fin de $2t$; & le mobile a deux degrez de viteſſe acquiſe à la fin de $2t$. Le troiſiéme degré de viteſſe s'acquiert pendant le troiſiéme temps, & il eſt tout acquis à la fin de $3t$, & alors le corps peſant a trois degrez de viteſſe acquiſe.

III.

Sur les mouvemens accelerez.

307. LEs longueurs parcourues par un même corps qui deſcend librement, priſes chacune depuis le repos, ſont entr'elles comme les quarrez des temps employez à les parcourir; elles ſont auſſi entr'elles comme les quarrez des viteſſes acquiſes à la fin des temps employez à parcourir ces longueurs.

Par exemple un corps peſant tombant librement depuis le repos A, parcourt AB pendant $1t$; AC pendant $2t$; AD pendant $3t$; AE pendant $4t$. La viteſſe acquiſe à la fin de $1t$ eſt u; à la fin de $2t$, elle eſt $2u$; à la fin de $3t$, elle eſt $3u$; à la fin de $4t$, elle eſt $4u$. Fig. V.

$AB.AC :: 1tt.4tt :: 1uu.4uu$. De même $AC.AD :: 4tt.9tt :: 4uu.9uu$. De même $AD.AE :: 9tt.16tt :: 9uu.16uu$. De même $AC.AE :: 4tt.16tt :: 4uu.16uu$, &c.

Ainſi nommant L une longueur parcourue depuis le repos; T, le temps employé à la parcourir; V, la viteſſe acquiſe à la fin de ce temps; & l une autre longueur parcourue depuis le repos; t, le temps employé à la parcourir; u, la viteſſe acquiſe à la fin de ce temps; on aura cette expreſſion generale de la troiſiéme ſuppoſition $L.l :: TT.tt :: VV.uu$.

COROLLAIRE.

308. D'OÙ il ſuit que dans les mouvemens accelerez $V.u :: \sqrt{L}.\sqrt{l} :: T.t$. Par conſequent dans les mouvemens accelerez on peut exprimer les viteſſes par les racines des longueurs parcourues depuis le commencement, ou depuis le repos; on peut auſſi exprimer les temps par les racines des mêmes longueurs; puiſque ces viteſſes ſont entr'elles, & ces temps entr'eux comme les racines de ces longueurs; ainſi $V = \sqrt{L}$; $u = \sqrt{l}$, & de même $T = \sqrt{L}$, $t = \sqrt{l}$.

IV.

Sur les mouvemens retardez.

309. UN corps peſant qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec une viteſſe quelconque toute acquiſe, perd à chaque inſtant de la montée un degré de ſa viteſſe égal à celui qu'il acquiereroit à chaque inſtant en deſcendant, juſqu'à

ce que l'action de la pesanteur lui ait fait perdre au dernier instant de la montée le dernier degré de la viteſſe avec laquelle il avoit été pouſſé en haut ; après quoi il retombe librement par l'action de la pesanteur. Les longueurs que les viteſſes qu'il perd (en partageant en temps égaux la durée de la montée) l'empêchent de parcourir, priſes depuis le commencement, ſont entr'elles comme les quarrez des temps, & auſſi comme les quarrez des viteſſes perdues ; c'eſt-à-dire, nommant $-L$ la longueur priſe depuis le commencement de la montée, qu'empêche de parcourir la viteſſe perdue $-V$ au corps peſant pouſſé en haut, pendant le temps T, eſt à une autre longueur $-l$ priſe auſſi depuis le commencement qu'empêche de parcourir la viteſſe perdue $-u$ pendant un autre temps t, comme TT à tt, & comme VV à uu ; ainſi $-L . -l :: TT . tt :: VV . uu$; & $-\sqrt{L}$, $-\sqrt{l} :: -V . -u :: T . t$.

V.

Pour comparer les mouvemens accelerez & retardez avec les uniformes.

310. UN corps peſant étant deſcendu depuis le repos pendant un temps quelconque T de la longueur L en acquierant la viteſſe V ; ſi dans le même temps T, il eſt mû uniformement ſelon une direction quelconque, ſoit verticale, ſoit horizontale ou inclinée avec la même viteſſe V toute acquiſe, il parcourera une longueur $2L$ double de la premiere L. On peut appliquer la même propoſition au mouvement retardé.

COROLLAIRES.

I.

311. POUR réduire les mouvemens accelerez ou retardez aux uniformes, il faut prendre les viteſſes des mouvemens accelerez toutes acquiſes, & les concevoir comme demeurant uniformes ; & ſi l'on prend les mêmes temps, il faut doubler les longueurs parcourues par la viteſſe qui s'acquieroit dans le mouvement acceleré. Ainſi dans le mouvement acceleré la viteſſe V qui s'acquieroit faiſoit parcourir la longueur L dans le temps T ; pour le réduire à l'uniforme, il faut concevoir que la même viteſſe V toute acquiſe fera parcourir $2L$ dans le même temps T.

Par

II.

312. Par conſequent la même viteſſe V toute acquiſe fera parcourir la même longueur L dans le mouvement uniforme dans la moitié du temps T ; c'eſt-à-dire, dans le temps $\frac{1}{2}T$; elle fera, dis-je, parcourir la même longueur L qu'elle feroit parcourir dans le mouvement acceleré pendant qu'elle s'acquieroit dans le temps entier T. Car puiſque la viteſſe acquiſe V dans le temps T feroit parcourir $2L$ dans le mouvement uniforme ; dans le même mouvement uniforme, elle fera parcourir L moitié de $2L$ dans $\frac{1}{2}T$, qui n'eſt que la moitié du temps T, pendant lequel la même longueur L ſeroit parcourue dans le mouvement acceleré pendant que la viteſſe V s'acquiert.

Il faut s'appliquer à concevoir clairement ce ſecond Corollaire, & ſe le rendre bien familier pour n'être pas embarraſſé dans la ſuite : car c'eſt celui qui n'étant pas bien conçu, feroit de la difficulté au Lecteur.

III.

313. Si un corps peſant en deſcendant librement depuis le repos au point A, & parcourant la longueur $AE(L)$, acquiert la viteſſe V dans le tems T, & qu'il ſoit repouſſé en haut de E vers A avec la même viteſſe toute acquiſe V, il eſt évident que ſa peſanteur lui fera perdre dans un temps égal au premier T ſa viteſſe V, & que cette viteſſe V ſera détruite par l'action de la peſanteur preciſément à la fin du temps T. Fig. V.

IV.

314. Suppoſé qu'un corps étant deſcendu par le mouvement acceleré de ſa peſanteur depuis le repos en A, & ayant parcouru la longueur $AE(L)$ en acquerant la viteſſe V dans le temps T, ſoit repouſſé de E vers A avec la même viteſſe toute acquiſe V, & remonte par un mouvement retardé à cauſe de ſa peſanteur, il remontera preciſément à la même hauteur dans le même temps T qu'il avoit employé à deſcendre, c'eſt-à-dire, il parcourera en remontant preciſément la même hauteur $EA(L)$ dans le même temps T, & il ne ſçauroit remonter plus haut. Car avec la viteſſe V toute acquiſe il remonteroit $2L$ dans le temps T*, ſi elle demeuroit uniforme, & que le mouvement ne fût pas retardé par la peſanteur ; mais la viteſſe V dans le temps T étant entierement détruite par le Corollaire précedent, la viteſſe perdue Fig. V. * 310.

dans le temps T eſt $-V$ égale à la viteſſe poſitive $+V$, & la longueur $-l$ que la viteſſe $-V$ empêche de parcourir en ſe perdant par le mouvement retardé, eſt à la longeur $+L$ que la viteſſe $+V$ feroit parcourir en s'acquierant par le mouvement acceleré, comme le quarré du temps t du mouvement retardé au quarré du temps T du mouvement acceleré; & encore comme le quarré de la viteſſe $-V$ au
* 307. quarré de la viteſſe $+V$.* $-l.+L::tt.TT::VV.VV$; & comme les viteſſes ſont égales, les temps le ſont auſſi; & $-l=+L$: Par conſequent puiſque le corps en remontant avec la viteſſe acquiſe V, parcoureroit $2L$ ou $2EA$ dans le même temps T, ſi le mouvement demeuroit uniforme, il ne parcourera que L ou EA dans le mouvement retardé, puiſqu'il faut ôter $-L$ de $+2L$, c'eſt-à-dire $-EA$ de $+2EA$; & ſa viteſſe V étant entierement détruite par la peſanteur à la fin du temps T, il ne peut pas remonter plus haut que $EA(L)$, d'où il étoit deſcendu.

V.

315. Un corps pouſſé par un mouvement uniforme ſuivant telle direction qu'on voudra avec la viteſſe V qu'il auroit acquiſe
Fig. V. en tombant de la hauteur $AE(L)$ dans le temps T, parcourera $2L$ dans le même temps T, & $4L$ dans $2T$; & dans le mouvement retardé, s'il eût été pouſſé en haut avec la même viteſſe V, il n'auroit remonté pendant le temps T que la hauteur L, & enſuite retombant par la peſanteur dans le ſecond temps T égal au premier, il auroit parcouru la même hauteur L, & ſeroit arrivé au point d'où on l'auroit pouſſé en haut; c'eſt-à-dire qu'avec cette même viteſſe V dans le temps T de la montée L du mouvement retardé, le corps parcourera deux fois L par le mouvement uniforme; & dans le temps de la montée & de la deſcente du mouvement retardé & acceleré, il parcourera quatre fois L par le mouvement uniforme.

SIXIE'ME SUPPOSITION.

Sur les mouvemens compoſés.

316. UN corps A eſt pouſſé en même temps par deux forces,
Fig. VI. l'une ſuivant la direction AB, l'autre ſuivant AD, qui font l'angle quelconque BAD, de maniere que la viteſſe que donne la premiere ſoit à la viteſſe que donne la ſeconde dans

le même temps, comme AB eſt à AD; ſi l'on acheve le parallelogramme BD, & qu'on tire la diagonale AC, cette diagonale AC marquera le chemin que tiendra le mobile, la longueur qu'il parcourera dans le même temps, & la viteſſe qu'il aura reçue des deux forces; c'eſt a-dire AB eſt à AC comme la viteſſe ſuivant AB eſt à la viteſſe ſuivant AC, & de même la viteſſe ſuivant AD eſt à la viteſſe ſuivant AC, comme AD ou ſon égale BC eſt à AC, & il parcoureroit chacune de ces trois lignes en des temps égaux avec la viteſſe reſpective qui leur convient.

COROLLAIRES.

I.

317. QUAND un corps A parcourt l'hypothenuſe AC d'un triangle rectangle ABC d'un mouvement uniforme, ſa viteſſe peut être regardée comme venant de deux forces qui lui donneroient des viteſſes ſuivant les deux côtés qui ſeroient entr'elles comme AB & BC, & qui lui feroient parcourir ſeparément ces côtés dans le même temps qu'il parcourt AC. FIG. VII.

II.

318. Quand un corps A va rencontrer obliquement un plan ou une ligne BC au point C ſuivant AC, en tirant d'un point A pris ſur AC la perpendiculaire AB à BC, & prenant AC pour exprimer la force totale ou la viteſſe totale du mobile A, AB exprimera l'effort de ce mobile contre BC, ou la viteſſe avec laquelle il pouſſe BC. FIG. VII.

PROBLÊME I.

319. LE côté BA (a) du triangle rectangle ABC étant ſuppoſé vertical, ſon côté BC (b) horizontal, & l'hypothenuſe AC (c) inclinée ſur l'horizontale AK: ſuppoſant qu'un mobile ſoit pouſſé de A en B avec la viteſſe qu'il auroit acquiſe par le mouvement acceleré en tombant depuis le repos de la hauteur BA dans le temps T, & parcourre d'un mouvement uniforme AB avec cette viteſſe acquiſe $= \sqrt{AB}$* ($\sqrt{a}$) dans le temps $\frac{1}{2}T$*: Trouver, 1°. de quelle hauteur, qu'on nommera x, il devroit tomber pour acquerir la viteſſe $\sqrt{x}$*, avec laquelle il parcourera d'un mouvement uniforme le côté horizontal BC (b) dans le temps $\frac{1}{2}T$. 2°. De quelle hauteur, FIG. VII. * 308. * 312. * 308.

qu'on nommera y, il devroit tomber pour acquerir la viteſſe
308. $\sqrt{y}$ * avec laquelle il parcourera d'un mouvement uniforme l'hypothenuſe $AC\,(c)$ dans le même temps $\frac{1}{2}T$.

Réſolution. Le temps étant égal, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}T$, 1°. $AB\,(a)$.
304. $BC\,(b) :: \sqrt{AB}\,(\sqrt{a}).\sqrt{x}$.* Donc $a\sqrt{x} = b\sqrt{a}$, & $\sqrt{x} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$, & $x = \frac{bb}{a} = \frac{BC \times BC}{AB}$. *Ce qu'il falloit premierement trouver.*
304. 2°. $AB\,(a).\,AC\,(c) :: \sqrt{AB}\,(\sqrt{a}).\,\sqrt{y}$*. Donc $a\sqrt{y} = c\sqrt{a}$, & $\sqrt{y} = \frac{c\sqrt{a}}{a}$ & $y = \frac{cc}{a} = \frac{AC \times AC}{AB}$. *Ce qu'il falloit ſecondement trouver.*

FIG. VII. *Réſolution geometrique.* Il faut mener par le point C, CH perpendiculaire à AC, & le point H où elle rencontrera
288. AB prolongée, déterminera, 1°. $BH = * \frac{BC \times BC}{AB} = \frac{bb}{a} = x$.
288. 2°. HA* $= \frac{AC \times AC}{AB} = \frac{cc}{a} = y$.

COROLLAIRE.

320. SI l'on tire dans un demi cercle $ACEGH$, dont le diame-
FIG. VIII. tre HA eſt vertical, de tous les points C, E, G de la demi-circonference des perpendiculaires CB, ED, GF &c. au diametre HA, & les cordes CA, CH; EA, EH; GA, GH, &c. de chacun de ces points aux extrêmitez du diametre, on aura autant de triangles rectangles qu'il y a de points dans la demi-circonference; & ce que l'on a dit du triangle rectangle ABC, convient à chacun de ces triangles.

Ainſi nommant d le diametre HA; x, chacun des côtez verticaux AB, AD, AF, &c. de tous les triangles le reſte du diametre HB, HD, HF, &c. ſera $= d - x$; chacune
288. des hypothenuſes AC, AE, AG, &c. ſera $= \sqrt{dx}$*; chacun
287. des côtez horizontaux BC, DE, FG, &c. ſera $= \sqrt{dx - xx}$.* La viteſſe acquiſe par le mouvement acceleré dans le temps T pour faire parcourir chaque côté vertical x d'un mouvement
312. uniforme dans le temps $\frac{1}{2}T$, ſera $\sqrt{x}$*; $\sqrt{d - x}$ ſera la viteſſe pour faire parcourir chaque côté horizontal $\sqrt{dx - xx}$ dans le même temps $\frac{1}{2}T$; & $\sqrt{d}$ ſera la viteſſe pour faire parcourir dans le même temps $\frac{1}{2}T$ chaque hypothenuſe $\sqrt{dx}$.

Application de ces principes à l'art de jetter les Bombes.

DEMANDE.

321. SI une Bombe étoit jettée verticalement par un mortier
FIG. VIII. ſuivant la ligne verticale ABH avec quelle force de poudre

on voudra, il eſt évident que quand la bombe ſeroit montée au point le plus haut où l'action de ſa peſanteur lui auroit entierement fait perdre la viteſſe de ſon impulſion, que l'on ſuppoſe être le point H; elle retomberoit de cette même hauteur HA, & elle auroit acquis par ſa peſanteur en arrivant au point A d'où elle étoit partie preciſément la même viteſſe avec laquelle elle avoit été pouſſée par la force de la poudre qui l'avoit fait monter de A en H.

DÉFINITION.

322. ON prendra *pour la meſure de la force de la poudre* ou de la viteſſe qu'elle donne à une bombe ſuivant quelque direction AC, AE, AG, &c. que ce puiſſe être, la hauteur HA d'où il faudroit que la bombe tombât librement depuis le repos pour acquerir par cette chûte une viteſſe égale à celle avec laquelle elle eſt pouſſée par la force de la poudre. On l'appelle auſſi *la force du jet.* FIG. VIII.

COROLLAIRE.

323. EN prenant le diametre HA (qu'on ſuppoſe vertical) du demi cercle $HGECA$ pour repréſenter une force quelconque de poudre, toutes les cordes AC, AE, AG, &c. menées à tous les points de la demi-circonference, repréſenteront toutes les inclinaiſons qu'on peut donner au mortier ſur l'horizontale AK, & par conſéquent les directions de tous les jets obliques qu'on peut faire par cette force de poudre. Nommant d la hauteur HA; x, le côté vertical AB, AD, AF, &c. des triangles rectangles ABC, ADE, &c. qui ont pour hypothenuſes les jets obliques AC, AE, AG, &c. faits par une même force de poudre HA; les reſtes du diametre BH, DH, FH, &c. ſeront exprimés par $d - x$, les côtés horizontaux des triangles comme BC, DE, FG, &c. par $\sqrt{dx - xx}$; & les cordes AC, AE, AG, &c. par $\sqrt{dx}$. FIG. VIII.

La viteſſe que la force de la poudre donne par chacune des cordes AC, AE, &c. eſt $\sqrt{HA}$ ($\sqrt{d}$) qui demeure uniforme ſuivant la direction de la corde pendant tout le jet. Et comme cette viteſſe uniforme eſt ſuivant l'hypothenuſe $\sqrt{dx}$ d'un triangle rectangle,* elle peut être regardée comme venant de deux forces qui imprimeroient à la bombe l'une une viteſſe uniforme ſuivant le côté vertical du triangle qui * 317.

eſt repréſenté par x, & l'autre une viteſſe auſſi uniforme ſuivant le côté horizontal $\sqrt{dx - xx}$; & ces deux viteſſes, pour faire parcourir chacune leur côté dans le même temps, doivent être l'une à l'autre comme ces côtés, c'eſt-à-dire, comme x eſt à $\sqrt{dx - xx}$. Afin que ces deux viteſſes ayent entr'elles ce raport des côtés, la viteſſe uniforme par le côté vertical x, doit être égale à celle que la bombe auroit acquiſe
319. en deſcendant depuis le repos de la hauteur x, ainſi la viteſſe uniforme par le côté x eſt égale à $\sqrt{x}$; & demeurant uniforme par ce côté x, elle doit le faire parcourir dans la moitié du temps T que la bombe employeroit à tomber de la hauteur x; & la viteſſe uniforme par le côté horizontal $\sqrt{dx - xx}$, doit être égale à celle que la bombe auroit acquiſe en tombant depuis le repos de la hauteur du reſte du diametre
319 $d - x$: ainſi la viteſſe uniforme qui fera parcourir le côté horizontal, ſera exprimée par $\sqrt{d - x}$.

La viteſſe $\sqrt{d}$ fera donc parcourir la corde $\sqrt{dx}$, dans le même temps que la viteſſe $\sqrt{x}$ fera parcourir le côté vertical x, & que la viteſſe $\sqrt{d - x}$ fera parcourir le côté horizontal $\sqrt{dx - xx}$, en les ſuppoſant toutes trois uniformes, & que le temps pendant lequel elles font chacune parcourir les trois lignes qui leur conviennent, eſt la moitié du temps que la bombe employeroit à deſcendre depuis le repos de la hauteur du côté vertical x. Par conſequent dans ce temps entier ces trois viteſſes feront parcourir par un mouvement
310. uniforme le double des lignes du triangle rectangle, & en deux fois ce temps entier, le quadruple de ces mêmes lignes; c'eſt-à-dire dans le temps de la chûte accelerée, ou de la montée retardée par x, elles feront parcourir par un mouvement uniforme le double de ces trois lignes; & dans le temps de la montée & de la chûte, le quadruple de ces mêmes lignes. On doit ſe rendre ces choſes familieres pour entendre facilement les Problêmes ſuivans.

PROBLÈME II.

324. LA force de la poudre HA étant donnée, par exemple,
FIG. VIII. de 400 toiſes, trouver pour telle inclinaiſon qu'on voudra donner au mortier qu'on ſuppoſe au point A. 1°. La diſtance AO ſur l'horizontale AK qui eſt depuis le mortier A juſqu'au

point O qui eſt dans la verticale OMN où la bombe eſt pendant le jet au point le plus élevé. 2°. Trouver la diſtance horizontale AK depuis le point A juſqu'au point K où la bombe retombera ſur l'horizontale AK.

Pour réſoudre ce Problême, je remarque. 1°. Que la force du jet étant donnée, HA (d) eſt connue ; & concevant HA diviſée en 400 parties égales, elle repréſentera la force du jet. Prenant une inclinaiſon du mortier déterminée comme l'angle CAK que fait le mortier avec l'horizon AK, la poſition de la corde AC eſt donnée, & par conſéquent le point C où elle rencontre la demi-circonference ; ainſi le côté vertical AB (b), l'horizontal BC ($\sqrt{db-bb}$,) l'hypothenuſe AC ($\sqrt{db}$) du triangle rectangle ACB, ſont donnés. 2°. Que la viteſſe par l'oblique AC eſt $\sqrt{HA}$ ($\sqrt{d}$), qui demeure uniforme pendant le jet ; que la viteſſe par l'horizontale BC ou $\sqrt{db-bb}$, eſt $\sqrt{HA-BA}$ ($\sqrt{d-b}$) ; & que la viteſſe par la verticale AB ou b, eſt $\sqrt{AB}$ ($\sqrt{b}$). 3°. Que la moitié $\frac{1}{2}T$ du temps T que la bombe employeroit à deſcendre AB par le mouvement acceleré, ou à monter AB dans le mouvement retardé, cette moitié, dis-je, $\frac{1}{2}T$ eſt le temps pendant lequel dans le mouvement uniforme ces trois lignes du triangle rectangle ABC ſont parcourues par les viteſſes qui leur conviennent ; ainſi dans le temps entier T de la montée de la bombe à l'endroit le plus haut du jet, les mêmes viteſſes feront parcourir le double de ces trois lignes par le mouvement uniforme ; & dans le temps $2T$ de la montée & de la deſcente de la bombe au point K de l'horizontale, elles feront parcourir le quadruple de ces trois lignes.

Réſolution. Soit la diſtance inconnue $AO = z$, & la diſtance inconnue $AK = s$; l'on aura, 1°. la longueur horizontale inconnue AO (z) eſt à la verticale $2BA$ ($2b$), toutes deux parcourues par un mouvement uniforme dans le temps entier T, qui eſt celui où la bombe doit monter au point le plus élevé du jet ; comme la viteſſe par l'horizontale qui eſt $\sqrt{d-b}$, eſt à la viteſſe par la verticale qui eſt $\sqrt{b}$. L'on aura donc $z\sqrt{b} = 2b\sqrt{d-b}$; par conſequent AO (z) $= 2\sqrt{db-bb}$ $=^{*}$ $2BC$. L'on aura, 2°. la diſtance horizontale inconnue AK (s) eſt à la verticale $4AB$ ($4b$) parcourues l'une & l'autre *288.

d'un mouvement uniforme pendant $2T$ qu'il faut à la bombe pour monter & enſuite retomber au point K; comme la viteſſe par la premiere qui eſt $\sqrt{d-b}$, eſt à la viteſſe par la ſeconde qui eſt $\sqrt{b}$. Donc $s\sqrt{b} = 4b\sqrt{d-b}$, & $s = 4\sqrt{db-bb}$

*288. $= {}^{*}4BC$.

En marquant AB par une indéterminée x, on aura $AO\,(z) = 2\sqrt{dx-xx}$; & $AK\,(s) = 4\sqrt{dx-xx}$.

COROLLAIRES.

I.

325. D'Où l'on voit que la diſtance horizontale AK depuis le mortier A juſqu'au point K où tombe la bombe de chaque jet (ce qu'on nomme *l'étendue du jet*) eſt toujours quadruple du côté horizontal BC, ou DE, ou FG, &c. du triangle rectangle qui répond à ce jet; & que la diſtance AO ſur la même horizontale juſqu'à la verticale qui paſſe par le point le plus haut de chaque jet, eſt double de ce même côté horizontal.

II.

326. Par conſéquent dans le demi cercle $HGECA$, le diametre HA étant pris pour une force de poudre quelconque, toutes les perpendiculaires CB, ED, GF, &c. menées des cordes AC, AE, AG, &c. qui marquent toutes les directions du mortier : ces perpendiculaires, dis-je, ſeront chacune le quart de l'étendue du jet qui lui convient par raport à cette même force de poudre, & elles ſeront la moitié de la diſtance horizontale qui eſt depuis le mortier juſqu'à la verticale qui paſſe par le point le plus haut du jet.

FIG. VIII.

III.

327. Comme le demi diametre DE eſt plus grand qu'aucune des perpendiculaires BC, FG, &c. & que DE convient au jet ſuivant la corde AE qui fait l'angle d'inclinaiſon EAK de 45 degrés; de tous les jets qui ſe peuvent faire par la même force de poudre, celui qui ſe fait, le mortier étant incliné de 45 degrés ſur l'horizon, a la plus grande étendue, c'eſt-à-dire, a la plus grande portée : & cette étendue étant quadruple du demi diametre, eſt double du diametre, c'eſt-à-dire, la force HA du jet eſt la moitié de l'étendue du jet de 45 degrés.

Et

Et comme les perpendiculaires FG, BC, qu'on ſuppoſe également éloignées du centre D, ſont égales ; tous les jets poſſibles qu'on peut faire avec la même force de poudre, ont deux à deux une égale étendue, l'un au-deſſous de 45 degrés, & l'autre autant au-deſſus de 45 degrés que le premier eſt au-deſſous. Il n'y a que le jet de 45 degrés qui a la plus grande étendue, qui ſoit unique.

PROBLÈME III.

328. UN mortier ou un canon étant pointé de but en blanc, FIG. VIII. c'eſt-à-dire dans une direction BC horizontale au-deſſus d'une tour dont la hauteur repréſentée par AB (b) ſoit connue par exemple de 10 toiſes au-deſſus d'une plaine horizontale repréſentée par AO ; ſuppoſé qu'on tire une bombe ou un boulet avec une force donnée de poudre repréſentée par HA (d) ; trouver la diſtance horizontale AO (z) où tombera la bombe ou le boulet ſur l'horizon.

La viteſſe du jet, c'eſt-à-dire la viteſſe de la bombe par l'horizontale BC ($\sqrt{db - bb}$), eſt ici $\sqrt{d}$*; la viteſſe verticale * 326. qu'acquierera la bombe par ſa peſanteur en tombant pendant le jet de la hauteur AB (b), eſt $\sqrt{b}$; & cette viteſſe lui feroit parcourir dans le temps T par le mouvement uniforme $2AB$ ($2b$). On aura donc, la viteſſe du jet $\sqrt{d}$ eſt à la viteſſe verticale $\sqrt{b}$ acquiſe par la deſcente de la bombe de la hauteur BA dans le temps T ; comme la longueur horizontale parcourue par le mouvement uniforme avec la viteſſe $\sqrt{d}$, laquelle longueur eſt AO (z), eſt à $2AB$ ($2b$) qui eſt la hauteur verticale que la viteſſe $\sqrt{b}$ lui feroit parcourir par le mouvement uniforme ; ce qui donnera $z\sqrt{b} = 2b\sqrt{d}$, & $z = 2\sqrt{db} = 2\sqrt{HA \times BA} = 2AC$*. *Ce qu'il falloit trouver.* * 283.

Les Problêmes ſuivans contiennent la pratique de l'art de jetter les bombes.

PROBLÈME IV.

329. *TROUVER par un ſeul jet de bombe à telle inclinaiſon du mortier qu'on voudra, la force du jet, & par conſequent l'étendue ou la portée de tous les jets poſſibles par cette même charge de poudre.*

I. CAS. *Quand on eſt dans une plaine.*

FIG. VII. IL faut donner au mortier l'inclinaiſon CAK qu'on voudra, & lui donner auſſi la charge quelconque de poudre dont on voudra trouver la force, & la remarquer ; & après avoir jetté une bombe, remarquer le point K ſur l'horizontale AK où elle ſera tombée, & meſurer la diſtance horizontale AK, qu'on ſuppoſe, par exemple, de 1000 toiſes ; le quart de la portée AK, qui eſt dans l'exemple 250 toiſes, ſera le côté horizontal BC d'un triangle rectangle ABC qui convient à ce jet : Ainſi l'on connoît dans ce triangle rectangle ABC, le côté horizontal BC de 250 toiſes ou parties égales, l'angle ACB égal à l'angle d'inclinaiſon du mortier qu'on a choiſi, & l'angle droit ABC ; le côté vertical BA & l'hypothenuſe AC ſeront donc connus par la trigonometrie, ou en faiſant un triangle rectangle ſemblable ; & cela ſuppoſé,

La figure ſeule fait voir qu'il n'y a qu'à faire $AB.AC::$ *322. $AC.AH$, & AH ſera la force du jet*. Mais pour faire voir l'uſage de l'Analyſe, voici la réſolution analytique.

Soit z la force du jet que l'on cherche, $AB=b$, $BC=c$, $AC=e$.

320. La viteſſe par $AC(e)$ eſt $\sqrt{z}$; la viteſſe par $AB(b)$ eſt $\sqrt{b}$.

*304. L'on aura donc, $*\sqrt{z}.\sqrt{b}::AC(e).AB(b)$; par conſequent $b\sqrt{z}=e\sqrt{b}$, & $z=\frac{ee}{b}=\frac{\overline{AC}^2}{BA}=AH$; ainſi mettant le nombre des toiſes qui ſont les valeurs de b & de e, à leur place, on aura le nombre des toiſes de HA qui eſt la force du jet que l'on cherchoit. Et tirant par C la perpendiculaire CH à AC juſqu'à la rencontre H de BA prolongée, HA ſera la ligne qu'on cherchoit qui exprime la force du jet.

FIG. VIII. Faiſant HA le diametre d'un demi-cercle, & menant à tous les degrés les cordes AC, AE, AG, &c. & tirant les perpendiculaires horizontales CB, ED, GF, &c. les cordes marqueront les directions de tous les jets poſſibles par cette force ; les horizontales marqueront le quart de l'étendue de ces jets ; & le diametre HA ſera la moitié de l'étendue du jet de 45 degrés. *Ce qu'il falloit trouver.*

II. CAS. *Quand on eſt ſur un terrain inégal, & que la bombe tombe ſur une hauteur ou dans un lieu plus bas que le mortier.*

FIG. IX. LE mortier ſoit en A, l'horizontale qui paſſe par A eſt

ARK; on donnera au mortier telle inclinaiſon CAK qu'on voudra, mais quand on l'aura choiſie, elle eſt déterminée & connue; on donnera auſſi au mortier la charge quelconque de poudre dont on voudra trouver la force, il faudra la remarquer; il faudra enſuite jetter une bombe avec cette charge; & ſuppoſé qu'elle tombe ſur le lieu Q plus élevé que le mortier, ou au lieu q plus bas que le mortier en A, il faudra meſurer la diſtance AQ ou Aq, l'angle QAR ou qAR, ce qui donnera l'angle PAQ ou PAq; il faudra trouver par la Geometrie pratique la verticale QR ou qR, l'horizontale AR & PR; ce qui donnera auſſi PQ ou Pq. Ces choſes ſuppoſées, on trouvera ainſi l'étendue du jet qu'on ſuppoſe être AK ou Ak, après avoir tiré la verticale KS ou ks juſqu'à la rencontre de AC prolongée.

Soient les connues $AR = r$, QR ou $qR = q$, $PR = p$, $PQ = p - q$, ou $Pq = p + q$; l'inconnue AK ou $Ak = z$; on aura, à cauſe des triangles ſemblables, ARP, AKS, ou Aks; $AR\ (r).\ PR\ (p) ::\ AK$ ou $Ak\ (z).\ KS$ ou $ks = \frac{pz}{r}$.

La viteſſe de la bombe, ſuivant la direction inclinée $ACPS$, eſt uniforme, comme auſſi la viteſſe ſuivant l'horizontale ARK, ainſi cette viteſſe horizontale demeurant la même, les temps employés à parcourir AR, AK ou Ak, ſont comme ces longueurs $AR\ (r)$ & AK ou $Ak\ (z)$, & on les peut prendre pour marquer ces temps; mais dans le temps que la bombe auroit parcouru $AR\ (r)$, la viteſſe qu'elle a perdue par ſa peſanteur ſuivant la direction verticale, l'a empêchée de parcourir PQ ou $Pq\ (p \mp q)$, puiſqu'on ſuppoſe qu'elle eſt tombée en Q ou en q; & dans le temps qu'elle auroit parcouru l'étendue AK ou $Ak\ (z)$, la viteſſe perdue l'auroit empêchée de parcourir la verticale SK ou $sk\ (\frac{pz}{r})$, ce qui donne

* $PQ\ (p - q)$ ou $Pq\ (p + q).\ SK$ ou $sk\ (\frac{pz}{r}) ::\ \overline{AR}^2\ (rr).$ * 309.

$\overline{AK}^2$ ou $\overline{Ak}^2\ (zz)$; d'où l'on déduira AK ou $Ak\ (z) = \frac{pr}{p \mp q}$; c'eſt-à-dire PQ ou $Pq\ (p \mp q).\ PR\ (p) ::\ AR\ (r).\ AK$ ou $Ak = z = \frac{pr}{p \mp q}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

L'étendue AK du jet étant connue, on trouvera la force HA du jet, & l'étendue de tous les jets poſſibles par cette force de poudre, comme dans le premier cas.

III. CAS. *Quand on eſt ſur une hauteur comme une tour ou un baſtion, qu'il y a une plaine au pied, & qu'on donne une direction horizontale au mortier.*

FIG. VIII. ON donnera au mortier qu'on ſuppoſe en B ſur la hauteur AB, dont la direction eſt ſuivant l'horizontale BC, la charge de poudre dont on voudra trouver la force, & il faudra la remarquer, comme auſſi le point O où l'on ſuppoſe que tombera la bombe ſur l'horizontale AO; & meſurer la hauteur AB, qu'on nommera b, & l'horizontale AO, qu'on nommera a.

Pour trouver la force du jet HA, qu'on nommera x, on fera ce raiſonnement : La viteſſe acquiſe par la chûte de HA (x) qui eſt $\sqrt{x}$, eſt à la viteſſe acquiſe par la chûte de AB (b) qui eſt $\sqrt{b}$; comme la longueur horizontale AO (a) parcourue par la premiere d'un mouvement uniforme, eſt à deux fois la hauteur BA ou $2BA$ ($2b$) que la ſeconde auroit fait parcourir à la bombe d'un mouvement uniforme dans le temps qu'elle eſt deſcendue par ſa peſanteur d'un mouvement acceleré de la hauteur AB ou NO; d'où l'on déduira $2b\sqrt{x} = a\sqrt{b}$, & $x = \frac{aa}{4b}$; ce qui donne, $BA\ (b).\ \frac{1}{2}AO\ (\frac{1}{2}a) :: \frac{1}{2}AO\ (\frac{1}{2}a).\ AH = x = \frac{aa}{4b}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

La force du jet étant découverte, on trouvera, comme dans le premier cas, l'étendue de tous les jets poſſibles par cette force.

REMARQUE.

ON peut par ce quatriéme Problême trouver la force de toutes les charges de poudre, la plus grande étendue de chacune de ces forces, qui eſt double de la force, & les étendues de tous les jets poſſibles par chacune de ces forces, & en faire une table.

PROBLÊME V.

330. *FAIRE tomber une bombe ſur l'endroit qu'on voudra, avec une charge de poudre telle qu'on voudra choiſir, dont la force eſt ſuppoſée connue par le quatriéme Problême; pourvû que cet endroit ne ſoit pas hors de la portée de la force de la poudre dont on veut ſe ſervir, ce que la réſolution analytique fera même connoître.*

I. CAS. *Quand l'endroit où l'on veut faire tomber la bombe eſt ſur le plan horizontal qui paſſe par le mortier, c'eſt-à-dire dans une plaine.*

LA queſtion ſe réduit à trouver l'inclinaiſon CAK qu'il faut donner au mortier, afin qu'avec la force qu'on a choiſie, qu'on ſuppoſe repréſentée par HA, la bombe ſoit jettée à l'endroit K de l'horizontale AK qui paſſe par le mortier qu'on ſuppoſe en A; on ſuppoſe auſſi cette diſtance horizontale AK connue par la Geometrie pratique. Pour trouver l'inclinaiſon CAK, il eſt évident qu'il ſuffit de trouver le côté vertical BA du triangle BAC. FIG. VIII.

Soit la force connue du jet $HA = d$, la diſtance horizontale auſſi connue $AK = b$; par conſequent le côté horizontal $BC = {}^{*}\frac{1}{4} AK = \frac{1}{4} b$. Soit le côté vertical que l'on cherche $BA = x$, d'où l'on aura $HB = d - x$. * 325.

Réſolution. La viteſſe par l'horizontale AK (b), qui eſt $\sqrt{d-x}$ *, fera parcourir cette horizontale AK (b) par un mouvement uniforme dans le temps que la bombe montera à la plus grande hauteur du jet qui eſt égale à AB (x), & deſcendra de la même hauteur juſqu'à l'horizontale à l'endroit K, c'eſt-à-dire, dans le temps que la viteſſe par la verticale AB (x) qui eſt $\sqrt{x}$ *, lui feroit parcourir d'un mouvement uniforme $4AB$ $(4x)$; par conſequent $\sqrt{d-x} . \sqrt{x} :: AK (b) . 4AB (4x)$; d'où l'on déduira $xx - dx + \frac{1}{16} bb = 0$. Les deux valeurs de x dans cette équation ſont poſitives; la premiere eſt * $x = \frac{1}{2} d + \sqrt{\frac{1}{4} dd - \frac{1}{16} bb}$; la ſeconde, $x = \frac{1}{2} d - \sqrt{\frac{1}{4} dd - \frac{1}{16} bb}$; ce qui fait voir qu'il y a deux inclinaiſons du mortier par leſquelles on feroit tomber la bombe au même endroit K de l'horizontale AK, & on les trouvera en mettant dans ces valeurs de x à la place de d & de b, les nombres de toiſes qui leur ſont égaux; car HA & BA étant connues, le triangle rectangle ABC eſt connu, & la poſition de la corde AC qui eſt la direction du mortier. * 320. * 320. * 76. FIG. VIII.

REMARQUES.

I.

ON trouveroit la même réſolution par la ſeule proprieté de la 8e figure; car $HB (d-x) . BC (\frac{1}{4} b) :: BC (\frac{1}{4} b) . BA (x)$; d'où l'on déduit la même équation $xx - dx + \frac{1}{16} bb = 0$.

II.

Quand $d = \frac{1}{2}h$, c'eſt-à-dire quand la force du jet HA (d) eſt égale à la moitié de l'étendue AK (h), les valeurs de BA (x) ſont la ſeule grandeur $\frac{1}{2}d$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}HA$, ce qui convient à l'inclinaiſon de 45 degrés.

III.

Il eſt évident que le Problême eſt poſſible dans tous les cas où $\frac{1}{4}h$ eſt moindre que $\frac{1}{2}d$, ou eſt égale à $\frac{1}{2}d$; ou, ce qui eſt la même choſe, quand $\frac{1}{2}h$ eſt moindre que d ou égale à d; & qu'il eſt impoſſible dans tous les cas où $\frac{1}{2}h$ ſurpaſſe d, c'eſt-à-dire, quand le point K eſt hors de la plus grande portée
327. ou de la plus grande étendue du jet qui eſt égale à $2d$.

SECOND CAS DU CINQUIÈME PROBLÊME.

Quand l'endroit ſur lequel on veut jetter la bombe eſt plus élevé ou plus bas que l'horizontale qui paſſe par le mortier, comme quand on veut la jetter ſur le flanc d'un baſtion, ſur une tour, ſur quelqu'endroit d'un fort qui eſt ſur une montagne, ou quand le mortier eſt lui-même ſur une montagne.

FIG. IX. LA queſtion ſe réduit comme au premier cas, à trouver le côté vertical AB du triangle rectangle ABC, qui fera connoître la direction de la corde AC qu'il faut donner au mortier pour faire tomber la bombe, avec la force de poudre HA qu'on ſuppoſe connue, ſur l'endroit Q, qu'on ſuppoſe élevé ſur l'horizontale ARK qui paſſe par le mortier A, ou ſur l'endroit q plus bas que le mortier.

Pour trouver BA, il faut meſurer l'angle QAR ou qAR, & trouver par la Geometrie pratique l'oblique AQ, la verticale QR ou qR, & l'horizontale AR; & ſuppoſant $HA = d$, AQ ou $Aq = a$, $AR = r$, QR ou $qR = q$,
288. & l'inconnue AB qu'on cherche $= x$; l'on aura $BC =$ $\sqrt{dx - xx}$; l'étendue du jet AK ou Ak, qui eſt quadruple
*325. * de $BC = 4\sqrt{dx - xx}$; la verticale KS ou $ks = 4BA = 4x$; & à cauſe des triangles ſemblables KAS, PAR, on aura

$$AK\,(4\sqrt{dx - xx}).\ KS\,(4x) :: AR\,(r).\ PR = \frac{rr}{\sqrt{dx - xx}};$$

d'où l'on déduira $PQ = PR - QR = \frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$, & $Pq = \frac{rx + q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$. On ſe contentera de donner la réſo-

lution du Problême par raport à PQ; le Lecteur pouvant facilement l'appliquer à Pq.

Résolution. La bombe qu'on suppose jettée suivant la direction $ACPS$, rencontre la hauteur Q dans le temps que par le mouvement horizontal uniforme, elle auroit parcouru AR; & s'il n'y avoit pas eu de hauteur Q, elle seroit tombée au point K sur l'horizontale AK, dans le temps que par le mouvement uniforme, elle auroit parcouru l'horizontale AK; ainsi la viteſſe étant uniforme, c'eſt-à-dire la même par l'horizontale ARK, les temps par AR & par AK*, peuvent s'exprimer par ces longueurs. Mais dans le temps du mouvement uniforme par AR, la viteſſe verticale que la peſanteur a fait perdre à la bombe, l'a empêchée de parcourir PQ; & dans le temps du mouvement uniforme par AK, la viteſſe verticale que la peſanteur lui auroit fait perdre, l'auroit empêchée de parcourir SK; par conſequent* $\overline{AR}^2 \cdot (rr) \cdot \overline{AK}^2 \cdot (16 \times dx - xx) :: PQ \left(\frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}} \right) \cdot KS\,(4x)$; ce qui donne cette équation $4rrx = 16 \times dx - xx \times \frac{rx - q\sqrt{dx - xx}}{\sqrt{dx - xx}}$, qui ſe réduit à $xx - \frac{drr - 2dqq - \frac{1}{2}rrq}{rr + qq} \times x + \frac{\overline{\frac{rr}{4} + dq}^2}{rr + qq} = 0$.

* 303.

* 309.

Cette équation a deux racines poſitives *, ainſi il y a deux valeurs de $BA\,(x)$ qui donnent deux angles d'inclinaiſon pour le mortier, par chacune deſquelles on lui fera jetter la bombe ſur l'endroit Q; ces deux valeurs ſont $AB\,(x) = \frac{drr + 2dqq + \frac{1}{2}rrq}{2 \times rr + qq} \pm \sqrt{\frac{\overline{drr + 2dqq + \frac{1}{2}rrq}^2}{\overline{2 \times rr + qq}^2} - \frac{\overline{\frac{rr}{4} + dq}^2}{rr + qq}}$.

* 29. Cor. 8.

Mais à cauſe du triangle rectangle AQR, $\overline{AQ}^2\,(aa) = \overline{AR}^2\,(rr) + \overline{QR}^2\,(qq)$; ainſi mettant aux dénominateurs aa à la place de $rr + qq$, & aux numerateurs $aa - qq$ à la place de rr, les deux valeurs de AB ſeront $AB\,(x) = \frac{1}{2}d + \frac{1}{4}q + \sqrt{\overline{d - \frac{1}{2}q}^2} \times \frac{qq}{2aa} \pm \sqrt{\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}q + \sqrt{\overline{d - \frac{1}{2}q}^2} \times \frac{qq}{2aa} - \frac{1}{4}a - q + 4d} \times \frac{q}{4a}$.

Par exemple, ſuppoſé que la force de la poudre $HA\,(d)$ ſoit de 300 toiſes; l'éloignement $AQ\,(a)$ de 320 toiſes; la hauteur $QR\,(q)$ de 83 toiſes; en ſubſtituant ces valeurs de d,

a, q, à leur place dans les valeurs de AB (x), on trouvera que la plus petite eſt de 85 toiſes, & la plus grande de 273 toiſes. Ainſi partageant le diametre HA du demi cercle en 300 parties égales, prenant, 1°. AB de 85 parties, & tirant la perpendiculaire BC, la corde AC ſera la premiere direction qu'il faut donner au mortier pour faire tomber la bombe en Q. 2° Prenant AF de 273 parties, & tirant la perpendiculaire FG, la corde AG ſera la ſeconde direction qu'il faut donner au mortier pour le même effet.

REMARQUES.

I.

LE Problême eſt toujours poſſible quand la quantité négative qui eſt dans les deux valeurs de x ſous le ſigne $\surd$, eſt moindre que la poſitive qui eſt ſous le même ſigne $\surd$, ou quand
* 78. elle lui eſt égale; & il eſt impoſſible * quand elle eſt plus grande.

II.

Si l'angle d'inclinaiſon du mortier CAK étoit donné, & qu'on voulût trouver la charge de poudre, c'eſt-à dire, la force du jet propre à faire tomber la bombe à l'endroit Q,
FIG. IX. dans cette ſuppoſition l'angle PAR eſt connu, & l'on trouvera par la Geometrie pratique les lignes AQ (a), AR (r), QR (q), PR, qu'on nommera p; nommant auſſi l'étendue inconnue du jet AK (z), on trouvera par le ſecond cas du quatriéme Problême l'étendue AK (z), BC ($\frac{1}{4}AK = \frac{1}{4}z$); enſuite on trouvera la force du jet HA (d) que l'on cherchoit, comme dans le quatriéme Problême.

Uſage de l'Analyſe pour trouver le centre de peſanteur des corps peſans.

Principes que l'on ſuppoſe pris des traités de Méchanique.

PREMIERE DE'FINITION.

331. UN *levier* eſt une ligne droite comme AB, qu'on ſuppoſe
FIG. IV. infléxible & que l'on conſidere, pour l'exactitude des démonſtrations, comme n'ayant aucune peſanteur. On y diſtingue trois choſes, 1°. Un de ſes points, ſoit à l'une ou l'autre de ſes extrêmités A ou B; ou entre les extrêmités comme C,

ſur

ſur lequel il eſt appuyé, ou par lequel il eſt ſuſpendu ; & on appelle ce point *l'appui* ; 2°. Un poids attaché à un point de ce levier comme en A ou B, ou C, &c. ou quelqu'autre force qui tire ce levier par ce point ; 3°. Une autre force à un autre point du même levier, qui tire auſſi le levier par ce point.

PREMIERE SUPPOSITION.

332. LE levier AB étant ſuppoſé horizontal, appuyé ou ſuſpendu au point C, & deux poids A & B aux extrêmités ; ſi le poids A eſt au poids B, reciproquement comme la diſtance BC où eſt B de l'appui C, à la diſtance AC où eſt A du même appui C, ces deux poids A & B ſeront en équilibre : Et reciproquement ſi A & B ſont en équilibre, l'on aura $A . B :: BC . AC$. FIG. IV.

Ainſi ſuppoſant le plus petit poids $A = p$, le plus grand $B = np$, le raport $\frac{BC}{AC} = \frac{p}{np} = \frac{1}{n}$: Suppoſant la diſtance $BC = d$, & par conſequent la diſtance $AC = nd$; l'on aura $A \times AC\,(ndp) = B \times BC\,(ndp)$.

COROLLAIRE I.

333. SI au lieu des poids A & B attachés aux extrêmités du levier, l'on conçoit deux corps A & B qui choquent ou qui tirent les extrêmités du levier, ſçavoir A avec la viteſſe v, & B avec la viteſſe u ; $A \times v$ ſera la force avec laquelle A agit au point A, & $B \times u$ ſera la force avec laquelle B agit au point B ; par conſequent ſi $A \times v . B \times u :: BC . AC$, il y aura équilibre entre ces deux forces ; & s'il y a équilibre, $A \times v . B \times u :: BC . AC$; d'où l'on déduit $A \times v \times AC = B \times u \times BC$.

SECONDE DE'FINITION.

334. LE point C d'un levier, dont les diſtances CA, CB des poids A & B qui ſont aux points A & B du levier, ſont entr'elles reciproquement comme ces poids, s'appelle le *centre de peſanteur* de ces poids ; la ligne tirée de ce centre C perpendiculairement à l'horizon, s'appelle *la ligne de direction* de ce centre, ou ſimplement la ligne de direction. La peſanteur de chacun des poids conſiderés ſeparés du levier, s'appelle leur peſanteur ou leur force *abſolue* ; comme auſſi

le produit $A \times v$ ou $B \times u$ de la maſſe de chacun des deux corps A & B en mouvement (qui choqueroient ou tireroient le levier aux points A & B) par leur viteſſe v ou u, en les conſiderant ſans raport au levier, s'appelle auſſi *la force abſolue* de chacun de ces corps. Mais le produit de la peſanteur abſolue de chacun des poids A & B, ou de leur force abſolue, par la diſtance où eſt ce poids ou ce corps du centre de peſanteur ou de l'appui C, s'appelle *l'effort* de ce poids ou de cette force ſur le levier; on le nomme en latin *momentum*. Ainſi $A \times AC$, $B \times BC$, $A \times v \times AC$, $B \times u \times BC$, ſont les efforts des poids A & B, & des forces $A \times v$ & $B \times u$, agiſſant l'une ſur l'autre par le moyen du levier.

SECONDE SUPPOSITION.

*335. Fig. IV. SI le levier eſt appuyé ou ſoutenu à ſes deux extrêmités A & B, & qu'il y ait un poids C à un point quelconque C entre les points A & B, les appuis en A & en B ſoutiennent chacun une partie du poids C, & la partie que le poids C communique à l'appui A, eſt à la partie qu'il communique à l'appui B, réciproquement comme la diſtance BC eſt à la diſtance AC.

Ainſi nommant a la partie de ſa peſanteur que le poids C communique à l'appui A, & b celle qu'il communique à l'appui B; l'on aura $a . b :: BC . AC$; d'où il ſuit que $a + b$ ou le poids entier $C . b :: AB . AC$; & l'on aura auſſi $a + b . a :: AB . BC$; c'eſt-à-dire, le poids entier C eſt à la partie de ſa peſanteur qu'il communique, par exemple, à l'appui B, comme la diſtance AB entre les deux appuis, eſt à la diſtance CA du point C de l'autre appui A.

S'il n'y avoit qu'un appui en A, & qu'en B ce fût ſeulement quelque force qui reſiſtât à l'effort que le poids C communique au point B, il eſt clair que ce ſeroit la même choſe que s'il y avoit un appui au point B, & que le poids C communiqueroit au point B la même partie de ſa peſanteur.

Si au lieu du poids C, c'étoit un corps en mouvement qui pouſsât ou tirât le point C, & que la viteſſe de ce corps fût v, il eſt évident qu'il faudroit prendre la force $C \times v$ pour le poids C, & que cette force ou quantité de mouvement ſe diſtribueroit aux points A & B en raiſon réciproque des diſtances AC, BC.

TROISIE'ME SUPPOSITION.

336. QUAND les directions *AD*, *BE* des forces ou des poids qui tirent les points *A* & *B* du levier, ne ſont pas perpendiculaires au levier *AB*, il faut tirer de l'appui *C* des perpendiculaires *CD*, *CE* aux directions *AD*, *BE* des forces, & prendre ces perpendiculaires ou ces diſtances des directions des forces ou des poids, pour les diſtances où ſont les forces ou les poids de l'appui *C*, & mettre ces diſtances des directions pour les diſtances des forces dans la ſeconde ſuppoſition qui précede. FIG. X. & XI.

Cependant dans le cas où les directions des forces ſont paralleles entr'elles, on peut prendre *AC* & *CB* pour les éloignemens où ſont les forces ou les poids de l'appui *C*, parcequ'elles ont le même raport *AC*. *CB* :: *CD*. *CE*. FIG. X.

QUATRIE'ME SUPPOSITION.

337. IL y a dans tous les corps peſans, c'eſt-à-dire dans toutes les figures peſantes, un point qu'on appelle *le centre de peſanteur* de la figure, par la ligne de direction duquel la figure étant ſuſpendue ou ſoutenue, toutes les parties de la figure demeurent en équilibre ou en repos.

Ainſi on peut concevoir un corps peſant comme compoſé d'une infinité de petits poids, qui deux à deux ſe tiennent en équilibre par un levier qui paſſe par le centre commun de peſanteur de tout le corps peſant.

Propoſition fondamentale pour trouver le centre de peſanteur.

338. CONCEVANT un plan proche d'un corps peſant P, & partageant par l'eſprit le corps peſant en autant de petits poids qu'on voudra, qu'on nommera *a*, *b*, *d*, *e*, *f*, &c. pour rendre la choſe plus claire; ſi des centres de peſanteur de chacun de ces petits poids, on conçoit des lignes droites menées perpendiculairement à ce plan, nommant α celle qui eſt tirée du centre de peſanteur du petit poids *a*; β, celle qui eſt tirée de *b*, &c. ſi l'on conçoit auſſi la perpendiculaire $\varkappa$ menée du centre commun de peſanteur *C* à ce même plan, la ſomme des produits $a\alpha + b\beta + d\delta + e\varepsilon +$ &c. de chacun des petits poids par ſa perpendiculaire, eſt égale au ſeul produit $\varkappa \times$ P de la perpendiculaire $\varkappa$ du centre de peſanteur multipliée

par le corps pesant entier ; ou, ce qui est la même chose par la somme des petits poids a, b, d, &c. c'est-à-dire $a\alpha + b\beta + d\delta + e\varepsilon +$ &c. $= \varkappa \times a + b + d + e +$ &c. $= \varkappa \times P$.

FIG. XII. Pour découvrir la verité de cette proposition par l'Analyse, il suffit de considerer deux des petits poids dans lesquels on conçoit le corps pesant partagé. Ces deux petits poids soient a & b ; le levier par le moyen duquel on les conçoit en équilibre soit aCb, qui passe par le centre de pesanteur commun C, lequel point C est comme l'appui de ce levier ;

332. le poids a soit nommé a, le poids b soit $= na$; ainsi * $a . na :: bC . aC$, & $a . a + na :: bC . ba$; ainsi $\frac{a}{a+na} = \frac{1}{1+n} = \frac{bC}{ba}$.

La ligne $\beta\varkappa\alpha$ représente le plan qui est proche du corps pesant ; & $b\beta$, qu'on nommera β, est la ligne perpendiculaire tirée du centre de pesanteur du petit poids b au plan $\beta\varkappa\alpha$; $Cd\varkappa$, qu'on nommera $\varkappa$, est la perpendiculaire tirée du centre commun de pesanteur C au même plan ; & $ae\alpha$ est la perpendiculaire menée du centre de pesanteur du petit poids a au même plan. On menera bde parallele à ce plan $\beta\varkappa\alpha$; & les trois lignes $b\beta$, $d\varkappa$, $e\alpha$, sont égales entr'elles, & chacune est $= b\beta\,(\beta)$; $Cd = C\varkappa - d\varkappa = \varkappa - \beta$. Il faut démontrer que $b \times b\beta + a \times a\alpha = C\varkappa \times b + a$.

A cause des triangles semblables abe, Cbd, on aura $bC . ba\,(1 . 1+n) :: Cd\,(\varkappa - \beta) . ae = \varkappa - \beta + \varkappa n - \beta n$; Ainsi $ae + ea = \varkappa + \varkappa n - \beta n$. Or le produit de $b \times b\beta = a\beta n$; (à cause de $b = an$, & de $b\beta = \beta$) ; celui de a par $a\alpha = a\varkappa + a\varkappa n - a\beta n$; ainsi $b \times b\beta + a \times a\alpha = a\varkappa + a\varkappa n$. Le produit de la somme des deux petits poids a & b par $C\varkappa$, est aussi $a + an \times \varkappa = a\varkappa + a\varkappa n$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

339. IL est évident que ce qu'on vient de démontrer pour deux des petits poids dans lesquels on conçoit qu'un corps pesant est partagé, convient à tous ; & qu'ainsi pour trouver la distance du centre de pesanteur d'un corps à un plan, il faut trouver la somme des produits de tous les petits poids dans lesquels on peut concevoir le corps partagé par les lignes perpendiculaires tirées de chacun à ce plan, c'est-à-dire, la somme des produits de chacune de ces perpendiculaires multipliée par son petit poids, & diviser cette somme par la somme de tous les petits poids, c'est-à-dire, par le

corps entier, & le quotient ſera la perpendiculaire tirée du centre de peſanteur du corps à ce plan, c'eſt à-dire ſa diſtance de ce plan.

AVERTISSEMENT.

ON pourroit ici trouver par analyſe, en ſe ſervant du calcul ordinaire, le centre de peſanteur des differentes figures; mais la méthode étant bien plus aiſée en ſe ſervant du calcul differentiel & du calcul integral, on n'en parlera que dans les parties ſuivantes; il ſuffit ici d'avoir démontré le principe de la méthode par le calcul ordinaire.

Uſage de l'Analyſe pour trouver le centre d'oſcillation des pendules compoſés; ce qui ſert à donner la regularité aux horloges.

AVERTISSEMENT.

340. LA regularité des horloges dépend de ce qui en modere le mouvement; l'on n'a rien trouvé qui le fît avec plus de juſteſſe que les pendules, parceque l'on a découvert l'art de faire en ſorte qu'un pendule fît toutes ſes vibrations chacune d'une égale durée, c'eſt-à-dire, que l'effort du poids de l'horloge agiſſant par le moyen des roues & des pignons ſur le pendule quelquefois un peu plus fort, d'autre fois un peu moins fort, on a trouvé le moyen de faire que les plus grandes & les moindres vibrations du pendule ſe fiſſent en des temps égaux, ou fuſſent chacune d'une même durée. Ainſi donnant aux roues & aux pignons de l'horloge le nombre de dents propres à faire que l'effort du poids ne pouſſe le pendule que de ſecondes en ſecondes, ce qui eſt facile, il ne faut plus que trouver un pendule qui faſſe chacune de ſes vibrations en une ſeconde de temps; & l'on aura une horloge qui ſera la meſure exacte du temps. Pour cela il faut trouver deux choſes, la premiere eſt qu'en ſe ſervant d'un pendule compoſé, c'eſt-à-dire, qui a deux ou pluſieurs poids (ce qui ſert à avancer ou à retarder facilement l'horloge, quand elle en a beſoin) il faut trouver l'endroit où doit être placé chacun des poids, afin que les vibrations ſe faſſent chacune en un temps donné, comme en une ſeconde; la ſeconde, quelle eſt la courbe que doit décrire le point du pendule où l'on

conçoit que l'effort des poids eſt réuni, afin que les durées de chacune des vibrations ſoient égales, & le moyen de faire décrire cette courbe à ce point là dans les horloges. L'Analyſe fait trouver l'une & l'autre de ces deux choſes. Voici la premiere.

DE'FINITION.

341. UN *pendule ſimple* eſt une ligne infléxible SC, qu'on conFIG. XIII. ſidere comme n'ayant aucune peſanteur, qui eſt ſuſpendue à un point S, qu'on appellera le point de ſuſpenſion, au bout de laquelle eſt un poids C, & l'on conçoit que le poids C eſt comme réuni au point C qui eſt l'extrêmité de la ligne. La diſtance SC du point de ſuſpenſion juſqu'à ce point C, eſt la longueur du pendule ſimple. Si l'on retire un peu le pendule de la ſituation verticale, il fera de petites vibrations qui ſeront ſenſiblement d'une égale durée.

FIG. XIV. & XV. *Un pendule compoſé* eſt celui où il y a pluſieurs poids enfilés par la même ligne infléxible, & l'on conſidere ici chacun de ces poids comme ſi ce n'étoit qu'un point. La diſtance depuis le point de ſuſpenſion S d'un pendule compoſé juſqu'au point C (fig. 14), & juſqu'au point K (fig. 15), que l'on ſuppoſe égale à la longueur d'un pendule ſimple *iſochrone*, c'eſt-à-dire, qui feroit ſes vibrations dans le même temps que le pendule compoſé, s'appelle *la diſtance du centre d'oſcillation*; & le point C ou K s'appelle *le centre d'oſcillation.*

PREMIERE DEMANDE.

342. DANS un même pendule compoſé, qu'on ſuppoſe infléFIG. XIV. & XV. xible, les poids differens comme A, L, (fig. 14), & A, B, L, (fig. 15), ne ſçauroient ſe mouvoir qu'ils ne décrivent dans le même temps des arcs ſemblables AQ, LP; par conſéquent le temps étant le même, les viteſſes des poids ſont neceſſairement entr'elles comme ces arcs; & ces arcs comme leurs rayons SA, SL: ainſi les viteſſes des poids A & L ſont comme leurs diſtances AS, LS, du point de ſuſpenſion.

SECONDE DEMANDE.

343. L'EFFORT de la peſanteur ſur les corps peſans leur imprime au premier inſtant de leur chûte à chacun un même petit degré de viteſſe, qu'on nommera 1. Ainſi le produit

de chaque poids par 1, par exemple $A \times 1$, $L \times 1$, &c. ou A, L, eſt* la quantité du mouvement de chaque poids au premier inſtant de la chûte. * 299.

PROBLÈME I.

TROUVER la diſtance du centre d'oſcillation d'un pendule compoſé, c'eſt-à-dire, la longueur du pendule ſimple qui feroit ſes vibrations dans le même temps que le pendule compoſé, & qu'on appelle iſochrone.

PREMIER CAS.

Lorſque le pendule compoſé a deux poids A *&* L.

344. SOIT le poids $A = a$, le poids $L = l$, la diſtance $SA = e$, la diſtance $SL = f$; la longueur inconnue SC du pendule ſimple iſochrone, ou la diſtance du centre d'oſcillation du pendule compoſé ſoit $= z$. Soit auſſi le mouvement inconnu du poids $A\,(a)$ dans le pendule compoſé au premier inſtant de la deſcente $= y$; le diviſant par le poids* $A\,(a)$, on aura la viteſſe du poids $A\,(a)$ dans le pendule compoſé $= \frac{y}{a}$. Mais dans le premier inſtant la viteſſe $\frac{y}{a}$ du poids A dans le pendule compoſé, eſt à la viteſſe du poids C dans le pendule ſimple iſochrone, ou du point C dans le compoſé qui eſt à la même diſtance SC, laquelle viteſſe eſt 1 dans le même premier inſtant par la ſeconde demande, comme la diſtance $SA\,(e)$ eſt à la diſtance $SC\,(z)$ par la premiere demande: Donc $SC\,(z) = \frac{ae}{y}$. Ainſi il ne s'agit plus que de trouver la valeur de y pour avoir celle de $SC\,(z)$. Voici comment on la trouve. FIG. XIV. * 299.

La peſanteur au premier inſtant de la deſcente des poids $A\,(a)$ & $L\,(l)$ du pendule compoſé, leur imprime à chacun la même viteſſe 1 (par la ſeconde demande) ainſi leur quantité de mouvement eſt $a \times 1$, $l \times 1$, ou a & l: mais le poids $A\,(a)$ à cauſe du pendule infléxible, ne peut pas dans ce même inſtant parcourir une longueur qui ſoit égale à celle que parcourt le poids $L\,(l)$, mais il eſt neceſſité par le pendule à parcourir une longueur AQ moindre que celle que parcourt l qui eſt LP; le poids a perd donc une partie du mouvement $a \times 1$ que lui donne la peſanteur, & il retient ſeulement la partie y de ce mouvement laquelle nous cherchons; & l'autre partie qui eſt $a \times 1 - y$, ou $a - y$, eſt celle

qu'il perd. Cette partie perdue $a-y$ se distribue au point
*335. de suspension S & au poids $L\,(l)$ *; la partie de cette perte $a-y$ qui se communique au point de suspension, doit s'y perdre entierement, parceque ce point est immobile. L'autre partie de la perte $a-y$ qui se distribue au poids l, se trouve
*335. ainsi * $SL(f).\ SA\,(e)::a-y.\ \frac{ae-ey}{f}$; par consequent la quantité de mouvement que reçoit de la pesanteur au premier instant le poids l, qui est $l\times 1$, est augmentée de $\frac{ae-ey}{f}$; ainsi la quantité de mouvement du poids l dans le pendule
*299. composé est $\frac{fl+ae-ey}{f}$; la divisant par le poids l, l'on aura *, pour la vitesse du poids l dans le pendule composé $\frac{fl+ae-ey}{fl}$.
*342. Or cette vitesse $\frac{fl+ae-ey}{fl}$ est * à la vitesse $\frac{y}{a}$ du poids a dans le même instant, comme $SL\,(f)$ à $SA\,(e)$. L'on a donc $\frac{fy}{a}=\frac{efl+aee-eey}{fl}$; d'où l'on déduit $y=\frac{aefl+aaee}{aee+ffl}$. Mettant cette valeur toute connue de y à sa place dans $SC\,(z)=\frac{ae}{y}$, l'on trouve $SC\,(z)=\frac{eea+ffl}{ae+fl}$; c'est la longueur du pendule isochrone, ou la distance SC du centre d'oscillation que l'on cherchoit.

SECOND CAS.

Lorsque le pendule composé a trois poids A, B, L.

345. AJOUTANT aux deux poids a & l un troisiéme poids B,
FIG. XV. qu'on nommera b, & sa distance $SB=g$; il faut trouver la nouvelle distance inconnue SK, qu'on nommera encore z, du centre d'oscillation qu'on suppose en K, & qui étoit auparavant en C.

Soit x la quantité du mouvement du poids $B\,(b)$ dans le
*299. pendule composé, par consequent * $\frac{x}{b}$ est sa vitesse; mais la vitesse du poids b dans le pendule composé qui est $\frac{x}{b}$, est à la vitesse du poids qui est au bout du pendule simple isochrone; ou, ce qui revient au même, du point K qu'on suppose être le centre d'oscillation du pendule composé de trois poids,
*343. laquelle vitesse est 1 *, comme la distance $SB\,(g)$ est à la lon-
*342. gueur z du pendule isochrone *, ou à la distance $SK\,(z)$ du centre d'oscillation que l'on cherche. Donc $SK\,(z)=\frac{bg}{x}$.

Pour avoir la valeur de $SK\,(z)$, il ne faut plus que trouver la valeur de x de la maniere suivante : Par la 2e demande, la quantité de mouvement que reçoit b de sa pesanteur dans

le

le premier instant, est $b \times 1$; ainsi ne lui restant à cause du pendule infléxible que la quantité x, il perd la quantité de mouvement $b \times 1 - x$, ou $b - x$. Une partie de cette perte se distribue au point de suspension S où elle se perd entierement, & l'autre partie se distribue au centre d'oscillation C des deux poids a & l, où l'on conçoit qu'est réuni leur effort commun. Pour trouver cette partie, on fera cette proportion* $SC\left(\frac{eea+ffl}{ea+fl}\right).\ SB\ (g) :: b - x.\ \frac{eabg+bfgl-eagx-fglx}{eea+ffl} = $ *335 à la partie de la perte $b - x$ du mouvement de b qui se distribue au centre C d'oscillation des deux poids A & L, où tout leur mouvement est conçu comme réuni.

Ainsi on conçoit à ce point C la somme des mouvemens des poids A & L, qui est (par le premier cas de ce Problême, en mettant dans $y + \frac{fl+ae-ey}{f}$, la valeur de $y = \frac{aefl+aaee}{aee+ffl}$) $\frac{aefl+aaee}{aee+ffl} + \frac{fl+ae-\frac{e\times aefl+aaee}{aee+ffl}}{f} = \frac{aaee+2aefl+ffll}{aee+ffl}$; & de plus l'on y conçoit la partie de la perte $b - x$ du mouvement de b qui est distribuée à ce point, & qu'on vient de trouver $= \frac{abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$. Ainsi le mouvement entier qu'on conçoit au point C, est $\frac{aaee+2aefl+ffll+abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$.

Mais la distance $SB\ (g)$ est à la distance $SA\ (e)$, comme la vitesse $\frac{x}{b}$ du poids b dans le pendule, est à la vitesse du poids a dans le même premier instant ; ainsi la vitesse de a dans le pendule de trois pieds est $\frac{ex}{bs}$; la multipliant par le poids a*, l'on aura $\frac{aex}{bs}$ pour la quantité de mouvement du *299 poids a dans le pendule à trois poids. De même $SB\ (g)$ est à $SL\ (f)$, comme la vitesse $\frac{x}{b}$ du poids b est à la vitesse du poids l, laquelle est par consequent $= \frac{fx}{bg}$; la multipliant par le poids l,* l'on aura $\frac{flx}{bg}$ pour la quantité de mouvement *299 du poids l dans le pendule à trois poids ; leur somme est donc égale à la quantité de mouvement qu'on a trouvée en concevant leur mouvement réuni au point C ; ainsi l'on a l'équation $\frac{aex+flx}{bs} = \frac{aaee+2aefl+ffll+abeg+bfgl-aegx-fglx}{aee+ffl}$; d'où l'on déduit $x = \frac{aaeeg+2abefgl+bffgll+abbegg+bbfggl}{aaeg+aefl+affl+fgll+abeg+bfgl}$.

Pour avoir la distance $SK\ (z)$ du centre d'oscillation du pendule à trois poids, ou la longueur du pendule isochrone, il ne faut plus que substituer cette valeur de x dans $SK\ (z) = \frac{bg}{x}$, & l'on aura après avoir divisé le numerateur & le

dénominateur qu'on trouvera enſuite de la ſubſtitution par $abcg + bfgl$, l'on aura, dis-je, $SK\,(z) = \frac{eea + 3ab + ffl}{ea + 2b + fl}$. *Ce que l'on cherchoit.*

COROLLAIRE.

346. EN continuant cette Analyſe pour les pendules à quatre poids, à cinq poids, &c. on trouvera toujours que la diſtance du centre d'oſcillation eſt égale à une fraction dont le numerateur contient la ſomme des produits des poids chacun par le quarré de ſa diſtance du point de ſuſpenſion, & le dénominateur contient la ſomme des produits des mêmes poids chacun par la ſimple diſtance où il eſt du point de ſuſpenſion.

AVERTISSEMENT.

L'ON met d'ordinaire au pendule d'une horloge deux poids connus, l'un qui eſt le plus peſant eſt attaché fixement au bout du pendule, l'autre eſt petit qu'on appelle la lentille, & l'on peut le faire couler le long du pendule en le hauſſant ou l'abbaiſſant, pour retarder ou pour avancer l'horloge ſelon le beſoin; & on peut par une vis l'arrêter au point qu'il faut pour faire marquer les ſecondes à l'horloge.

PROBLÊME II,

Qui eſt l'application du précedent à la pratique.

347. *AYANT un pendule à deux poids* A *&* L, *comme l'on vient de dire, trouver l'endroit du pendule où il faut arrêter la lentille ou le petit poids* A, *afin que le pendule faſſe ſes vibrations chacune dans une ſeconde ou dans une autre partie de temps déterminé.*

FIG. XIV. IL eſt clair que la queſtion ſe réduit à trouver la diſtance SA du point de ſuſpenſion S, où il faut mettre le petit poids A, afin que le pendule compoſé ait ſa diſtance SC du centre d'oſcillation égale à la longueur d'un pendule ſimple iſochrone, c'eſt-à-dire du pendule ſimple qui fait ſes vibrations chacune dans une ſeconde.

Il faut donc apprendre de l'uſage qui eſt maintenant aſſez connu, quelle eſt la longueur SC du pendule ſimple qui fait ſes vibrations chacune dans une ſeconde. On ſuppoſe cette

longueur, que l'on ſçait être de trois pieds huit lignes & demie $= K$; on ſuppoſe le gros poids connu $L = l$, ſa diſtance SL auſſi connue $= f$; le petit poids A connu $= a$; ſa diſtance SA inconnue $= x$. Ayant trouvé * que la diſtance du centre d'oſcillation d'un pendule à deux poids eſt $\frac{eea + ffl}{ea + fl}$; il faut ſuppoſer que e étant à preſent indéterminée, repréſente x, & l'on aura, en mettant x à la place de e, $\frac{axx + ffl}{ax + fl} = K$, ce qui donne l'équation du ſecond degré $xx - Kx - \frac{fKl}{a} + \frac{ffl}{a} = 0$, dont les deux racines * ſont $x = \frac{1}{2}K \pm \sqrt{\frac{1}{4}KK + \frac{fKl - ffl}{a}}$. Ces deux racines ſont poſitives * quand K eſt moindre que f; parcequ'alors le dernier terme $-\frac{fKl + ffl}{a}$ eſt poſitif. Ainſi l'on aura deux points dans le pendule compoſé, dont les diſtances du point S ſont déterminées, étant les valeurs de x qu'on vient de trouver; & mettant la lentille A auquel on voudra de ces deux points, les vibrations du pendule compoſé ſe feront chacune dans une ſeconde.

* 344.

* 76.

* 29. *Cor.* 8.

Suppoſant donc que SL (f) ſurpaſſe SC (K = 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lig.) par exemple que $f = 3$ pieds 1 pouce, que $l = 3$ livres, que la lentille A (a = 1 once), en mettant ces nombres à la place des lettres dont ils ſont les valeurs dans chacune des valeurs de x, on aura deux diſtances du point S; & mettant la lentille à laquelle on voudra, les vibrations du pendule marqueront les ſecondes. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUE.

Où l'on fait voir l'étendue des réſolutions des Problèmes que l'Analyſe fait découvrir.

348. 1°. SI l'on vouloit que les vibrations du pendule à deux poids ſe fiſſent dans une autre partie du temps qu'une ſeconde, il n'y auroit qu'à apprendre de l'experience la longueur du pendule ſimple dont les vibrations ſe feroient chacune en cette partie du temps; & mettre cette longueur à la place de K, & l'on auroit la diſtance du point S où il faudroit mettre la lentille A, afin que le pendule compoſé fît ſes vibrations chacune pendant cette même partie du temps. FIG. XIV.

2°. Si on vouloit que le pendule compoſé fît ſes vibrations

chacune en une ſeconde, & qu'on voulût auſſi que la diſtance $SA(x)$ de la lentille A fût determinée, & toujours $=\frac{1}{2}K$, il n'y auroit qu'à ſuppoſer dans $SA=\frac{1}{2}K\pm\sqrt{\frac{1}{4}KK+\frac{fKl-ffl}{a}}$, que $\sqrt{\frac{1}{4}KK+\frac{fKl-ffl}{a}}=0$, & prendre la diſtance du plus gros poids L, qui eſt f, pour inconnue, & l'on auroit l'équation du ſecond degré $ff-Kf-\frac{aKK}{4l}=0$, dont la racine poſitive $f=\frac{1}{2}K+\sqrt{\frac{1}{4}KK+\frac{aKK}{4l}}=\frac{1}{2}K+\frac{K}{2}\sqrt{1+\frac{a}{l}}$, marqueroit la diſtance $SL(f)$ qu'il faudroit donner au gros poids L, afin que le pendule compoſé dans lequel la diſtance de la lentille SA eſt $\frac{1}{2}K$, fît ſes vibrations chacune dans une ſeconde. Ainſi mettant dans cette valeur de $SL(f)$ les nombres repréſentes par a, K, l, l'on aura la diſtance SL du gros poids L propre à cet effet.

3°. On peut trouver par la valeur de $SA(x)=\frac{1}{2}K\pm\sqrt{\frac{1}{4}KK+\frac{fKl-ffl}{a}}$, les cas où le ſecond Problême eſt poſſible, & ceux où il eſt impoſſible. Car ſuppoſant $\sqrt{\frac{1}{4}KK+\frac{fKl-ffl}{a}}=0$, on aura l'équation $KK+\frac{4fKl-4ffl}{a}=0$, dont la racine poſitive eſt $K=-\frac{2fl}{a}+\sqrt{\frac{4ffll}{aa}+\frac{4ffl}{a}}=-\frac{2fl}{a}+\frac{2f}{a}\times\sqrt{ll+al}$; ce qui fait voir que quand K ſurpaſſe $-\frac{2fl}{a}+\frac{2f}{a}\times\sqrt{ll+al}$, le Problême eſt poſſible; parceque les grandeurs poſitives qui ſont ſous le ſigne $\sqrt{}$ dans la valeur de x, ſurpaſſent la négative: mais quand K eſt moindre que $-\frac{2fl}{a}+\frac{2f}{a}\times\sqrt{ll+al}$, la négative ſurpaſſe les poſitives, & les valeurs de $SA(x)$ ſont imaginaires.

4°. On peut appliquer la réſolution du ſecond Problême aux pendules compoſés de plus de deux poids, en ſuppoſant la diſtance inconnue du ſeul petit poids qui tiendroit lieu de lentille.

SECTION III.

Où l'on fait voir l'uſage de l'Analyſe dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire l'uſage de l'Analyſe par raport à toutes les lignes courbes, pour en découvrir les proprietés & les uſages.

AVERTISSEMENT.

C'EST dans la Geometrie compoſée, c'eſt-à-dire, dans la ſcience des lignes courbes, que paroît ſur-tout l'uſage, & même la neceſſité de l'Analyſe; depuis qu'on l'a appliquée à cette ſcience, on y a fait des progrès ſurprenans; & ſi elle n'étoit pas infinie, on auroit dans l'Analyſe, en employant le calcul *differentiel* & *integral* (inventé de notre temps) le moyen de l'épuiſer. Comme la ſcience des lignes courbes ſert à la Phyſique & à toutes les ſciences Phyſico-Mathematiques, d'où dépend la perfection des Arts; c'eſt dans cette ſcience que paroît évidemment l'utilité de l'Analyſe.

On applique l'Analyſe aux lignes courbes, en réduiſant chaque courbe à une équation qui en exprime une des principales proprietés; & enſuite on découvre par le ſeul calcul de l'Analyſe, en ſe ſervant de cette équation, tout ce que l'on peut deſirer de ſçavoir de cette courbe. L'Analyſe même fournit le moyen d'exprimer une infinité de courbes par une même équation par le moyen des lettres indéterminées, & de découvrir par le même calcul les proprietés de toutes ces courbes. C'eſt ce que l'on va expliquer dans cette ſection.

PREMIERE DE'FINITION.

349. QUAND deux lignes données AB, BC, font un angle quelconque ABC, & que la premiere AB ou une de ſes puiſſances, comme $\overline{AB}^2$, $\overline{AB}^3$, &c. ou le produit de la premiere AB, ou de quelqu'une, ou de pluſieurs de ſes puiſſances par d'autres lignes données; quand, dis-je, cette premiere ligne AB, où ce produit eſt égal à la ſeconde BC ou à quelques-unes de ſes puiſſances, ou au produit de BC, ou des puiſſances de BC par des lignes connues; on dira que cette égalité ou équation exprime le raport des lignes AB FIG. XVI. XVII. & XVIII.

& BC. Ainſi ſuppoſé $AB = a$, $BC = b$, & une autre ligne donnée $= p$; ſuppoſé auſſi que $ap = bb$, ou $aap = b^3 + pbb$; on dira que cette équation exprime le raport de AB à BC.

Explication de la maniere dont l'Analyſe réduit les courbes à des équations qui en expriment la nature, c'eſt-à-dire, les principales proprietés.

350. CAc eſt une ligne ſoit droite ſoit courbe ſur un plan; ABb eſt une ligne droite donnée de poſition, dont le point fixe ou l'origine A eſt déterminée, mais la ligne eſt indéterminée de côté & d'autre; ſoit gAG une ligne droite qui coupe AB au point A en faiſant avec elle un angle quelconque BAG, ſoient auſſi de tous les points de CAc des lignes droites CB, cb, &c. tirées ſur AB, paralleles entr'elles & à gAG; ſuppoſé que l'équation qui exprime le raport de la premiere parallele BC avec la premiere AB, ſoit la même que celle qui exprime le raport de la ſeconde bc avec la ſeconde ligne Ab correſpondante, de la troiſiéme bc avec la troiſiéme Ab qui lui répond, & ainſi de toutes les autres, de maniere qu'en mettant chaque bc dans la premiere équation à la place de la premiere BC, & la correſpondante AB de chaque nouvelle BC à la place de la premiere AB, ce ſoit la même équation; on peut faire une équation qui convienne à tous les points de la ligne droite ou courbe cAC, en nommant la *changeante* AB, x; la changeante BC, y; & mettant dans la premiere équation x à la place de AB, & y à la place de BC, & l'on a l'équation de la ligne droite ou courbe cAC.

Fig. XVI. XVII. & XVIII.

EXEMPLES.

351. SI l'on a les deux lignes droites données p & d, & que l'équation qui exprime le raport de chaque $BC(y)$ à chaque $AB(x)$, ſoit $px = dy$; *la ligne ACC eſt droite**.

*282.

Si l'équation qui exprime le raport de chaque $BC(y)$ à chaque $AB(x)$, eſt $px = yy$; la ligne ACC eſt courbe, & ſe nomme la *parabole*; & $px = yy$, eſt *l'équation à la parabole*.

Si l'équation eſt $\frac{d}{p}\,yy = dx - xx$, la courbe ACC ſe nomme *l'ellipſe*.

Si l'équation eſt $yy = dx - xx$, la courbe ACC eſt la *circonference du cercle**.

289.

Si l'équation eſt $\frac{d}{p}\,yy = dx + xx$, la courbe ACC ſe nomme *l'hyperbole*.

Si l'équation eſt $ppx = y^3$, la courbe ACC ſe nomme la *premiere parabole cubique.*

Si l'équation eſt $pxx = y^3$, la courbe ACC ſe nomme la *ſeconde parabole cubique.*

Si l'équation eſt $x^3 = dyy - xyy$, la courbe ACC ſe nomme *la ciſſoïde.*

Comme il y a une infinité de courbes differentes, il y a auſſi une infinité d'équations differentes qui les expriment; & il eſt inutile d'en faire ici une longue énumeration; ce que l'on vient de dire ſuffit pour faire concevoir comment l'Analyſe réduit chaque courbe à une équation qui exprime ſa principale proprieté, d'où l'on déduit les autres.

Si l'on tire des points $CCcc$ de la ligne $CCAcc$ des paralleles CG, cg, &c. à la ligne AB qui ſe terminent à la ligne gAG qui eſt ſuppoſée parallele aux lignes BC, Bc, bc, &c. il eſt évident qu'à cauſe des paralleles, les lignes AG, Ag, &c. ſont égales aux lignes BC, bc, &c. chacune à ſa correſpondante; ainſi chaque $AG = y$; & que de même les lignes GC, gc, &c. ſont égales aux lignes AB, Ab, &c. chacune à celle qui lui répond, ainſi chaque $GC = x$. D'où il eſt clair qu'en raportant les points de la ligne ACC à la ligne droite gAG, par le moyen des paralleles CG, cg, &c. l'on aura la même équation que l'on avoit de la même ligne $CCAcc$, en raportant tous ſes points à la droite ABb par le moyen des paralleles BC, bC, &c. FIG. XVI.

SECONDE DE'FINITION.

353. DANS toutes les courbes qu'on peut réduire à une équation qui en exprime la proprieté, la ligne droite AB à laquelle on raporte tous les points de la courbe, s'appelle *la ligne des coupées* ou *des abſciſſes*, & la changeante AB, Ab, &c. s'appelle *la coupée* ou *l'abſciſſe*; le point fixe A s'appelle *l'origine.* Les paralleles BC, bC, &c. s'appellent *les ordonnées* ou *les appliquées:* & comme l'on a vû qu'on pouvoit prendre auſſi les coupées ſur AG paralleles aux ordonnées, & les ordonnées ſur ABB, chaque AB & ſa correſpondante BC s'appellent *les coordonnées*; & les deux lignes ABB, AG qui ſe coupent à l'origine A, les lignes des *coordonnées*; & l'angle GAB qu'elles font enſemble, *l'angle des coordonnées*; & les quatre angles GAB, GAH, gAH, BAg, qu'elles FIG. XVI.

ſont enſemble à l'origine A, ſont *les quatre angles des deux lignes des coordonnées.*

Diviſion des courbes en differens genres.

354. LEs lignes comme $CCAcc$ dont on peut exprimer la nature, c'eſt-à-dire, la principale proprieté par une équation algebrique qui contienne le raport des coordonnées changeantes x & y*, leſquelles coordonnées ne ſont que de ſimples lignes droites, s'appellent *Geometriques* ou *Algebriques*, & on les diſtingue en differens genres, dont chacun prend ſon nom du nombre qui eſt l'expoſant de la plus haute puiſſance de celle des deux coordonnées x ou y, qui eſt élevée au plus haut degré ſans mêlange de l'autre dans l'équation, ou du nombre des dimenſions du produit de l'une par l'autre dans l'équation, quand ce produit a plus de dimenſions que la plus haute puiſſance ſeparée de l'une & de l'autre.

*350.

Les lignes dont l'équation ne contient que x & y lineaires ſans être multipliées l'une par l'autre, comme $px = dy$, ſont *les lignes du premier genre :* & il n'y a dans ce premier genre que la ligne droite.

Les lignes dont l'équation contient le quarré de l'une des coordonnées x ou y, ou le quarré des deux xx & yy, ou le produit des deux xy, ſont *les lignes du ſecond genre :* Mais comme elles ſont auſſi les premieres courbes ou les courbes les plus ſimples, on les appelle *les courbes du premier genre.*

Toutes les courbes dont l'équation contient la troiſiéme puiſſance de l'une ou de l'autre des coordonnées x^3 ou y^3, ou de toutes les deux x^3 & y^3, ou un produit des deux qui a trois dimenſions xxy ou xyy, ſont *les lignes du troiſiéme genre*, & en même temps *les courbes du ſecond genre* ; & ainſi de ſuite à l'infini.

La maniere d'exprimer par une ſeule équation une infinité de courbes toutes de differens genres.

355. EN mettant dans l'équation à la parabole $p^1 x^1 = y^2$ des expoſans indéterminés m & n, on aura l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$, qui exprime *les paraboles de tous les genres à l'infini*, en concevant que m & n repréſentent tous les nombres entiers que l'on peut mettre à leur place dans cette équation. Par exemple ſi $m = 1$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera l'équation à la

à la parabole du premier genre $p^1 x^1 = y^2$: Si $m = 2$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $ppx = y^3$, qui eſt l'équation à la premiere parabole cubique: Si $m = 1$, $n = 2$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $pxx = y^3$, qui eſt la ſeconde parabole cubique: Si $m = 3$, $n = 1$, l'équation $p^m x^n = y^{m+n}$ ſera $px = y^4$, qui eſt la premiere parabole du troiſiéme genre; & ainſi à l'infini.

De même en mettant dans l'équation à l'ellipſe $\frac{d}{p} y^2 = x^1 \times \overline{d - x}^1$, & dans l'équation à l'hyperbole $\frac{d}{p} y^2 = x^1 \times \overline{d + x}^1$, les expoſans indéterminés m & n; l'on aura 1°. l'équation $\frac{d}{p} y^{m+n} = x^m \times \overline{d - x}^n$, qui exprime les ellipſes de tous les genres à l'infini, m & n repréſentant tous les nombres entiers qu'on peut mettre à leur place; & 2°. l'équation $\frac{d}{p} y^{m+n} = x^m \times \overline{d + x}$, qui exprime les hyperboles de tous les genres à l'infini par la même raiſon.

On peut de même rendre generales les équations de toutes les courbes qu'on peut imaginer.

TROISIE'ME DE'FINITION.

356. DANS les courbes du premier genre, quand la ligne des coupées ABB coupe par la moitié chacune des ordonnées CBc terminées de côté & d'autre à la courbe, elle s'appelle *un diametre* de la courbe, & le point A où ce diametre rencontre la courbe eſt nommé *le ſommet* de ce diametre; il ſuffit qu'il en coupe deux differentes par la moitié, pour les couper toutes. Quand le diametre eſt coupé perpendiculairement par les ordonnées, on l'appelle *l'axe* de la courbe; la ligne droite donnée p dans les équations $px = yy$, $\frac{d}{p} yy = x \times \overline{d - x}$, $\frac{d}{p} yy = x \times \overline{d + x}$, s'appelle *le parametre* du diametre qui eſt la ligne des coupées x dans l'équation. Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole les diametres ſe croiſent dans un point K qu'on appelle *le centre*. Dans l'une & dans l'autre le diametre dD qui eſt parallele aux ordonnées, s'appelle *le ſecond* ou *le diametre conjugué* du *premier* diametre Aa qui les coupe chacune par la moitié, & on les appelle *conjugués* l'un de l'autre. Une ligne qui touche une courbe dans un ſeul point, comme CS, s'appelle *la tangente* en ce point là qui s'appelle *le point touchant*; & la partie de la ligne des coupées comme BS, qui eſt interceptée entre l'ordonnée BC du point touchant C, & le

Fig. XVI. Fig. XVII. XVIII. Fig. XIX. XX. XXI.

point *S* où elle eſt rencontrée par la tangente prolongée,
FIG. XIX. s'appelle *la ſoutangente :* une droite *CD* perpendiculaire à la tangente au point touchant, s'appelle *une perpendiculaire à la courbe*, & la partie *BD* de la ligne des coupées entre l'ordonnée *BC* au point touchant, & le point *D* où cette perpendiculaire coupe la ligne des coupées, ſe nomme la *ſouperpendiculaire.*

Une ligne droite ſur le même plan de la courbe, dont la courbe s'approche de plus en plus à l'infini ſans jamais la
FIG. XXI. toucher, comme *KE*, s'appelle une *aſymptote* de la courbe.

357. Les mêmes définitions conviennent aux courbes des genres plus élevés, neanmoins comme la même courbe dans ces genres plus élevés, a d'ordinaire pluſieurs branches de chacun des côtés du diametre, quand elle a un diametre : lorſque la ligne des coupées coupe chaque ordonnée de maniere que la ſomme des parties de l'ordonnée terminées aux points de chaque branche de la courbe d'un côté, eſt égale à la ſomme des parties de la même ordonnée terminées aux branches de la courbe qui ſont de l'autre côté ; alors la ligne des coupées eſt un diametre de la courbe, & ce diametre eſt *l'axe*, quand les ordonnées lui ſont perpendiculaires.

De la formation ou deſcription des courbes, ſur-tout du premier genre.

358. ON peut tracer les courbes ſur un plan de deux manieres, 1°. Par le mouvement continu d'un point, ce qui ſe peut faire de differentes manieres : par exemple, on peut faire mouvoir deux longues regles ſur deux points fixes qu'on appelle *les Poles*, de façon qu'elles ſe croiſent pendant leur mouvement en des points dont la ſuite eſt la courbe que l'on veut décrire : l'une des deux regles peut ſe mouvoir parallelement le long d'une ligne donnée de poſition, pendant que l'autre tournera ſur ſon pole, & la ſuite des points où elles ſe croiſent pendant leur mouvement ſera auſſi une courbe ; l'on peut faire mouvoir une figure rectiligne ou courbe le long d'une regle immobile, pendant qu'une autre regle ſe mouvant ſur ſon pole, coupera la courbe en des points dont la ſuite ſera une ligne courbe. On peut imaginer une infinité d'autres manieres de décrire les courbes par le mouvement continu, 2°. En trouvant pluſieurs points de la courbe très-proches les uns des autres, & les joignant enſem-

ble par de petites lignes, l'on a à peu près la courbe que l'on veut décrire.

De toutes les manieres que l'on a trouvées de décrire les courbes du premier genre par un mouvement continu, la plus commode eſt la ſuivante, dont *M. le Marquis de l'Hôpital* eſt l'auteur, parcequ'elle ſert non ſeulement à les tracer avec les axes, mais auſſi avec tel diametre de la courbe qu'on voudra; & de plus elle donne d'abord l'équation de la courbe la plus ſimple par raport à ſes axes ou à ſes diametres.

359. Il faut remarquer que les courbes du premier genre ſe nomment ordinairement *les ſections coniques*, parcequ'en concevant deux cones égaux qui ont le même ſommet, & qu'un plan coupe l'un des deux ou tous les deux, la ſection eſt une parabole, quand le plan coupant eſt parallele à un côté de la ſurface du cone, qui eſt le côté du triangle qui coupe le cone par le ſommet perpendiculairement à ce plan; une ellipſe, quand le plan coupe les côtés oppoſés de la ſurface du cone, & ne fait pas les angles avec ces côtés, égaux à ceux qui font ces côtés ſur la baſe du cone; un cercle, quand le plan coupe les côtés oppoſés, & fait avec eux les angles égaux à ceux que font ces côtés ſur la baſe; une hyperbole, quand le plan coupe les deux cones oppoſés au ſommet: c'eſt ce qui a fait appeller par les Anciens, *ſections coniques*, les courbes du premier genre; mais cette maniere de concevoir ces courbes comme formées par la ſection du cone, étant plus embarraſſante que la maniere de les décrire ſimplement ſur un plan, celle-ci étant la ſeule qui eſt d'uſage; on ne parlera point ici de la premiere. On ſe contentera d'expliquer la ſeconde, d'en déduire les équations des ſections coniques, & les principales proprietés neceſſaires pour entendre ce huitiéme Livre.

La formation de la parabole.

360. 1°. IL faut tirer une droite AB indéterminée, & prenant le point A pour l'origine, mener une autre droite $gAGP$ par A faiſant l'angle BAG avec AB égal à celui que l'on veut que faſſent les ordonnées avec ABb; & ayant pris AP de la grandeur que doit être le parametre du diametre AB ou d'une grandeur déterminée telle qu'on voudra, qui ſera le parametre du diametre ABb de la parabole qu'on décrira, FIG. XVI.

il faut mener par *P* la ligne indéterminée *FPf* parallele à *ABb*.

2°. Il faut prendre une longue regle *ACF*, l'attacher par un clou au point *A* autour duquel elle puiſſe ſe mouvoir ſur le pole *A*, & la mettre d'abord ſur la ligne *gAGP*; il faut enſuite prendre une longue regle *GC*, & la faire gliſſer toujours parallele à *AB* le long de la ligne *AGP*, & la mettre d'abord le long de *ABb*.

3°. Pour décrire la partie de la parabole qui eſt à la droite de *AB*, il faut faire mouvoir en bas la regle *ACF* ſur le pole *A*, & faire en même temps gliſſer la regle *GC*, le long de *AGP*, faiſant en ſorte que *AG* ſoit toujours égale à *PF*, & marquer avec un ſtile *C* la ligne courbe *AC* qui paſſe par tous les points *C*, où les regles ſe croiſent dans leur mouvement, & ce ſera la partie de la parabole qui eſt vers la droite du diametre *ABb*.

4°. Pour décrire l'autre partie *Ac* de la parabole, il faut faire mouvoir la regle *Af* en haut au-deſſus de *P*, & faire gliſſer la regle *gc* le long de *Ag*, faiſant en ſorte que *Ag* ſoit toujours égale à *Pf*, & marquer avec un ſtile *c* la courbe qui paſſe par tous les points *c* où les regles *Ac* & *gc* ſe croiſent dans leur mouvement continu, & ce ſera la ſeconde partie de la parabole.

La deſcription de l'ellipſe & de l'hyperbole.

361. LA longueur *Aa* du diametre ou de l'axe doit être déterminée, comme auſſi la longueur *AP* du parametre qui convient à ce diametre ou à l'axe; & l'on doit d'abord faire ce qui eſt marqué dans les deux premiers articles de la parabole, excepté que la ſeconde regle a*C* doit être mobile autour du pole a, qui eſt la ſeconde extrêmité du diametre *Aa*. FIG. XVII. & XVIII.

Pour décrire la partie de l'ellipſe ou de l'hyperbole qui eſt à la droite de *ABb*, on fera mouvoir en bas au-deſſous de *P* la premiere regle *ACF* ſur le pole *A*, & en même temps la ſeconde regle a*C* ſur le pole a, faiſant en ſorte que *AG* ſoit toujours égale à *PF*; & l'on marquera avec un ſtile en *C* la courbe qui paſſe par tous les points *C* où ſe croiſent les deux regles; & ce ſera la premiere moitié de l'ellipſe ou de l'hyperbole *AC*.

Pour décrire l'autre moitié, on fera mouvoir en haut la premiere regle Af au-deſſus de P toujours ſur le pole A, & l'autre regle ac du côté gauche de ABb, faiſant en ſorte que Ag ſoit toujours égale à Pf, & l'on marquera avec un ſtile en c la courbe Acc, qui paſſe par tous les points c où ces regles ſe croiſent ; & ce ſera la ſeconde partie de l'ellipſe ou de l'hyperbole.

L'hyperbole ayant en particulier une autre hyperbole $a\varkappa$ à l'extrêmité a du diametre Aa entierement égale & ſemblable à la premiere AC ; on décrira cette ſeconde hyperbole $a\varkappa$ en faiſant mouvoir la premiere regle AC en $A\varkappa$ ſur le même pole A, & en même temps la ſeconde en $a\varkappa$ ſur le pole a, faiſant en ſorte que $A\gamma$ ſoit toujours égale à $P\varphi$; & traçant avec un ſtile en $\varkappa$ la courbe qui paſſe par tous les points $\varkappa$ où ſe croiſent les deux regles, elle ſera la ſeconde hyperbole $a\varkappa$ ſemblable & égale à la premiere AC.

La maniere dont on déduit des formations précedentes les équations de la parabole, de l'ellipſe & de l'hyperbole.

POUR LA PARABOLE.

362. SOIT le parametre $AP = p$, chaque PF ou $Pf = f$, chaque coupée AB, $Ab = x$, chaque ordonnée BC, $bc = y$. Les triangles APF, ABC, ſont ſemblables, comme auſſi APf, Abc, à cauſe des paralleles AGP, BC, & ABb, fPF : par conſequent $AP\,(p).\ PF\,(f) :: BC\,(y).\ AB\,(x)$; d'où l'on déduit $px = fy$: Mais à cauſe des paralleles, $BC\,(y) = AG = PF\,(f)$ par la conſtruction : ainſi mettant y à la place de f, l'on a l'équation à la parabole $px = yy$, c'eſt-à-dire, chaque ordonnée $BC\,(y)$ eſt moyenne proportionelle entre la coupée $AB\,(x)$ & le parametre $AP\,(p)$; ou bien le produit px du parametre par la coupée eſt toujours égal au quarré de l'ordonnée yy. FIG. XVI.

Il eſt évident que la même équation convient à la ſeconde moitié de la parabole Ac.

COROLLAIRES.

I.

363. SI l'on prolonge chaque BC vers la gauche juſqu'à ce qu'elle rencontre la parabole en c, l'on aura $Bc = BC$; car mettant la regle fAc dans la ſituation où elle faſſe $fP = FP$,

l'on aura $Ag = fP$; par conſequent Ag ſera égale à $PF = AG$, & gc ſera égale à $AB = GC$; mais Bc eſt toujours égale à Ag à cauſe des paralleles : ainſi quand $fP = FP$, Ag eſt égale à AG, & $gc = AB = GC$: ainſi dans l'équation $px = yy$, qui convient à BC & à Bc, $y = y$, & $x = x$, & p eſt la même grandeur.

D'où l'on voit que ſi l'on plioit la parabole de façon que le pli fût dans la ligne ABb, la partie ACC de la parabole s'ajuſteroit ſur l'autre partie Acc, quand les ordonnées y ſont perpendiculaires aux coupées x.

II.

364. La ligne $PGAg$ touche la parabole au ſeul point A qui eſt le ſommet du diametre ABb; car il faut que la regle AC ou Ac faſſe un angle avec GAg au point A, pour donner chaque autre point C, c de la parabole, & GAg eſt ſeule tangente au point A; car toute autre ligne AC ou Ac paſſant par A, & faiſant un angle avec GAg au point A, donne un point de la parabole, & par conſequent elle paſſe par deux points de la parabole; d'où l'on voit que la tangente par le ſommet A, eſt parallele aux ordonnées du diametre ABb.

III.

365. La parabole ACC eſt concave à l'égard du diametre ABb, car chaque corde AC, Ac, eſt entre l'arc qu'elle ſoutient, & le diametre ABb.

IV.

366. Quand l'angle BAG eſt droit, les ordonnées CB ſont perpendiculaires au diametre AB; ainſi dans ce cas ABb eſt l'axe dont AP eſt le parametre : dans tout autre cas AB eſt ſimplement un diametre dont AP eſt le parametre, qui n'eſt pas alors le même que celui de l'axe ou d'un autre diametre.

V.

367. L'angle GAB que fait la tangente GAB au ſommet A avec le diametre AB, eſt celui que fait en ce point A la courbe même avec ſon diametre AB.

VI.

368. Dans la parabole, les coupées AB, Ab, (fig. 19.) ſont entr'elles comme les quarrés des ordonnées; car nommant $AB\,(x)$, $Ab\,(u)$, $BC\,(y)$, $bc\,(z)$, l'on aura $\frac{px}{pu} = \frac{x}{u} = \frac{yy}{zz}$; & par conſequent les ordonnées $BC\,(y)$, $bc\,(z)$, ſont entr'elles comme les racines des coupées $AB\,(x)$, $Ab\,(u)$: puiſque $yy.\ zz :: x.\ u$; & $y.\ z :: \sqrt{x}.\ \sqrt{u}$.

VII.

369. Le parametre p eſt à la ſomme de deux ordonnées $bc + BC\,(z+y)$, comme la difference des mêmes ordonnées $bc - BC = ec\,(z-y)$ eſt à la difference des coupées $Ab - AB = Bb$ ou $Ce\,(u-x)$; car $px = yy$, & $pu = zz$: donc $pu - px = zz - yy$; d'où l'on déduit $p.\ z+y :: z-y.\ u-x$. Fig. XIX.

VIII.

370. L'équation $yy = px$ fait voir que les x augmentans, les y augmentent auſſi; ainſi la parabole s'écarte de plus en plus à l'infini de ſon diametre.

PROBLÊME I.

Où l'on donne une méthode generale pour mener les tangentes des courbes geometriques.

371. *UNE parabole* ACc *étant décrite ſur un plan avec ſon diametre* ABb *& ſon parametre* AP, *mener la tangente* SC *par un point donné* C, *dont l'ordonnée eſt* BC. Fig. XIX.

IL eſt évident qu'il ſuffit de trouver la ſoutangente BS; car il n'y aura plus qu'à tirer la droite SC, & elle ſera la tangente. Entre toutes les méthodes pour trouver les tangentes des courbes, on a choiſi la ſuivante qui convient à toutes les courbes geometriques, comme ayant le plus de raport à la méthode de les trouver par le calcul differentiel.

Réſolution. 1°. Il faut concevoir une ſecante SCc qui paſſe par le point donné C, & coupe la parabole en un autre point c; & mener l'ordonnée cb; & nommant $AP\ (p)$, $AB\ (x)$, $BC\ (y)$, $BS\ (s)$, Bb ou $Ce\ (e)$; l'équation pour le point C eſt $yy - px = 0$. 2°. Il faut trouver la valeur de ce, par le moyen des triangles ſemblables SBC, Cec, qui donneront $SB\ (s).\ BC\ (y) :: Ce\ (e).\ ce = \frac{ey}{s}$. 3°. Pour avoir l'équation par raport au point c, il faut mettre dans l'équation à la courbe, $Ab\ (x+e)$ à la place de $AB\ (x)$, & $bc\ (y + \frac{ey}{s})$ à la place de $BC\ (y)$, & ordonner la nouvelle équation de maniere que tous les termes de la premiere ſoient le premier terme de la ſeconde; le ſecond terme contienne toutes les grandeurs où e eſt lineaire; le troiſiéme terme contienne toutes celles où ſe trouve ee, & ainſi de ſuite; & l'on aura $yy + \frac{2eyy}{s} + \frac{eeyy}{ss} = 0$. 4°. Il faut ôter le premier terme $-px - ep$.

de cette équation qui eſt égal à zéro par la ſuppoſition, puiſque c'eſt l'équation de la courbe ; & le reſte doit par conſequent être auſſi égal à zero. 5°. Il faut diviſer cette équation reſtante par e, ce qui laiſſera le premier terme ſans e. 6°. Il faut ſuppoſer la diſtance Bb ou Ce (e) des deux ordonnées BC, bc égal à zero, ce qui détruira tous les termes excepté le premier, qui eſt égal à zero. 7°. Enfin il faut trouver dans ce terme la valeur de l'inconnue s, & mettre au lieu de y ſa valeur en x priſe de l'équation de la courbe, & ce ſera la ſoutangente qu'on cherchoit ; car il eſt évident que la difference Bb entre les ordonnées devenant zero ou s'anéantiſſant, que les deux points C, c deviennent le ſeul point C, & que la ſecante SCc devient la tangente au point C, & par conſequent BS (s) devient la ſoutangente.

Dans notre exemple, ayant ôte le premier terme, diviſé l'équation par e, & ſuppoſé enſuite $e = 0$, l'équation reſtante ſera $\frac{2}{3}yy - p = 0$; ou mettant px à la place de yy, l'on aura $\frac{2}{3}px - p = 0$, d'où l'on déduit BS (s) $= 2x$.

Ce qui fait voir qu'en prenant $AS = AB$, le point S ſera celui où la tangente CS rencontre le diametre.

REMARQUE.

372. S'IL arrivoit, lorſqu'on cherche la tangente des differens points de la courbe, qu'en mettant dans le terme où e eſt lineaire, des valeurs déterminées de x & de y, cela rendît le numerateur & le dénominateur de la fraction qu'on trouve ordinairement pour la valeur de s, chacun égal à zero, il faudroit prendre le troiſiéme terme où ſe trouve ee, le diviſer par ee ; ſuppoſer enſuite $ee = 0$, ce qui rendroit tous les termes ſuivans égaux à zero, & l'on trouveroit par le ſeul terme reſtant où étoit ee qui feroit lui ſeul l'équation, la valeur de s qui donneroit la ſoutangente qu'on cherche ; & ainſi de ſuite, c'eſt-à-dire, ſi le terme où eſt ee donnoit une valeur de s, dans laquelle le numerateur & le dénominateur ſe trouvaſſent égaux chacun à zero par la ſuppoſition de quelques valeurs déterminées de x & de y miſes à leur place dans cette fraction ou valeur de s, il faudroit paſſer au terme où ſe trouve e^3, & ainſi de ſuite ; & l'on remarquera que quand il faut paſſer au terme ee, l'on trouve d'ordinaire deux valeurs de s ; quand il faut paſſer au terme e^3, on trouve trois valeurs de s ;

de s; ce qui fait voir dans le premier cas que la courbe a deux soutangentes au point déterminé dont on cherche les soutangentes; qu'elle en a trois dans le second cas, & ainsi de suite; c'est-à-dire, cela arrive ordinairement.

Corollaires de ce Problème pour la parabole.

I.

373. SI l'on mene par le point touchant C, une perpendiculaire CD à la tangente, supposant que ABD est l'axe, la souperpendiculaire BD est toujours égale à la moitié du parametre de l'axe $\frac{1}{2}p$: Car $SB\,(2x).\ BC\,(y)::BC\,(y).\ BD=\frac{yy}{2x}=\frac{px}{2x}=\frac{p}{2}$, en mettant au lieu de yy sa valeur px. FIG. XIX.

II.

374. Si après avoir trouvé la tangente SC au point C, on tiroit CI parallele à l'axe ABb, AI parallele à la tangente qui seroit égale à SC, & qu'en nommant la coupée $CI\,(x)$, l'ordonnée $AI\,(y)$, on prît une ligne p telle que $CI\,(x).\ IA$ ou $CS\,(y)::CS\,(y).\ p$; cette ligne p seroit le parametre du diametre CI, car $px=yy$: ainsi l'on pourroit décrire la même parabole par la formation (fig. 16.) * en prenant CI (fig. 19.) pour ABb (fig. 16.), CS pour GAg; la grandeur p qu'on vient de trouver $=\frac{yy}{x}$ pour le parametre AP. FIG. XIX. * 360.

III.

375. D'où l'on voit que tous les diametres de la parabole sont paralleles à l'axe & entr'eux: Ce que l'on vient de dire du diametre CI pouvant être appliqué à tous les autres: Et que $AS=^{*}AB=CI=Ct$, à cause des paralleles. * 371.

IV.

376. D'où l'on peut trouver en toute parabole tracée l'axe & son parametre, lorsqu'on n'a qu'un diametre & le parametre de ce diametre, en menant deux perpendiculaires cBC, cbc à ce diametre, qui se terminent des deux côtés à la parabole, les partageant chacune par la moitié en B, b; & tirant bBA par les points B, b, ABb sera l'axe, BC, bc ses ordonnées; enfin faisant $AB\,(x).\ BC\,(y)::BC\,(y).\ p$, la ligne p sera le parametre de l'axe.

POUR L'ELLIPSE.

377. SOIT le parametre donné $AP=p$, chaque coupée $AB=x$, l'ordonnée $BC=y$, le diametre Aa, qui est donné $=d$, & $PF=f=AG$; les triangles APF, ABC sont FIG. XVII.

ſemblables, comme auſſi APf, Abc; c'eſt pourquoi $AP\,(p)$: $PF\,(f) :: BC\,(y)$. $AB\,(x)$; d'où l'on tire $f = \frac{px}{y}$: Mais les deux triangles AaG, BaC étant auſſi ſemblables, l'on a $Aa\,(d)$. $AG\,(f) :: aB\,(d-x)$. $BC\,(y)$; d'où l'on déduit $f = \frac{dy}{d-x} = \frac{px}{y}$, qui ſe réduit à $\frac{d}{p}yy = dx - xx = \overline{d-x} \times x$, qui eſt l'équation de l'ellipſe, où l'on voit que $AP\,(p)$. $Aa\,(d) :: \overline{BC}^2\,(yy)$. $AB \times Ba\,(dx - xx)$, ce qui convient aux ordonnées y de tous les points de l'ellipſe.

DE'FINITION.

378. LA ligne $Aa\,(d)$ eſt *le premier diametre*; le point du milieu K du diametre eſt *le centre*; la ligne Dd parallele aux ordonnées par le centre K, & terminée des deux côtés à l'ellipſe, eſt *le ſecond diametre*, ou *le diametre conjugué* du premier diametre Aa. Ces diametres s'appellent l'un *le premier axe*, & l'autre *le ſecond axe*, quand les ordonnées leur ſont perpendiculaires. Le *parametre* p d'un diametre $Aa\,(d)$, dont on ſuppoſe le diametre conjugué $DKd = \delta$, eſt toujours la 3e proportionelle au premier diametre d & au ſecond δ; ainſi $d.\,\delta :: \delta.\,p$, & $p = \frac{\delta\delta}{d}$. Le *parametre* π du ſecond diametre $Dd\,(\delta)$, eſt de même la 3e proportionelle à δ & d; ainſi $\delta.\,d :: d.\,\pi$, & $\pi = \frac{dd}{\delta}$; d'où l'on voit que $d.\,p\,(\frac{\delta\delta}{d}) :: dd.\,\delta\delta$; & $\delta.\,\pi\,(\frac{dd}{\delta}) :: \delta\delta.\,dd$.

Autre expreſſion de l'équation à l'ellipſe.

379. EN prenant le centre K pour l'origine des coupées, & nommant chaque $KB\,(x)$, $BC\,(y)$, $Aa\,(d)$, $AP\,(p)$, il eſt évident que $KA = \frac{1}{2}d$; ainſi $AB = \frac{1}{2}d - x$. Mettant $\frac{1}{2}d - x$ au lieu de x dans l'équation $\frac{d}{p}yy = dx - xx$, il vient cette autre équation à l'ellipſe $\frac{d}{p}yy = \frac{1}{4}dd - xx = \overline{\frac{1}{2}d - x} \times \overline{\frac{1}{2}d + x}$, qui donne $AP\,(p)$. $Aa\,(d) :: \overline{BC}^2\,(yy)$. $AB \times Ba\,(\frac{1}{4}dd - xx.)$.

380. Puiſque $\frac{d}{p} = \frac{dd}{\delta\delta}$, on peut mettre dans chacune de ces équations de l'ellipſe $\frac{dd}{\delta\delta}$, au lieu de $\frac{d}{p}$, & la premiere $\frac{d}{p}yy = dx - xx$, deviendra $\frac{dd}{\delta\delta}yy = dx - xx$; & la ſeconde $\frac{d}{p}yy = \frac{1}{4}dd - xx$ deviendra $\frac{dd}{\delta\delta}yy = \frac{1}{4}dd - xx$. Multipliant cette derniere par $\frac{\delta\delta}{dd}$, elle deviendra $yy = \frac{1}{4}\delta\delta - \frac{\delta\delta}{dd}xx$; & tranſpoſant $\frac{\delta\delta}{dd}xx = \frac{1}{4}\delta\delta - yy$, ou bien $\frac{\delta\delta}{dd}xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$,

& mettant $\frac{\delta}{\pi} = \frac{\delta\delta}{dd}$, l'on aura $\frac{\delta}{\pi} xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$, qui eſt l'équation à l'ellipſe par raport au diametre conjugué $dD = \delta$, dont le parametre eſt π, laquelle donne cette proportion, Le parametre π du ſecond diametre dD eſt au ſecond diametre $dD(\delta)$, comme le quarré de l'ordonnée $Ce = BK(x)$ eſt au produit $de \times eD = \frac{1}{4}\delta\delta - yy = \overline{\frac{1}{2}\delta + y} \times \overline{\frac{1}{2}\delta - y}$.

Corollaires de la formation de l'ellipſe.

381. LE premier, le ſecond, le troiſiéme, le quatriéme & le cinquiéme Corollaires de la parabole conviennent auſſi à l'ellipſe.

VI.

382. On peut voir par l'équation $\frac{dd}{\delta\delta} yy = \frac{1}{4} dd - xx$, les endroits où l'ellipſe rencontre le diametre Aa, & le point qui en eſt le plus écarté. Car, 1°. quand $KB(x)$ eſt zero, ce qui arrive au centre K, $yy = \frac{1}{4}\delta\delta$, ainſi $y = \frac{1}{2}\delta = KD$, qui eſt le point de l'ellipſe le plus éloigné du diametre Aa. 2°. Quand $KB(x) = KA$ ou $Ka(\frac{1}{2}d)$, alors $\frac{dd}{\delta\delta} yy = \frac{1}{4} dd - \frac{1}{4} dd = 0$; ainſi $y = 0$ au ſommet A, & de même au point a; ce qui fait voir que l'ellipſe rencontre chaque diametre comme Aa en deux points A & a également éloignés du centre K. 3°. $KB(x)$ ne peut pas ſurpaſſer $AK(\frac{1}{2}d)$, parcequ'autrement le ſecond membre $\frac{1}{4} dd - xx$ ſeroit négatif, & par conſequent la valeur de y ſeroit imaginaire, c'eſt-à-dire impoſſible.

VII.

383. Les quarrés de deux ordonnées BC, bC, ſont entr'eux comme les produits des ſegmens $AB \times aB$, $Ab \times ba$, dans leſquels ces ordonnées partagent le diametre.

VIII.

384. Si l'on décrivoit un cercle ſur le diametre Aa, & qu'on prolongeât les ordonnées BC juſqu'à la circonference, les quarrés des ordonnées du cercle étant égaux chacun au produit des ſegmens du diametre dans leſquels ces ordonnées le partagent*, les quarrés des ordonnées BC, bC à l'ellipſe ſeroient entr'eux comme les quarrés des ordonnées au cercle par les mêmes points; d'où il ſuit, en prenant les racines de ces quarrés, que les ordonnées à l'ellipſe ſont * 289.

entr'elles comme les ordonnées au cercle par les mêmes points.

PROBLÈME II.

385. *MENER une tangente* SC *par un point donné* C *de l'ellipſe dont* Aa (d) *eſt le premier diametre,* Dd (δ) *le ſecond diametre,* BC (y) *l'ordonnée au point donné* C, *&* KB (x) *la coupée; & l'équation eſt* $\frac{dd}{\delta\delta}yy - \frac{1}{4}dd + xx = 0$.

FIG. XX.

371. IL faut trouver la ſoutangente $BS = s$, & ſuppoſer $x = x + e$, & $y = y - \frac{ey}{s}$; parceque les $KB(x)$ croiſſant, les $BC(y)$ diminuent; & mettre dans l'équation ces valeurs de x & de y, & faiſant comme dans la parabole, on trouvera $\frac{dd}{\delta\delta}yy - \frac{2dd}{\delta\delta s}eyy + \frac{dd}{\delta\delta ss}eeyy = 0$.

$$-\frac{1}{4}dd + 2ex + ee + xx$$

d'où l'on déduira $\frac{dd}{\delta\delta}yy = x$, & (en mettant pour $\frac{dd}{\delta\delta}yy$ ſa valeur $\frac{1}{4}dd - xx$) $\frac{1}{4}dd - xx = sx$, & $BS(s) = \frac{\frac{1}{4}dd - xx}{x}$.

Ce qu'il falloit trouver.

386. D'où l'on déduit $KS = s + x = \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$. Ce qui donne cette proportion $KB(x) . KA(\frac{1}{2}d) :: KA(\frac{1}{2}d) . KS(s + x) = \frac{\frac{1}{4}dd}{x}$, qu'il faut remarquer.

387. Si on vouloit ſe ſervir de l'équation par raport au ſecond diametre Dd qui eſt $\frac{\delta\delta}{dd}xx - \frac{1}{4}\delta\delta + yy = 0$, l'on trouveroit la ſoutangente $ef(\sigma) = \frac{\frac{1}{4}\delta\delta - yy}{y}$, & $Kf = \frac{\frac{1}{4}\delta\delta}{y}$; ce qui donneroit Ke ou $BC(y) . KD(\frac{1}{2}\delta) :: KD(\frac{1}{2}\delta) . Kf(\sigma + y) = \frac{\frac{1}{4}\delta\delta}{y}$.

Corollaire du Problème précedent.

388. SI l'on tire le diametre CKc, & qu'on prenne ce diametre pour AKa (fig. 17), & la ligne fCS (fig. 20) pour la ligne $PGAg$ (fig. 17), & qu'on prenne auſſi pour parametre $AP(p)$ (fig. 17), la 3e proportionelle au diametre CKc (fig. 20), & à ſon diametre conjugué GKg qui eſt la parallele à la tangente SCf par le centre K, & qu'on forme l'ellipſe* comme

FIG. XX. & XVII.

*361.

361. dans la figure 17, l'on tracera la même ellipſe de la figure 20 ; dont l'équation ſera, en tirant AI parallele à CS, $\frac{cc}{p} \times \overline{AI}^2 = CI \times Ic$; d'où l'on voit que tous les diametres de l'ellipſe paſſent par le centre K, & qu'ils ſont partagés à ce centre K en deux parties égales KC, Kc ; ce que l'on vient de dire du diametre CKc convenant à tous les autres.

POUR L'HYPERBOLE.

389. SOIT le parametre $AP = p$, chaque coupée $AB = x$, chaque ordonnée $BC = y$, le diametre $Aa = d$, $PF = f$. A cauſe des triangles ſemblables APF, ABC, comme auſſi APf, Abc, l'on a, $AP\,(p).\ PF\,(f) :: BC\,(y).\ AB\,(x)$, d'où l'on déduit $f = \frac{px}{y}$; les triangles ſemblables AaG, BaC, donnent auſſi, $Aa\,(d).\ AG = PF\,(f) :: aB\,(d+x).\ BC\,(y)$, d'où l'on tire $f = \frac{dy}{d+x} = \frac{px}{y}$, ce qui donne l'équation à l'hyperbole $\frac{d}{p}\,yy = dx + xx = d + x \times x = aB \times AB$; ainſi dans l'hyperbole $AP\,(p).\ Aa\,(d) :: \overline{BC}^2\,(yy).\ aB \times AB\,(dx + xx)$. Fig. XVIII.

390. Si au lieu de $AB = x$, on ſuppoſe $KB = x$ (K eſt le milieu du diametre Aa, & ſe nomme le *centre*), alors $aB = \frac{1}{2}d + x$, & $AB = KB - KA = x - \frac{1}{2}d$, & l'on aura cette ſeconde expreſſion de la même équation $\frac{d}{p}\,yy = xx - \frac{1}{4}dd$.

391. Pour avoir d'autres expreſſions de l'équation à l'hyperbole, on remarquera que chaque diametre comme $Aa\,(d)$ a ſon parametre déterminé $AP\,(p)$; & que ſon ſecond diametre $Dd\,(\delta)$ qui paſſe par le centre K, eſt parallele aux ordonnées BC du premier diametre, & qu'il eſt la ligne moyenne proportionelle entre le premier diametre $Aa\,(d)$ & ſon parametre $AP\,(p)$; ainſi $Aa\,(d).\ Dd\,(\delta) :: Dd\,(\delta).\ AP\,(p)$; par conſequent $p = \frac{\delta\delta}{d}$, & $\delta = \sqrt{dp}$: le ſecond diametre a auſſi ſon parametre π, qui eſt la ligne troiſiéme proportionelle au ſecond diametre δ & au premier d ; ainſi $\pi = \frac{dd}{\delta}$ & $d = \sqrt{\pi\delta}$.

Autre expreſſion de l'équation à l'hyperbole.

392. IL ſuit de là que $\frac{d}{p} = \frac{dd}{\delta\delta}$ en mettant dans $\frac{d}{p}$ au lieu de p ſa valeur $\frac{\delta\delta}{d}$; ainſi on peut mettre dans les équations précedentes à l'hyperbole $\frac{dd}{\delta\delta}$ au lieu de $\frac{d}{p}$, & elles ſeront changées en $\frac{dd}{\delta\delta}\,yy = dx + xx$; & $\frac{dd}{\delta\delta}\,yy = xx - \frac{1}{4}dd$.

393. On peut auſſi rapporter l'hyperbole immédiatement à ſon ſecond diametre $Dd(\delta)$, en ſe ſervant de la ſeconde équation; car puiſque $\frac{dd}{\delta\delta}yy = xx - \frac{1}{4}dd$, en multipliant le tout par $\frac{\delta\delta}{dd}$, & tranſpoſant l'on aura $\frac{\delta\delta}{dd}xx = yy + \frac{1}{4}\delta\delta$; & mettant encore, ſi l'on veut, au lieu de $\frac{\delta\delta}{dd}$ ſa valeur $\frac{\delta}{\pi}$, puiſque $\pi = \frac{dd}{\delta}$, l'on aura $\frac{\delta}{\pi}xx = yy + \frac{1}{4}\delta\delta$, c'eſt-à-dire le parametre du ſecond diametre π. $Dd(\delta) :: \overline{bC}^2 = \overline{KB}^2(xx).\ \overline{Kb}^2 + \overline{KD}^2(yy + \frac{1}{4}\delta\delta)$.

COROLLAIRES.

394. LES cinq premiers Corollaires de la parabole conviennent auſſi à l'hyperbole.

VI.

395. L'ÉQUATION de l'hyperbole ACC convient auſſi à l'hyperbole oppoſée $a\chi$, & on peut la déduire de la même maniere de la formation de l'hyperbole; car nommant $a\beta(x)$, $\beta\chi(y)$, $P\varphi(f)$, $Aa(d)$, $AP(p)$, les triangles ſemblables $AP\varphi$ & $A\beta\chi$ donneront $AP(p).\ P\varphi(f) :: \beta\chi(y).\ A\beta(d+x)$; d'où l'on aura $f = \frac{p \times d+x}{y}$: Les triangles ſemblables $Aa\gamma$ & $a\beta\chi$ donneront auſſi $Aa(d).\ A\gamma = P\varphi(f)$ (par la ſuppoſition *) $:: a\beta(x).\ \beta\chi(y)$; d'où l'on aura $f = \frac{dy}{x} = \frac{p \times \overline{d+x}}{y}$, qui ſe réduit à $\frac{d}{p}yy = dx + xx$, qui eſt la même équation qu'on avoit trouvée pour l'hyperbole ACC, par laquelle on voit que quand $a\beta(x) = AB(x)$, $\beta\chi(y)$ ſe trouve neceſſairement $= BC(y)$; ce qui fait voir que ces deux hyperboles ſont égales, de maniere qu'on peut les ajuſter l'une ſur l'autre.

Fig. XVIII.

* 361.

VII.

396. Il eſt évident par cette équation que plus les x augmentent, plus les y augmentent auſſi, ce qui fait voir que l'hyperbole s'écarte à l'infini de ſon diametre.

PROBLÊME III.

397. *MENER une tangente* SC *par un point donné* C *de l'hyperbole dont le premier diametre eſt* Aa (d); *le ſecond* Dd (δ); *le parametre du premier diametre* Aa (p); *la coupée* KB (x); *l'ordonnée* BC (y); *la ſoutangente* BS (s), *& l'équation* $\frac{d}{p}yy + \frac{1}{4}dd - xx = 0$.

Fig. XXI.

Il faut * mettre dans l'équation $x+e$ à la place de x, & * 371.
$y+\frac{cy}{s}$ à la place de y, parceque $AB\,(x)$ augmentant de $+e$, y augmente auſſi de $+\frac{cy}{s}$; & l'on aura $\frac{d}{P}yy+\frac{2de}{Ps}yy+\frac{dee}{Pss}yy=0$,
$-xx \quad -2ex \quad -ee$
$+\frac{1}{4}dd$

d'où l'on tire * $\frac{d}{Pss}yy=x$, & (en mettant au lieu de $\frac{d}{P}yy$ ſa * 371.
valeur $xx-\frac{1}{4}dd$) $BS\,(s)=\frac{xx-\frac{1}{4}dd}{x}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente $BS\,(s)$ que l'on cherchoit, puiſque $BK\,(x)$ eſt ſuppoſée connue.

398. D'où l'on déduit $KS=KB-BS\,(x-s)=\frac{\frac{1}{4}dd}{x}$; par conſequent $KB\,(x).\,KA\,(\frac{1}{2}d)::KA\,(\frac{1}{2}d).\,KS\,(x-s)$
Ce qu'il faut remarquer.

COROLLAIRE I.

399. L'ON peut déduire de ce Problême le même Corollaire que l'on a tiré du Problême de l'ellipſe, pour décrire la même hyperbole par le moyen du nouveau premier diametre CKc, de la tangente SC & du parametre de ce nouveau diametre CKc, lequel parametre ſe trouve en menant par le ſommet A l'ordonnée AI au nouveau diametre parallele à la tangente SC, & faiſant enſuite cette proportion. Le produit des ſegmens cI par CI du diametre cKC prolongé, eſt au quarré de l'ordonnée AI à ce diametre CKc, comme ce diametre CKc eſt au parametre de ce diametre CKc. Cette proportion eſt déduite de l'équation à l'hyperbole; & les trois premiers termes étant connus, le parametre du diametre CKc devient auſſi connu; le nommant p, l'équation ſera $\frac{cKc}{P}\times\overline{AI}^{2}=CI\times Ic$.

COROLLAIRE II.

Où l'on trouve la maniere de tirer les aſymptotes de l'hyperbole.

400. AYANT trouvé que $KS\,(x-s)=\frac{\frac{1}{4}dd}{x}$; ſi l'on ſuppoſe Fig. XXI.
$KS=0$, l'on aura 1°. $x-s=0$, & par conſequent la ſoutangente $s=x$, quand $KS=0$; & AS qui eſt la diſtance du ſommet A au point S de la ſoutangente devient $KA\,(\frac{1}{2}d)$;
2°. $\frac{\frac{1}{4}dd}{x}=0$ dans ce cas: or quand une fraction eſt égale à

zero, il faut que le dénominateur ſoit infiniment grand par raport au numerateur; ainſi quand $KS = 0$, & $s = x$, il faut que la coupée $AB\,(x)$ ſoit infinie par raport à $\frac{1}{4}\,dd$. Mais les x croiſſant, les y croiſſent auſſi; c'eſt pourquoi quand x eſt infinie, y l'eſt auſſi: d'où l'on voit que quand $KS = 0$, c'eſt-à-dire, quand la ſoutangente commence au centre K, la tangente SC ne touche l'hyperbole qu'à une diſtance infinie; & c'eſt ce qu'on appelle *l'aſymptote* de l'hyperbole: & la ſeconde branche Acc de l'hyperbole ayant une ſemblable tangente, étant entierement égale à la premiere, elle a auſſi ſon aſymptote, & ces deux aſymptotes le ſont auſſi des deux branches de l'hyperbole oppoſée acc.

L'on a déja un point des aſymptotes au centre K; voici la maniere de trouver le ſecond point. L'équation $\frac{d}{p}yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$ par raport à $KB\,(x)$ infinie, & à $BC\,(y)$ auſſi infinie, c'eſt-à-dire, par raport au point C infiniment éloigné de K où l'aſymptote touche l'hyperbole, devient $\frac{d}{p}yy - xx = 0$; car $\frac{1}{4}dd$ s'évanouit de l'équation, étant zero par raport aux deux autres termes où ſont y & x; l'on a donc $dyy = pxx$ & $y\sqrt{d} = x\sqrt{p}$, ce qui donne $x.y :: \sqrt{d}.\sqrt{p}$. Or en menant tAT par le ſommet A parallele aux ordonnées BC, l'on a deux triangles ſemblables KAT, KBC, dont le dernier eſt infiniment grand, & cependant l'eſprit peut l'appercevoir & le ſuppoſer; l'on a donc $KB\,(x).\ BC\,(y) :: KA.\ AT$: mais $x.y :: \sqrt{d}.\sqrt{p}$, donc $\sqrt{d}.\sqrt{p} :: KA\,(\frac{1}{2}d).\ AT = \frac{\frac{1}{2}d\sqrt{p}}{\sqrt{d}} = \frac{1}{2}\sqrt{dp}$; par conſequent ſi l'on fait $AT = \frac{1}{2}\sqrt{dp}$, c'eſt-à-dire, égale à la moitié de la moyenne proportionelle entre le premier diametre Aa & ſon parametre p (laquelle moyenne proportionelle eſt auſſi le ſecond demi-diametre *), & qu'on tire la droite KT, elle ſera l'aſymptote de la branche ACC, & tirant de même At, ce ſera l'aſymptote de la ſeconde branche Acc; & les prolongeant du côté de l'hyperbole oppoſée acc, elles en ſeront auſſi les aſymptotes.

* 391.

On trouve par une ſemblable méthode les aſymptotes des courbes des autres genres plus élevés qui en ont.

THEOREME.

THEORÊME.

Des proprietés de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

401. UNE hyperbole *ccACC* & ſon oppoſée étant tracée ſur un plan avec un de ſes diametres quelconque donné *Aa*, ſon ſecond diametre *dKD*, & la tangente *tAT* à l'extrêmité de ce diametre qui eſt toujours parallele au ſecond diametre; ſi l'on fait *AT*, *At* chacune égale à la moitié du ſecond diametre *dKD*, qu'on tire *KT*, *Kt*, & qu'on les prolonge à l'infini du côté de *A* & du côté de a; ces lignes ſeront *les aſymptotes* de l'hyperbole *cAC* & de ſon oppoſée; c'eſt-à-dire, que chacune des quatre branches des hyperboles oppoſées s'approchera toujours de plus en plus de ſon aſymptote ſans pourtant la rencontrer, ſi ce n'eſt à une diſtance infinie. FIG. XXI.

DEMONSTRATION.

NOMMANT $KA(\frac{1}{2}d)$, $KD(\frac{1}{2}\delta)$, $KB(x)$, $BC(y)$, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables KAT, KBE, $KA(\frac{1}{2}d) . AT = KD(\frac{1}{2}\delta) :: KB(x) . BE = \frac{\delta x}{d}$; ainſi $CE = \frac{\delta x}{d} - y$. Or l'équation à l'hyperbole $\frac{dd}{\delta\delta} yy = xx - \frac{1}{4}dd$, donne $y = \frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; ainſi $CE = \frac{\delta}{d} \times x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; d'où il ſuit que plus x augmente, & plus CE diminue, & par conſequent l'hyperbole approche toujours de ſon aſymptote, & que cependant elle ne la rencontrera qu'à une diſtance infinie; car la valeur de CE demeurera toujours poſitive, juſqu'à ce que x ſoit infinie; & quand elle le ſera, CE deviendra zero, ($-\frac{1}{4}dd$ étant zero par raport à $+xx$); & l'aſymptote touchera l'hyperbole.

PREMIERE PROPRIETÉ.

402. SI l'on tire des paralleles *ecBCE* à la tangente *tT*; ou, ce qui eſt la même choſe, au ſecond diametre *dD*, qui ſe terminent de part & d'autre aux aſymptotes; $CE \times Ce = \overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$; car, par ce qui précede, $CE = \frac{\delta}{d} \times x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$, & $Ce = Be(\frac{\delta}{d}x) + BC(+y = +\frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd})$; donc $CE \times Ce = \frac{\delta}{d} \times x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd} \times \frac{\delta}{d} \times x + \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd} = +\frac{1}{4}\delta\delta = \overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$.

Il eſt évident qu'on prouvera de même que $ce \times cE = \overline{At}^2 = \overline{Kd}^2$.

403. Si l'on mene auſſi des paralleles $Ce\varepsilon\chi$ au premier diametre, qui ſe terminent aux hyperboles oppoſées, & qui coupent les aſymptotes en e, ε; $Ce \times C\varepsilon = \overline{KA}^2$; car les triangles ſemblables KBE, Kbe donneront $BE(\frac{\delta x}{d}) . KB(x) :: Kb(y = \frac{\delta}{d}\sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}) . be = \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; d'où l'on aura $Ce = x - \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$, & $C\varepsilon = Cb + b\varepsilon = x + \sqrt{xx - \frac{1}{4}dd}$; donc $Ce \times C\varepsilon = +\frac{1}{4}dd = \overline{KA}^2$.

Fig. XXII.

* 401.

SECONDE PROPRIETE'.

404. SI l'on tire par un point quelconque C de l'hyperbole ou de ſon oppoſée, des lignes droites comme GCg, ECe, &c. qui coupent chacune l'hyperbole en deux points C, c; C, i, & qui ſe terminent aux aſymptotes en E, e, en G, g; les deux parties de chacune de ces lignes droites compriſes entre l'hyperbole & l'aſymptote, comme CE, ce, ou CG, ig, &c. ſont égales. Si l'on en tire de même aux hyperboles oppoſées, comme $Ce\varepsilon\chi$, $CL l\chi$, les parties Ce, $\chi\varepsilon$, ſont égales, comme auſſi CL, χl ſeront égales.

Fig. XXII.

1°. Cette proprieté eſt évidente par raport aux lignes droites paralleles au demi-diametre dD; car la ligne BE, par exemple de $ECBce$, eſt égale à Be; & de plus l'ordonnée BC à l'ordonnée Bc; ainſi $CE = ce$. Il en eſt de même des paralleles $Ce\varepsilon\chi$ au premier diametre.

2°. Voici la démonſtration pour les autres lignes comme $GCig$; il faut démontrer que $CG = ig$. Pour le faire on menera par C & par i les paralleles au ſecond diametre $ECce$, $Hqih$, & on nommera $CE = ce(e)$, $Ce = cE(c)$, $qH = ih(i)$, $iH = qh(h)$, $iC(b)$; & les lignes qu'on veut prouver égales $CG(z)$, $ig(u)$. Les triangles ſemblables HGi, EGC donneront $iH(h) - CE(-e) . CE(e) :: iC(b) . CG(z = \frac{be}{b-e})$. De même les triangles ſemblables Cge, igh, donneront $Ce(c) - ih(-i) . ih(i) :: iC(b) . ig(u = \frac{bi}{c-i})$. Il reſte à démontrer que $CG(z = \frac{be}{b-e}) = ig(u = \frac{bi}{c-i})$. Il n'y a qu'à les réduire au même dénominateur, & l'on aura $z = \frac{bee - bei}{b-e \times c-i}$, & $u = \frac{bih - bei}{b-e \times c-i}$; effaçant dans chacune $-bei$, & diviſant chaque reſte par $\frac{b}{b-e \times c-i}$, il reſte d'un côté ce, & de l'autre ih. Or $ce = Ce \times CE$, & $ih = iH \times qH$; & ces deux

produits ſont égaux * chacun à $\overline{AT}^2 = \overline{KD}^2$; ainſi ils ſont égaux ; donc $CG = ig$. *Ce qu'il falloit démontrer.* * 402.

On démontrera de même que $CL = \varkappa l$ en menant par L & l des paralleles au premier diametre KA.

COROLLAIRE.

Où l'on donne une deſcription facile de l'hyperbole.

405. ON trouve par cette proprieté tous les points qu'on veut d'une hyperbole & de ſon oppoſée, dont on a les aſymptotes & un ſeul point C ; car il n'y a qu'à mener par C tant de lignes droites qu'on voudra, comme Cg, CG, $C\varkappa$, &c. & prendre ſur chacune, par exemple ſur GCg la partie $ig = CG$, & le point i ſera un des points de l'hyperbole : il en eſt de même des autres, & chaque point qu'on trouve, peut ſervir de même à en trouver tant d'autres qu'on voudra.

TROISIE'ME PROPRIETE',

Où l'on explique l'équation de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes.

406. SI l'on tire par le ſommet A du diametre Aa, AF parallele à l'aſymptote $Kftg$, & Af parallele à l'autre aſymptote, & qu'on tire par un point quelconque c de l'hyperbole les paralleles cM, cN aux aſymptotes juſqu'à la rencontre des aſymptotes en M & N ; l'on aura toujours $KM \times Mc = Kf \times Af$. Il en eſt de même de l'hyperbole oppoſée, ce qui donne $KM . Kf :: Af . Mc$. Fig. XXII.

1°. Il eſt évident que la tangente tAT étant partagée également en A, Af parallele à la baſe KT du triangle KtT partage auſſi Kt en deux parties égales en f ; ainſi Kf, ft, & AF qui eſt parallele à Kf, ſont trois lignes égales. Par la même raiſon KF, FT, Af, ſont égales. 2°. Menant par c, $ecCE$ parallele à la tangente, on nommera les connues $AT = At = KD\ (\frac{1}{2}\delta)$; $KF = FT = Af\ (a)$; $Kf = ft = AE\ (b)$; les inconnues $KM = Nc\ (x)$, $Mc = KN\ (y)$; & l'on aura à cauſe des triangles ſemblables AFT, cNE, $AF\ (b) . AT\ (\frac{1}{2}\delta) :: Nc\ (x) . cE = \frac{\frac{1}{2}\delta x}{b}$; de même les triangles ſemblables Aft, cMc, donneront $Af\ (a) . At\ (\frac{1}{2}\delta) :: Mc\ (y) . ce = \frac{\frac{1}{2}\delta y}{a}$. Mais $cE \times ce = \overline{AT}^2$ * ; ainſi $\frac{\frac{1}{4}\delta\delta xy}{ab} = \frac{1}{4}\delta\delta$; * 402.

d'où l'on déduit $xy = ab$, c'eſt-à-dire $KM \times Mc = Kf \times fA$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ainſi $KM \times Mc = Kf \times fA$; c'eſt-à-dire, $xy = ab$ eſt l'équation de l'hyperbole par raport à ſes aſymptotes, & elle exprime le raport de tous les points c de l'hyperbole à l'aſymptote KM par le moyen des coupées $KM\ (x)$, & des ordonnées $Mc\ (y)$; & elle convient de même à l'autre branche & à l'hyperbole oppoſée.

PROBLÈME IV.

407. *MENER une tangente* Sqs *par un point donné quelconque* q *de* Fig. XXII. *l'hyperbole, en ſe ſervant de l'équation aux aſymptotes* xy — ab = 0 ; *c'eſt-à-dire, ayant mené l'ordonnée* qV, *trouver la ſoutangente* VS.

SOIT $KV = x$, $Vq = y$, $VS = s$, on trouvera par la * 371. methode * en mettant $x + e$ à la place de x, & $y - \frac{ey}{s}$ à la place de y dans $xy - ab = 0$, $s = x$; ce qui fait voir qu'en prenant $VS\ (s) = KV\ (x)$; & tirant Sqs, elle ſera la tangente.

COROLLAIRE I.

408. PUISQUE l'ordonnée qV partage KS en deux parties égales, il eſt évident qu'étant parallele à la baſe Ks du triangle KSs, elle partage auſſi la tangente Sqs en deux parties égales au point touchant q.

COROLLAIRE II.

Où l'on explique l'hyperbole équilatere.

409. SI l'on mene par le centre K & par le point touchant q une ligne Kq, ce ſera la moitié d'un premier diametre, & la moitié qS de la tangente sqS ſera égale à la moitié du ſecond * 401. diametre *, & lui ſera parallele. Or ſi un ſeul premier diametre de l'hyperbole eſt égal à ſon ſecond diametre, (ce qui ne peut pas arriver que le premier & le ſecond diametre * 391. ne ſoient chacun égal au parametre *), 1°. l'angle FKf des aſymptotes ſera droit ; 2°. chaque premier diametre de l'hyperbole ſera toujours égal à ſon ſecond diametre, & par conſequent auſſi à ſon parametre.

1°. Car ſoit Kq la moitié d'un premier diametre quelconque, & sqS la tangente au ſommet q de ce premier dia-

mètre, la moitié qS de la tangente ſera égale à la moitié du ſecond diametre; par conſequent ſi le premier diametre eſt égal à ſon ſecond diametre, Kq ſera égale à qS, & le triangle KqS étant iſocele, l'ordonnée qV au point touchant parallele à l'aſymptote Kf partageant KS en deux parties égales en V, ſera perpendiculaire ſur l'aſymptote KF; l'aſymptote Kf ſera donc auſſi perpendiculaire au point K ſur Kf.

2°. Puiſqu'il ſuit de l'égalité d'un ſeul premier diametre & de ſon ſecond diametre, que l'angle des aſymptotes eſt droit, une ordonnée quelconque qV étant parallele à l'autre aſymptote Kf, ſera perpendiculaire ſur KF; & ſi l'on mene par ce point q une tangente qS & un diametre Kq, le point V de la perpendiculaire qV étant au milieu de KS, le point touchant q ſera également éloigné de K & de S; par conſequent $Kq = qS$; la moitié Kq d'un premier diametre quelconque ſera donc égale à la moitié qS de ſon ſecond diametre.

Définition de l'hyperbole équilatere.

110. UNE hyperbole dont l'angle des aſymptotes eſt droit, s'appelle *équilatere*, & dans une hyperbole équilatere, chaque premier diametre eſt égal à ſon ſecond diametre, comme auſſi à ſon parametre. L'équation de l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes eſt $xy = aa$, quand KA eſt l'axe; & $xy = ab$, quand KA eſt un autre diametre que l'axe. Cette équation convient auſſi à toute autre hyperbole par raport aux aſymptotes; ainſi l'équation à l'hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes ne differe pas des autres: Mais par raport aux diametres, l'équation à l'hyperbole $\frac{q}{p}yy = xx - \frac{1}{4}dd$ devient pour l'hyperbole équilatere $yy = xx - \frac{1}{4}dd$; & par raport au ſecond diametre $xx = yy + \frac{1}{4}\delta\delta$, $\frac{1}{4}\delta\delta = \frac{1}{4}dd$. On ſe ſert beaucoup dans la réſolution des Problêmes de l'hyperbole équilatere, parcequ'elle eſt la plus ſimple.

PROBLÊME V.

Uſage de la méthode des tangentes pour trouver par une même operation les tangentes d'une infinité de courbes.

111. *TROUVER les ſoutangentes de toutes les courbes à l'infini repréſentées par cette équation* $p^{m-1}x = y^m$, *ou bien (ſuppoſant, pour abreger le calcul, le parametre* $p = 1$) $ix = y^m$,

On remarquera que quand m eſt une grandeur poſitive, l'équation précedente eſt l'équation qui convient aux paraboles de tous les degrés à l'infini, & que quand m eſt négative, $1x = y^{-m}$, ou bien $xy^m = 1$ eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés à l'infini par raport aux aſymptotes.

* 371. Il faut mettre dans l'équation $y^m - 1x = 0$, $\overline{y + \frac{ey}{s}}^m$ * à la place de y^m, & $x + e$ à la place de x; & il ſuffit d'aller ici juſqu'au ſecond terme où e eſt lineaire, ſi ce n'eſt dans les cas * 372. de la remarque *: ainſi l'on trouvera $y^m + \frac{me}{s} y^m = 0$, ce qui
$\quad - x \quad - 1e$
donne $s = my^m$, & en mettant pour y^m ſa valeur $1x$, l'on trouve $s = mx$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Quand dans l'équation $y^m - 1x = 0$, $m = 2$, la ſoutangente s eſt égale à deux fois la coupée x, comme on l'a * 371. trouvé ci-deſſus *; quand $m = 3$, la ſoutangente eſt égale à $3x$, & ainſi à l'infini. Quand m eſt négative, & que l'équation $xy^m - 1 = 0$, eſt aux hyperboles de tous les degrés par raport à leurs aſymptotes, ſi $m = 1$, la ſoutangente eſt $s =$ * 407. $- 1x$, comme on l'a trouvée ci-deſſus *, la valeur négative $- 1x$ de la ſoutangente marque qu'il la faut prendre du côté oppoſé à l'origine K, comme l'on a pris VS (fig. 22.) Si $m = 2$, la ſoutangente $S = - 2x$, & ainſi à l'infini.

412. On trouvera de même en mettant $x + e$ au lieu de x, & $y + \frac{ey}{s}$ au lieu de y, que les ſoutangentes des ellipſes de tous les degrés à l'infini, dont l'équation eſt $\frac{d}{p} y^{m+n} = x^m \times \overline{d - x}^n$, ſont repréſentées par $s = \frac{m+n}{md - mx - nx} \times \overline{ax - xx}$; & que les ſoutangentes de toutes les hyperboles dont les équations par raport à leurs diametres ſont repréſentées par $\frac{d}{p} y^{m+n} = x^m \times \overline{d + x}^n$, ſont auſſi repréſentées par $s = \frac{m+n}{md + mx + nx} \times \overline{dx + xx}$. Les Lecteurs les trouveront facilement par l'application qu'on * 371. vient de faire de la méthode * des tangentes à l'équation generale des paraboles & des hyperboles de tous les genres, laquelle ſuffit pour faire concevoir la maniere de l'appliquer à toutes les autres équations generales & particulieres des courbes geometriques.

De la description des courbes en trouvant plusieurs de leurs points très-proches les uns des autres.

POUR LES TROIS SECTIONS CONIQUES.

113. ON menera d'abord les deux lignes des coordonnées OAa, OE, perpendiculaires l'une à l'autre, parceque la description suivante convient aux axes des trois sections coniques. On suppose un point donné F sur OAa qu'on appelle *le foyer*; & deux lignes connues og, gh, qu'on nommera la premiere m, la seconde n: Cela supposé, 1°. il faut partager OF en A, de façon que $OA . AF :: og\,(m) . gh\,(n)$; en faisant à part l'angle quelconque hof, & prenant $og = m$, $gh = n$, & $of = OF$, joignant hf, & tirant par g, ga, parallele à hf, l'on aura $oa . af :: og\,(m) . gh\,(n)$; ainsi l'on aura le point A qu'on cherchoit sur OAF. 2°. Il faut faire AG perpendiculaire sur OAF égale à AF, & tirer la ligne indéfinie $OGHD$. 3°. Pour avoir tel point qu'on voudra de la section conique qu'on veut décrire, il faut prendre sur l'axe OAF le point B où l'on voudra, & après avoir élevé BD perpendiculaire à l'axe jusqu'à la ligne $OGHD$, ouvrir le compas de la grandeur de BD, & mettant une pointe sur le foyer F, tracer avec l'autre pointe un arc qui coupe BD en C. FIG. XXIII.

Le point C ainsi trouvé est un point de la parabole, quand $m = n$; de l'ellipse, quand m surpasse n; de l'hyperbole, quand m est moindre que n; & l'on trouvera de la même maniere tant d'autres points que l'on voudra, & aussi proches les uns des autres qu'on voudra. On va mettre en Problême la maniere de démontrer ces trois cas.

PROBLÊME VI.

POUR LA PARABOLE.

114. *QUAND* m = n, *trouver l'équation de la courbe, dont* C *est l'un des points.*

SOIT $OA = \frac{1}{4}p$, ainsi $AF = OA = \frac{1}{4}p$; soit $AB = x$, $BC = y$; soit menée la ligne FC égale à BD par la construction. A cause des triangles rectangles semblables OAG, OBD, l'on a $OA\,(\frac{1}{4}p) . AG\,(\frac{1}{4}p) :: OB\,(\frac{1}{4}p + x) . BD = FC = \frac{1}{4}p + x$; l'on a aussi $FB = AB\,(x) - AF\,(-\frac{1}{4}p) = x - \frac{1}{4}p$: & à cause du triangle rectangle FCB, $\overline{FC}^2\,(\frac{1}{16}pp + \frac{1}{2}px + xx) - \overline{FB}^2\,(-xx + \frac{1}{2}px - \frac{1}{16}pp) = \overline{BC}^2\,(yy)$; d'où

l'on déduit $px = yy$, qui eſt l'équation à la parabole : AB eſt l'axe, parceque les ordonnées $BC\,(y)$ lui ſont perpendiculaires, & $p = 4OA\,(4 \times \frac{1}{4}p)$ eſt le parametre de l'axe.

REMARQUES.

I.

415. LA ligne $OGHD$ eſt tangente du point H où ſe termine l'ordonnée au foyer FH ; car nommant $AF\,(x)$, OF ſera
* 371. égale à $2x$, qui eſt la ſoutangente de la parabole *.

II.

416. Si par un point quelconque C de la parabole on mene une
Fig. XXIV. ligne CF au foyer, & la ligne CE parallele à l'axe AB, qui par la conſtruction eſt égale à FC, & après avoir tiré FE, & partagé FE au milieu en L, on mene la ligne CLS, elle ſera tangente au point C ; car les triangles ELC, SLF, ſeront rectangles en L, puiſque le triangle ECF eſt iſocele, & ils ſeront ſemblables & égaux, ayant les côtés EL, LF égaux ; par conſequent $SF = EC = OB$; d'où l'on voit que $SO = FB$, par conſequent $AS = AB$; ainſi $SB = 2AB\,(2x)$
* 371. eſt la ſoutangente du point C *.

III.

417. D'où il ſuit que l'angle sCM que fait la tangente SCs avec la parallele ECM à l'axe par le point C, étant égal à l'angle oppoſé au ſommet ECS, il eſt auſſi égal à l'angle SCF, qui par la conſtruction eſt égal à l'angle ECS.

D'où l'on voit que ſi l'on donnoit à du métal bien poli la figure parabolique que formeroit la parabole CHA en la faiſant tourner autour de ſon axe AFB, on auroit un miroir qui raſſembleroit au foyer F tous les rayons comme MC qui ſeroient paralleles à l'axe AFB ; & qui reflechiſſant les rayons d'un point lumineux qui ſeroit au foyer F, les rendroit tous paralleles à l'axe ; puiſque dans la reflexion chaque angle d'incidence MCs eſt toujours égal à ſon angle de reflexion FCS.

POUR L'ELLIPSE ET L'HYPERBOLE.

418. QUAND m eſt plus grande ou plus petite que n, trouver l'équation de la courbe dont C eſt l'un des points.

Fig. XXIII & XXV. Comme l'ellipſe rencontre ſon axe en deux points A & a, qui ſont les extrêmités de l'axe ; & que l'hyperbole & ſon oppoſée ont

ont auſſi les ſommets aux deux extrêmités $A\alpha$ de l'axe principal : Pour abreger le calcul, il faut, 1°. trouver la longueur Aa & $A\alpha$ de l'axe, le ſecond foyer f ou φ, & le raport de l'axe Aa à la diſtance Ff des foyers, & de $A\alpha$ à $F\varphi$; 2°. après l'avoir partagé au milieu K dans l'ellipſe, & k dans l'hyperbole, il faut trouver la ligne OK & Ok. Puiſque le point a appartient à la courbe, $OA.\ AF :: Oa.\ aF$; en diviſant, $OA - AF.\ AF :: Oa - aF = OF.\ aF$; or les trois premiers termes $OA - AF$, AF, & OF ſont connus : on trouvera donc le quatriéme aF, & y joignant AF, la grandeur de l'axe ſera connue ; & faiſant $af = AF$, l'on aura le ſecond foyer f ; & comme OA ſurpaſſe AF, aF eſt poſitive & ſe trouve du même côté que A par raport à O. Dans l'hyperbole l'on trouvera $OA - AF.\ AF :: -OF.\ -\alpha F$; & comme OA eſt moindre que AF, αF eſt négative, & doit être priſe en allant vers la gauche de F à α. On prendra auſſi $\alpha\varphi = AF$, & φ ſera le ſecond foyer de l'hyperbole, & $A\alpha$ ſera ſon grand axe.

Pour trouver le raport de Aa à Ff, l'on a déja $Oa.\ aF :: OA.\ AF$, en faiſant le changement alterne, $Oa.\ OA :: aF.\ AF$, en diviſant $Oa - OA = Aa.\ OA :: aF - AF = Ff.\ AF$; donc $Aa.\ Ff :: OA.\ AF$: dans l'hyperbole on trouvera $O\alpha + OA = A\alpha.\ OA :: \alpha F + AF = F\varphi.\ AF$; par conſequent $A\alpha.\ F\varphi :: OA.\ AF$.

Pour trouver la valeur de KO ou kO, ſoit Aa ou $A\alpha = a$, Ff ou $F\varphi = f$. On fera cette proportion pour l'ellipſe, $KF(\frac{1}{2}f).\ KA(\frac{1}{2}a) :: AF(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}f).\ OA = \frac{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}af}{\frac{1}{2}f}$; ainſi $KO = OA + AK = \frac{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}af + \frac{1}{4}af}{\frac{1}{2}f} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$. Dans l'hyperbole on aura $kF(\frac{1}{2}f).\ kA(\frac{1}{2}a) :: AF = kF - kA(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}a).\ OA = \frac{\frac{1}{4}af - \frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$, & $kO = kA - OA = \frac{\frac{1}{4}af - \frac{1}{4}af + \frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$. L'on remarquera que KO & $kO = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}$; donnant cette proportion KF & $kF(\frac{1}{2}f).\ KA$ & $kA(\frac{1}{2}a) :: KA$ & $kA(\frac{1}{2}a).\ KO$ & $kO\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right)$, la ligne OH eſt tangente * au point H où eſt * 386. 398.

l'ordonnée FH au foyer F. Ces choſes ſuppoſées, on trouvera l'équation de la courbe de la maniere ſuivante.

Soit KB ou $kB = x$, $BC = y$, KA ou $kA = \frac{1}{2}a$, KF ou $kF = \frac{1}{2}f$, $OB = KO - KB$ dans l'ellipſe ; & dans l'hyperbole $kB - kO = \pm \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} \mp x$. FB (dans l'ellipſe) $= KF - KB$; (dans l'hyperbole) $= kB - kF = \pm \frac{1}{2}f \mp x$. Or les triangles ſemblables OAG, OBD, donnent $OA . AG :: OB . BD = FC$ par la conſtruction ; mais $OA . AG :: \frac{1}{2}Aa$, ou $\frac{1}{2}A\alpha\,(\frac{1}{2}a) . \frac{1}{2}Ff$ ou $\frac{1}{2}F\varphi\,(\frac{1}{2}f)$; ainſi $\frac{1}{2}a . \frac{1}{2}f :: OB\,(\pm \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f} \mp x) . BD$ ou $FC = \pm \frac{1}{2}a \mp \frac{fx}{a}$. Maintenant dans le triangle rectangle FBC, $\overline{FC}^2 - \overline{FB}^2 = \overline{BC}^2$, c'eſt-à-dire $\frac{1}{4}aa - fx + \frac{ffxx}{aa} - \frac{1}{4}ff + fx - xx = yy$, qui ſe réduit à $\frac{aa}{ff - aa}yy = xx - \frac{1}{4}aa$, qui eſt l'équation de l'hyperbole, parceque $F\varphi\,(f)$ ſurpaſſe $A\alpha\,(a)$: mais dans l'ellipſe où $Aa\,(a)$ ſurpaſſe $Ff\,(f)$, il faut tranſpoſer les membres de l'équation, & l'on aura $\frac{aa}{aa - ff}yy = \frac{1}{4}aa - xx$, qui eſt l'équation à l'ellipſe.

Dans l'une & dans l'autre ſi l'on prend 1°. une ligne $\mathfrak{s} = \sqrt{aa - ff} = \sqrt{\overline{Aa}^2 - \overline{Ff}^2} = \sqrt{2AF \times 2aF}$ dans l'ellipſe, $= \sqrt{\overline{F\varphi}^2 - \overline{A\alpha}^2} = \sqrt{2AF \times 2\alpha F}$ dans l'hyperbole, $\mathfrak{s}$ ſera le ſecond axe, & l'on aura $\frac{aa}{\mathfrak{ss}}yy = \mp xx \pm \frac{1}{4}aa$. 2°. Si l'on fait $a . \mathfrak{s} :: \mathfrak{s} . \frac{\mathfrak{ss}}{a} = p$, p ſera le parametre du grand axe, & l'équation ſera $\frac{a}{p}yy = \mp xx \pm \frac{1}{4}aa$.

COROLLAIRE I.

419. LA ſomme $FC + fC$ des deux lignes menées des deux foyers F, f à un point quelconque C de l'ellipſe, eſt égale à l'axe Aa, & la difference $\varphi C - FC$ des deux lignes menées des deux foyers à un point C de l'hyperbole, eſt égale à l'axe $A\alpha$.

FIG. XXIII. & XXV.

DE'MONSTRATION.

SI l'on prend dans l'ellipſe $Kb = KB$, qu'on mene bcd & Fc, ces deux lignes ſont égales par la conſtruction. Et comme $Kb = KB$, bc eſt auſſi égale à BC ; ainſi les triangles rectangles fBC, Fbc ſont égaux, & $Fc = fC$. On prouvera de même dans l'hyperbole, en ſuppoſant $kB = k\beta$, que $\varphi C = F\varkappa$;

ainſi il faut démontrer que $FC+Fc=Aa$; & que $Fx-FC=A\alpha$. $OA.\ AG::\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}f::OB\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}-x\right).\ BD=FC=\frac{1}{2}a-\frac{fx}{a}$. De même $OA.\ AG::\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}f::Ob\left(\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}+x\right).\ bd=Fc=\frac{1}{2}a+\frac{fx}{a}$. Donc $FC+Fc$, ou $FC+fC=a=Aa$.

On fera les mêmes proportions pour l'hyperbole $OA.\ AG::\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}f::OB\left(x-\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right).\ BD=FC=\frac{fx}{a}-\frac{1}{2}a.\ OA.\ AG::\frac{1}{2}a.\ \frac{1}{2}f::O\beta\left(x+\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}f}\right).\ \beta\delta=\varphi C=\frac{fx}{a}+\frac{1}{2}a.$ Donc $\varphi C-FC=a=A\alpha$.

REMARQUE,

Où l'on donne la deſcription ordinaire de l'ellipſe & de l'hyperbole.

420. ON déduit de cette proprieté la maniere ordinaire de décrire l'ellipſe & l'hyperbole, l'axe Aa ou $A\alpha$ étant donné, & les points F, f, ou F, φ des foyers étant auſſi donnés: en prenant dans l'ellipſe avec le compas un ſegment quelconque AB de l'axe Aa, & du foyer F pour centre avec ce rayon AB tirant un arc de cercle, & décrivant enſuite de l'autre foyer f pour centre un autre arc avec l'autre ſegment Ba pour rayon, l'interſection des deux arcs C ſera un point de l'ellipſe; de même dans l'hyperbole décrivant un arc du centre F avec le ſegment quelconque AB de l'axe αA prolongé, & enſuite de l'autre foyer φ pour centre décrivant avec l'autre ſegment αB de l'axe αA prolongé un ſecond arc, le point d'interſection C de ces deux arcs ſera un point de l'hyperbole. FIG. XXIII. & XXV.

COROLLAIRE II.

421. SI l'on mene des foyers F, f par un point quelconque C de l'ellipſe, les lignes FC, fC, & ayant prolongé fC en M en faiſant $CM=CF$, on tire FM, enſuite partageant FM qui eſt la baſe du triangle iſocele FCM en deux moitiés en L, on tire CLS, qui eſt perpendiculaire à FM, elle ſera la tangente au point C. FIG. XXV.

DE'MONSTRATION.

IL faut mener LN parallele à Ff, & par le centre K tirer KN qui ſera auſſi parallele à FLM; car LN partageant MF en deux parties égales en L, partage auſſi Mf en deux parties égales en N; ainſi KN, partageant Ff en deux parties égales en K, & fM en deux parties égales en N, eſt parallele à FM. Mais puiſque $Mf = FC + Cf = Aa$ (a), MN *419. $= NF = \frac{1}{2}a$, CN* $= \frac{fx}{a}$, LN eſt la moitié de Ff; ainſi $LN = \frac{1}{2}f$. Soit $SB = s$, les deux triangles ſemblables CLN, CSf donnent cette proportion $CN\left(\frac{fx}{a}\right)$. $CF\left(\frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a\right)$ :: $LN\left(\frac{1}{2}f\right)$. $Sf = \frac{1}{2}f + \frac{\frac{1}{4}aa}{x}$, retranchant $Bf\left(\frac{1}{2}f + x\right)$ de Sf,

385. l'on aura $SB\,(s) = \frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$, qui eſt la ſoutangente de l'ellipſe.

D'où il eſt évident que les angles FCS, fCs ſont égaux.

COROLLAIRE III.

422. SI l'on mene des foyers F, φ de l'hyperbole à un point quelconque C, les lignes FC, φC, & ayant pris $CM = CF$, & mené FM, on tire CLS par le milieu L de FM baſe du triangle iſocele FCM, CLS eſt la tangente au point C.

FIGURE XXVI.

DE'MONSTRATION.

AYANT mené par le milieu de MF, LN parallele à $Fk\varphi$, & tiré kN qui ſera parallele à MF, il eſt évident, comme dans le ſecond Corollaire, que $M\varphi = aA = a$, $NL = kF$ *419. $= \frac{1}{2}f$, $CM = CF = \frac{fx}{a} - \frac{1}{2}a$*, ainſi $CN = \frac{fx}{a}$, $\varphi C = \frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a$. Soit $SB = s$, les triangles ſemblables CNL, $C\varphi S$ donneront cette proportion $CN\left(\frac{fx}{a}\right)$. $C\varphi\left(\frac{fx}{a} + \frac{1}{2}a\right)$ :: $NL\left(\frac{1}{2}f\right)$. $\varphi S = \frac{1}{2}f + \frac{\frac{1}{4}aa}{x} = x - s$; ôtant $\varphi k\left(\frac{1}{2}f\right)$ de φS, l'on aura

398. $kS = \frac{\frac{1}{4}aa}{x} = kB - SB = x - s$, qui eſt la valeur de kS, c'eſt-à-dire, la diſtance du centre k au point S de la ſoutangente.

423. Il eſt évident que les angles φCS, FCS ſont égaux.

Methode generale de décrire les courbes algebriques en trouvant tant de points qu'on voudra de ces courbes très-proches les uns des autres, l'équation de la courbe étant donnée.

424. 1°. IL faut d'abord tirer les lignes des coordonnées qui ſoient perpendiculaires, ſi l'on veut que ce ſoient les axes, & qui faſſent entr'elles l'angle qu'on voudra, ſi l'on veut qu'elles ſoient d'autres diametres que les axes; il faudra prendre les coupées ou les x ſur l'une, & les ordonnées y ſeront paralleles à l'autre. 2°. Après avoir déterminé le point où commencent les coupées x, il faut ſe ſervir de l'équation de la courbe, & ſuppoſer celle des deux inconnues qui monte au plus haut degré (on ſuppoſe par exemple que c'eſt x) égale à une grandeur connue très-petite, qu'on nommera $1a$; ſubſtituer cette grandeur connue dans l'équation de la courbe à la place de x, & l'équation deviendra déterminée, & n'aura d'inconnue que y. 3°. Il faut trouver les lignes qui ſont les valeurs de y, en réſolvant cette équation par les regles qu'on a données * quand l'équation ne paſſe pas le ſecond degré, & par celles qu'on donnera dans la ſuite quand elle paſſe le ſecond degré: & après avoir pris une coupée depuis l'origine des x égale à $1a$, on menera par ſon extrêmité une parallele à la ſeconde des lignes coordonnées qu'on fera égale à la valeur de y qu'on vient de trouver, & ſon extrêmité ſera un point de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de même une ſeconde ordonnée y en mettant $2a$ à la place de x, une troiſiéme en y mettant $3a$, & ainſi de ſuite; & l'on aura à très-peu près la courbe qu'on vouloit tracer.

* 293 & 294.

REMARQUE.

425. QUAND y a pluſieurs valeurs poſitives, la courbe a pluſieurs branches du côté où l'on a ſuppoſé les y poſitives: quand y a des valeurs négatives, il faut les tirer du côté des y négatives. Quand on trouve que la valeur de y eſt zero, c'eſt une marque que la courbe joint le diametre des x à l'endroit de la valeur de x qui a donné $y = 0$; quand on trouve des valeurs imaginaires, c'eſt une marque qu'il n'y a aucune partie de la courbe ſur la partie du diametre à qui conviennent ces valeurs imaginaires de y, comme on le trouve dans l'hyperbole, n'y ayant aucune partie de la courbe ſur l'axe

ni ſur ſes premiers diametres, & les hyperboles oppoſées commençant chacune aux extrêmités de l'axe ou de chacun des premiers diametres. Quand en prenant $-1a$, $-2a$, $-3a$, &c. pour les valeurs déterminées des x, on trouve des valeurs de y, il faut mettre ces ordonnées y du côté des x négatives.

L'énoncé de cette méthode paroît aſſez clair pour la faire clairement concevoir.

PROBLÊME VII.

426. *QUAND on a l'équation d'une courbe, par exemple de quelqu'une des trois ſections coniques par raport à l'un de ſes diametres, trouver l'équation qui exprime le raport des points de la même courbe à une autre ligne droite donnée de poſition ſur le même plan.*

LEs équations des ſections coniques par raport à leurs diametres étant diſpoſées de façon que zero en ſoit le ſecond membre, ſont :

$yy - px = 0$, équation à la parabole.

$\frac{d}{p}yy + xx - \frac{1}{4}dd = 0$, équation à l'ellipſe par raport à ſon premier diametre, ou bien $yy + \frac{p}{d}xx - \frac{1}{4}dp = 0$.

$\frac{\delta}{\pi}xx + yy - \frac{1}{4}\delta\delta = 0$, équation à l'ellipſe par raport à ſon ſecond diametre, ou bien $xx + \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$; & quand le diametre eſt égal au parametre, elle devient $xx + yy - \frac{1}{4}dd = 0$, qui eſt l'équation au cercle, quand les y ſont perpendiculaires aux x.

$\frac{d}{p}yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$, équation à l'hyperbole par raport à ſon premier diametre, ou bien $yy - \frac{p}{d}xx + \frac{1}{4}dp = 0$; quand $d = p$, elle devient $yy - xx + \frac{1}{4}dd = 0$.

$\frac{\delta}{\pi}xx - yy - \frac{1}{4}\delta\delta = 0$, équation à l'hyperbole par raport à ſon ſecond diametre, ou bien $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$; quand $\delta = \pi = d$, elle devient $xx - yy - \frac{1}{4}dd = 0$.

On remarquera dans ces équations, 1°. Que p eſt le parametre du premier diametre, d eſt le premier diametre, π eſt le parametre du ſecond diametre, δ eſt le ſecond diametre : dans l'ellipſe & dans l'hyperbole on prend l'origine des coupées x au centre K ; mais dans la parabole l'origine des x eſt au ſommet A. 2°. Que dans l'équation à la parabole l'une des inconnues eſt élevée au quarré, & l'autre n'eſt que

Fig. XVI. XVII. XVIII.

lineaire ; dans l'ellipſe, elles ſont toutes deux élevées au quarré avec le même ſigne + ; dans l'hyperbole, les deux inconnues ſont auſſi élevées au quarré, mais avec differens ſignes, l'un ayant +, & l'autre —. 3°. Que dans l'équation à l'ellipſe ſi $d = p$, alors $d = \infty$, & l'équation devient $yy + xx - \frac{1}{4}dd = 0$, qui eſt l'équation au cercle, quand les y ſont perpendiculaires aux x ; & quand dans l'équation à l'hyperbole $d = p$, alors $d = \infty$, & l'équation devient $yy - xx \pm \frac{1}{4}dd = 0$, qui eſt l'équation à l'hyperbole équilatere par raport à ſes diametres : il y a $+\frac{1}{4}dd$, quand c'eſt le premier diametre, & $-\frac{1}{4}dd$, quand c'eſt le ſecond.

$xy - ab = 0$, ou $xy - aa = 0$ eſt l'équation à l'hyperbole par raport aux aſymptotes, & l'hyperbole eſt équilatere, quand l'angle des aſymptotes eſt droit.

Pour la Parabole.

127. AYANT l'équation $yy - px = 0$ de la parabole AC par raport à ſon diametre AB, ſur lequel ſont les $AB(x)$, ſon parametre eſt $AP = p$, les ordonnées ſont $BC(y)$ faiſant l'angle donné CBA avec le diametre BA ; trouver l'équation à la même parabole AC par raport à la ligne droite ON donnée de poſition ſur le même plan, dont l'origine eſt O. FIGURE XXVII.

Il faut mener par O la ligne OLM parallele à AB, tirer par le ſommet A la ligne AL parallele aux ordonnées BC, prolonger l'ordonnée CB juſqu'à la ligne ON, & elle coupera OLM en M ; prendre ſur ON une ligne déterminée OF qu'on nommera f, élever FG parallele aux ordonnées NC, & on nommera la ligne connue $FG(g)$; elle déterminera OG qu'on nommera h : toutes les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles. On ſuppoſera $ON = u$, $NC = z$, la donnée $AL = l$, & la donnée $LO = i$, les triangles ſemblables OGF, OMN donnent $OF(f).ON(u) :: FG(g).NM = \frac{g}{f}u$; & $OF(f).ON(u) :: OG(h).OM = \frac{h}{f}u$; l'on aura donc $BC = NC - NM - MB = z - \frac{g}{f}u - l$, & $AB = OM - OL = \frac{h}{f}u - i$. Cela ſuppoſé ;

Il faut mettre dans l'équation $yy - px = 0$ le quarré de la valeur de BC à la place de yy, & la valeur de AB à la place de x ; & l'on aura $zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0$.
$- \frac{hp}{f}u + ip$

C'eſt l'équation à la même parabole AC par raport à la ligne ON.

REMARQUE.

428. ON remarquera que le coëficient $\frac{gg}{ff}$ qui multiplie le terme uu eſt toujours égal au quarré de la moitié du coëficient $\frac{2g}{f}$, qui multiplie uz, & qu'ils doivent avoir des ſignes differens; l'expreſſion même le fait ici connoître : mais dans tous les cas où l'expreſſion ne le fait pas connoître, il n'eſt pas moins neceſſaire que cela ſe trouve; autrement l'équation ne ſeroit pas à la parabole; en voici la raiſon : Pour réduire l'équation précedente qui eſt à la ligne ON differente du diametre AB à l'équation $yy - px = 0$, qui eſt l'équation ſimple au diametre AB, il faudroit faire évanouir les termes où z eſt lineaire, en ſuppoſant l'ordonnée $BC\,(y) = z - \frac{g}{f}u - l$, ou $y + \frac{g}{f}u + l = z$; & il faut en même temps que le quarré uu de la ſeconde inconnue u s'évanouiſſe; or cela ne ſçauroit ſe faire, comme on le peut voir en faiſant ſoi-même l'operation, que le coëficient qui multiplie uu, ne ſoit égal au quarré de la moitié du coëficient qui multiplie uz, & que ces coëficiens n'ayent des ſignes differens.

Pour l'hyperbole par raport à ſon premier diametre.

429. AYANT l'équation $yy - \frac{p}{a}xx + \frac{1}{4}dp = 0$ de l'hyperbole AC par raport à ſon premier diametre $Aa = d$, ſur lequel ſont priſes les coupées $KB = x$ depuis le centre K, ſon parametre eſt $AP = p$, les ordonnées ſont $BC = y$ faiſant l'angle donné CBA avec le diametre prolongé a A; trouver l'équation de la même hyperbole par raport à la ligne droite ON donnée de poſition ſur le même plan, dont l'origine eſt le point fixe O.

FIGURE XXVII.

Il faut mener par O la ligne OM parallele au diametre a AB, prolonger l'ordonnée CB en N qui coupera OLM en M, tirer par le ſommet A la ligne AL parallele aux ordonnées NC, prendre ſur ON la ligne déterminée arbitraire OF qu'on nommera f, élever FG qu'on nommera g parallele aux ordonnées, elle déterminera OG qu'on nommera b; on menera auſſi Oim par O parallele aux ordonnées NC; toutes les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles : on ſuppoſera $ON = u$, $NC = z$; les données $AL = BM = l$, $Ol = Ki = i$; les triangles ſemblables OGF, OMN donnent comme ci-deſſus $NM = \frac{g}{f}u$, $OM = \frac{b}{f}u$; ainſi l'on a l'ordonnée

BC

$BC = z - \frac{g}{f}u - l$, $KB = OM - Ol = iB - iK = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

Il faut mettre dans l'équation $yy - \frac{p}{d}xx + \frac{1}{4}dp = 0$, au lieu de $BC(y)$, ſa valeur $z - \frac{g}{f}u - l$; & au lieu de $KB(x)$ ſa valeur $\frac{h}{f}u - i$; & l'on aura

$$zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0.$$
$$- \frac{hhp}{dff}uu + \frac{2hip}{df}u - \frac{iip}{d}$$
$$+ \frac{1}{4}dp$$

C'eſt l'équation à la même hyperbole AC par raport à la ligne ON differente du diametre AKa.

Pour l'hyperbole par raport à ſon ſecond diametre.

30. $DKd(\delta)$ eſt le ſecond diametre de l'hyperbole AC, $Dp(\pi)$ eſt ſon parametre, βC eſt l'ordonnée (x), $K\beta(y) = BC$ eſt la coupée; & l'équation par raport à ce ſecond diametre eſt $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$. Il faut trouver l'équation à la même hyperbole par raport à la ligne On ſur le même plan, dont O eſt l'origine. FIGURE XXVII.

Il faut mener par O la ligne Oim parallele au ſecond diametre qui rencontre le premier diametre Aa en i, & l'ordonnée βC en m; il faut prendre Of d'une grandeur donnée qu'on nommera f, mener fg qu'on nommera g parallele à Aa; elle déterminera Og qu'on nommera h; les autres lignes de la figure 27 ſont ici inutiles: on ſuppoſera $On = u$, $nC = z$, $Ki = m\beta = l$, & $Oi = i$, & l'on aura comme dans les cas précedens $nm = \frac{g}{f}u$, $Om = l\beta = \frac{h}{f}u$, $\beta C = z - \frac{g}{f}u - l$, & $K\beta = BC = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

On ſubſtituera dans $xx - \frac{\pi}{\delta}yy - \frac{1}{4}\delta\pi = 0$, au lieu de $x = \beta C$, la valeur de $\beta C = z - \frac{g}{f}u - l$; & à la place de $K\beta$ ou $BC(y)$ la valeur de $K\beta = \frac{h}{f}u - i$; & l'on aura

$$zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u + ll = 0.$$
$$- \frac{hh\pi}{\delta ff}uu + \frac{2hi\pi}{\delta f}u - \frac{ii\pi}{\delta}$$
$$- \frac{1}{4}\delta\pi$$

C'eſt l'équation par raport à la ligne On differente du ſecond diametre Dd; & elle ne differe de la précedente, qu'en ce que $-\frac{1}{4}\delta\pi$ a ici le ſigne $-$.

REMARQUES.

I.

431. DANS l'hyperbole équilatere où $d = \delta = p = \pi$, l'équation du premier & du second diametre devient par raport à la ligne ON ou On, $zz - \frac{2s}{f}uz - 2lz + \frac{ss}{ff}uu + \frac{2sl}{f}u + ll = o$.
$$- \frac{hh}{ff}uu + \frac{2hi}{f}u - ii$$
$$\pm \frac{1}{4}dd$$
Il y a $+\frac{1}{4}dd$ quand c'eſt le premier diametre, & $-\frac{1}{4}dd$ quand c'eſt le ſecond diametre.

II.

432. Comme les quarrés des deux inconnues doivent ſe trouver ſous differens ſignes dans l'équation à l'hyperbole par raport à ſes diametres; il faut que le coëficient $\frac{gg}{ff} - \frac{hhp}{aff}$ qui multiplie uu ſoit moindre que le quarré de la moitié du coëficient $-\frac{2s}{f}$, qui multiplie uz dans les cas même où l'expreſſion ne le fait pas voir d'abord comme ici; autrement l'équation ne ſeroit pas à l'hyperbole.

Pour l'hyperbole par raport aux aſymptotes.

433. AYANT l'équation $xy - ab = o$ de l'hyperbole cPC par raport aux aſymptotes KB (ſur laquelle ſont priſes les $x = KB$) & Kb à laquelle ſont paralleles les $y = BC$, ou $KQ = a$, & $QP = b$; trouver l'équation de la même hyperbole par raport à la ligne ON donnée de poſition ſur le même plan dont l'origine eſt le point fixe O.

FIGURE XXVIII.

Il faut mener OM parallele à KB, prolonger CB juſqu'en N qui rencontrera OM en M; mener par O la ligne OL parallele à CN, qui rencontrera BK prolongée au point L; prendre OF d'une grandeur déterminée qu'on nommera f, élever FG, qu'on nommera g parallele à CN; elle déterminera OG qu'on nommera h; on ſuppoſera enſuite les données $KL = i$, $OL = l$, & les inconnues $ON = u$, $NC = z$, & l'on aura comme dans les cas précedens $NM = \frac{g}{f}u$, $OM = \frac{h}{f}u$, $BC = z - \frac{g}{f}u - l$, $KB = LB$ ou $OM - KL = \frac{h}{f}u - i$; cela ſuppoſé,

Il faut ſubſtituer dans $xy - ab = o$, au lieu de x (KB) & de y (BC), les valeurs de $KB = \frac{h}{f}u - i$, & de $BC = z$

$-\frac{g}{f}u-l$, & l'on aura après avoir multiplié tous les termes par $\frac{f}{b}$, $uz-\frac{fl}{b}z-\frac{g}{f}uu-iu+\frac{fil}{b}=0$;

$$+\frac{gl}{b}u-\frac{abf}{b}$$

c'eſt l'équation de l'hyperbole entre les aſymptotes par raport à la ligne droite ON differente des aſymptotes.

POUR L'ELLIPSE.

434. AYANT l'équation $yy+\frac{p}{d}xx-\frac{1}{4}dp=0$ de l'ellipſe par raport à ſon premier ou ſecond diametre $Aa=d$ (il n'importe pas) dont le parametre eſt $AP=p$, les coupées ſont $KB=x$, les ordonnées $BC=y$; trouver l'équation de la même ellipſe par raport à une ligne droite ON donnée de poſition ſur le même plan dont l'origine eſt le point fixe O. FIGURE XXIX.

Il faut mener par O, OM parallele au diametre Aa, prolonger CB en N qui rencontrera CM en M; mener par O, OL parallele à CN; prendre une ligne déterminée OF qu'on nommera f; élever FG qu'on nommera g parallele à NC, elle déterminera OG qu'on nommera h; on ſuppoſera auſſi $OL=BM=l$, $KL=i$, $ON=u$, & $NC=z$, & l'on aura $BC=z-\frac{g}{f}u-l$, & $KB=LB$ ou $OM-KL=\frac{h}{f}u-i$. Cela ſuppoſé,

On ſubſtituera dans $yy+\frac{p}{d}xx-\frac{1}{4}dp=0$, à la place de $BC\,(y)$, ſa valeur $z-\frac{g}{f}u-l$; & à la place de $KB\,(x)$ ſa valeur $\frac{h}{f}u-i$, & l'on aura

$$zz-\frac{2g}{f}uz-2lz+\frac{gg}{ff}uu+\frac{2gl}{f}u+ll=0;$$

$$+\frac{hhp}{dff}uu-\frac{2hip}{df}u+\frac{iip}{d}$$

$$-\frac{1}{4}dp$$

c'eſt l'équation de l'ellipſe par raport à la ligne ON differente du diametre Aa.

Remarques ſur l'équation précedente.

I.

435. COMME les quarrés des deux inconnues doivent être dans l'équation à l'ellipſe ſous le même ſigne, le coëficient $\frac{gg}{ff}+\frac{hhp}{dff}$ qui multiplie uu doit toujours ſurpaſſer (quand même l'expreſſion ne le feroit pas voir comme ici) le quarré de la moitié du coëficient $-\frac{2g}{f}$.

II.

Où l'on fait voir la maniere de trouver l'équation du cercle par raport à une ligne differente de ſon diametre.

436. Quand dans l'équation de l'ellipſe $d = p$, & que l'angle des ordonnées avec le diametre eſt droit, l'équation de l'ellipſe devient celle du cercle, & alors l'angle OMN étant droit, $\overline{OF}^2 (ff) = \overline{FG}^2 (gg) + \overline{OG}^2 (hh)$; ainſi mettant au lieu de hh ſa valeur $ff - gg$, & d à la place de p, l'équation devient $zz - \frac{2g}{f} uz - 2lz + uu + \frac{2gl}{f} u + ll = 0$;
$- \frac{2hi}{f} u + ii$
$- \frac{1}{4} dd$

FIGURE XXIX.

c'eſt l'équation du cercle par raport à la ligne ON differente du diametre Aa.

S'il n'y avoit que la ligne OGM parallele au diametre Aa, & que l'angle MON fût nul; alors $OF (f)$ devient $OG (h)$, & $FG (g)$ devient zero; par conſequent l'équation précedente au cercle devient $zz - 2lz + uu - 2iu + ll = 0$.
$+ ii$
$- \frac{1}{4} dd$

Remarques generales ſur tout le Problème précedent, & ſur ſes uſages.

I.

437. QUAND au lieu de l'équation par raport à une ligne droite ON, qui eſt oblique par raport au diametre des ſections coniques, on veut l'équation par raport à une ligne droite OM parallele au diametre Aa; il eſt évident que dans ce cas, $FG (g)$ devient égale à zero, que $OF (f)$ & $OG (h)$ deviennent la même ligne, ainſi dans les équations précedentes il n'y aura qu'à effacer toutes les grandeurs où ſe trouve g comme étant zero, & faire partout $f = h$, & les équations deviendront celles que l'on demande.

FIGURE XXVII. XXVIII. XXIX.

II.

438. D'où l'on voit que quand le terme uz manque dans une équation aux ſections coniques, & que cependant il y a outre les quarrés zz, uu, des termes où z & u ſont lineaires, c'eſt une marque certaine que la ligne OM à laquelle l'équation marque le raport, eſt parallele au premier diametre Aa ou

au second diametre dans l'hyperbole & dans l'ellipse, & au diametre AB dans la parabole.

III.

139. Dans le même cas où uz ne se trouve pas, toutes les grandeurs où est g devenant zero, & f devenant égale à h, la fraction qui multiplie uu marque toujours le raport du parametre au diametre dans l'hyperbole & dans l'ellipse; car alors le terme où est uu devient necessairement $\mp\frac{p}{d}uu$, — dans l'hyperbole, & + dans l'ellipse; parceque $\frac{gg}{ff}uu$ devient zero, & $\mp\frac{hhp}{dff}uu$ devient $\mp\frac{p}{d}uu$, à cause de $hh=ff$. Si dans le même cas uu n'a aucun coëficient, l'hyperbole est équilatere, & dans l'ellipse le diametre est égal au parametre; & si l'angle des ordonnées & du diametre est droit, l'équation de l'ellipse devient l'équation du cercle.

IV.

140. L'usage des équations de la parabole, de l'ellipse & de l'hyperbole & du cercle par raport à leur diametre & par raport à une autre ligne que le diametre (qu'on nomme ordinairement *les lieux geometriques* du premier genre) est, 1°. pour connoître tout d'un coup, quand en résolvant un Problême on trouve une équation qui appartient à une section conique; pour connoître, dis je, si c'est une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipse, ou un cercle: car quand l'équation qu'on trouve est semblable à quelqu'une des équations des sections coniques par raport au diametre, & n'a pas plus de termes, on connoît d'abord à quelle section conique appartient l'équation qu'on a trouvée; & quand l'équation qu'on trouve a plus de termes que n'en ont les équations simples des sections coniques par raport à leur diametre, on connoîtra en comparant l'équation trouvée avec les équations des sections coniques par raport à une autre ligne que le diametre, à quelle section conique elle appartient; par exemple, si uz ne s'y trouve pas, & qu'il n'y ait que le quarré de l'une des inconnues, c'est une parabole; si les deux quarrés des inconnues s'y trouvent sous un même signe, c'est une ellipse; sous differens signes, c'est une hyperbole par raport au diametre: si les deux quarrés ont le même signe, & n'ont aucun coëficient, & que l'angle des ordonnées soit droit, c'est un cercle. Quand uz s'y rencontre, après avoir ôté le coëficient de l'un des quarrés des deux inconnues, s'il en

avoit un, on connoîtra que l'équation eſt celle de la parabole, quand la fraction qui eſt le coëficient de uu eſt égale au quarré de la moitié du coëficient de uz; que l'équation appartient à l'hyperbole quand elle eſt moindre, & à l'ellipſe quand elle eſt plus grande; & que ſi les deux quarrés des inconnues n'ont pas de coëficient & ont le même ſigne, l'équation appartient au cercle. 2°. Pour tracer les courbes de ces équations, quand on a découvert, comme on vient de le dire, ſi elles appartiennent à la parabole, ou à l'hyperbole, ou à une ellipſe, ou au cercle: car ſi l'équation qu'on a trouvée eſt ſimple, & appartient à une ſection conique par raport au diametre, on la tracera par les articles 360, 361. Si l'équation trouvée appartient à une ſection conique par raport à une autre ligne qu'au diametre, on regardera celle des équations des ſections coniques par raport à une autre ligne qu'au diametre, à qui l'équation trouvée eſt ſemblable, comme étant la même équation que l'équation trouvée, & la figure de la ſection conique de la premiere de ces deux équations, comme étant la figure de la ſeconde, c'eſt-à-dire, de l'équation trouvée. On ſuppoſera les termes correſpondans de ces deux équations égaux entr'eux; & par les valeurs des indéterminées f, g, i, l, d, p, que feront trouver les équations particulieres de la ſuppoſition des termes correſpondans égaux, on aura la valeur du diametre d & du parametre p de la ſection conique de l'équation trouvée, & le centre de cette ſection conique, quand elle en a un, & on pourra la décrire par la méthode des art. 360, 361, en faiſant à l'exemple des figures 27, 28 & 29, une figure propre à l'équation trouvée. L'on remarquera que l'angle des coordonnées eſt toujours donné ou arbitraire; ce qui eſt cauſe qu'il ſuffit de déterminer les valeurs des lignes OF (f), FG (g) des figures 27, 28 & 29, pour avoir la valeur de la ligne OG (h).

V.

441. Comme l'on a ſuppoſé dans les équations du Problême précedent les grandeurs f, g, h, &c. poſitives, quand la comparaiſon des termes correſpondans de ces équations avec ceux de l'équation qu'on trouve dans la réſolution d'un Problême, fait trouver les valeurs de ces lettres négatives ou une partie; cela marque qu'il faut tracer les lignes repréſen-

tées par ces lettres négatives du côté opposé à celui où on les a tracées dans les figures 27, 28 & 29.

VI.

442. On remarquera enfin que quand on compare une équation d'une section conique à celle des équations précedentes qui lui répond, & que la premiere n'a pas tous les termes de la seconde; on supposera dans cette derniere, que les termes correspondans à ceux qui manquent dans la premiere, sont égaux à zero; ce qui fera connoître les lignes égales à zero, de celle des figures 27, 28 & 29, qui est la figure de la seconde équation; & quand $FG\,(g)=0$, la ligne $OF\,(f)$ tombe sur $OG\,(h)$, & elles sont égales, & $\frac{h}{f}=1$; ce qui arrive quand le terme uz manque dans l'équation. Quand le terme $2lz$ manque dans l'équation, alors $BM\,(l)=0$, & la ligne OGM tombe sur le diametre AB; & si en même temps le terme où est uz manque aussi, les trois lignes AB, OGM, OF, n'en font qu'une, qui est le diametre AB & $OG\,(h)=OF\,(f)$.

Par exemple pour comparer l'équation $yy-\frac{2x-4a}{4a}=0$, qui est l'équation d'une parabole*, avec l'équation de la parabole $zz-\frac{2g}{f}uz-2lz+\frac{gg}{ff}uu+\frac{2gl}{f}u+ll=0$, $-\frac{hp}{f}u+ip$ on prendra y pour l'ordonnée z, & x pour la coupée u, & le terme $2lz$ manquant, on supposera $2lz=0$, ce qui donnera $AL\,(l)=0$; & de plus le terme uz manquant aussi, $OG\,(h)=OF\,(f)$, & les trois lignes AB, OGM, OFN, n'en font qu'une; le terme $\frac{gg}{ff}uu$ est aussi égal à zero; & puisque $l=0$, les grandeurs $\frac{2gl}{f}$ & ll sont chacune égal à zero; & à cause de $h=f$, la grandeur $-\frac{hp}{f}u$ devient $-pu$. Ainsi les deux équations à comparer seront $yy-\frac{2x-4a}{4a}=0$, & $zz-pu+ip=0$: L'on aura donc, 1°. $\frac{2}{4a}=p$; ainsi le parametre de la parabole de l'équation proposée est égal à $\frac{2}{4a}$. 2°. $+ip=-\frac{4a}{4a}$; & mettant la valeur de p, on aura $\frac{2i}{4a}=-\frac{4a}{4a}$, & $Ai\,(i)=-\frac{4}{2}a$. Le signe — marque qu'il faudra prendre iA $(i=-\frac{4}{2}a)$, non pas en allant de i vers A, mais en allant du côté opposé de i vers (a); & le sommet de la parabole de l'équation proposée sera en (a). On pourra la décrire par la méthode de l'article 360, puisque l'on a son diametre & son parametre, & qu'on suppose que

* 440. FIGURE XXVII.

l'angle des ordonnées, & par conſequent celui de la tangente au ſommet qui lui eſt égal, eſt donné ou arbitraire.

PROBLÊME VIII.

Où l'on fait voir l'uſage des formules précedentes, & où l'on donne une maniere ſimple & facile de tracer toutes les ſections coniques par un mouvement continu.

443. FAE, FBE ſont deux angles quelconques formés chacun par deux regles, attachés ſur un plan aux points fixes A & B ſur leſquels ils ſont mobiles; en faiſant en ſorte que les deux côtés AE, BE pendant leur mouvement ſe coupent toujours ſur la ligne droite donnée ED qui rencontre la ligne AB qui joint les deux points fixes A & B en un point D diſtingué de ces deux points; il faut trouver l'équation de la courbe que forment les deux autres côtés AF, BF par leur point de concours F pendant le mouvement de ces deux angles mobiles ſur les poles A & B.

Fig. XXX & XXXI.

Il faut bien remarquer que les deux côtés AE, BE (qu'on appellera les premiers) ou leurs prolongemens AS, BV, ſont toujours ceux qui doivent ſe couper ſur la droite donnée DE, & que les deux côtés AF, BF (qu'on nommera les ſeconds) ou leurs prolongemens AP, BM, ſont toujours ceux qui décrivent la courbe en ſe coupant pendant le mouvement des angles dans les points F, qui forment la courbe.

Fig. XXX. Pour réſoudre le Problême, je remarque que quand les premiers côtés ſe coupent au point D, ils ne font qu'une même ligne droite qui eſt la ligne AB qui paſſe par les poles A & B, & que dans cette ſituation les deux ſeconds côtés AF, BF deviennent AC, BC, & ſont déterminés de poſition & de grandeur; parceque l'angle BAC eſt égal à l'angle donné FAE, & CBA eſt égal à l'angle donné FBE. Dans la figure 31, où le point D de la ligne DE eſt dans le prolongement de BA, lorſque les deux premiers côtés ſe coupent au point D, & ne font qu'une même ligne qui eſt BAD, le côté AE étant ſur AD, l'angle donné EAF, devient l'angle DAC, & le côté AF tombe ſur AC; mais le côté BE tombant en même temps ſur BD, le ſecond côté BF ne peut plus être coupé par le ſecond côté AF; c'eſt le prolongement BM devenu BC du ſecond côté FB, qui eſt coupé par le

Figure XXXI.

ſecond

ſecond côté AF devenu AC : C'eſt pourquoi l'angle ABC eſt égal à l'angle EBM complement à deux droits de l'angle donné FBE, & non pas à l'angle donné FBE, & le triangle ACB eſt entierement donné.

Cela ſuppoſé, pour trouver l'équation de la courbe que forment les points de concours F, je prens pour la ligne des coupées la ligne droite DE déterminée de poſition, & je prens ſon origine au point D où elle rencontre la donnée AB, & je fais les ordonnées tirées des points F ſur ED, comme l'ordonnée FI, paralleles à la donnée AB ; j'en tirerai cet avantage que l'équation me fera connoître, ſi les points fixes ou les poles A & B ſont eux-mêmes dans la courbe ; puiſque ſi la courbe paſſe par A & B, DA & DB ſeront les ordonnées de ces deux points ; je connoîtrai auſſi par la même équation que le point déterminé C eſt un des points de la courbe.

Soit donc la coupée $DI = u$, l'ordonnée $FI = z$, les données $AD = a$, $DB = b$, $DN = c$, $AN = d$, $DR = e$, $BR = f$. Pour former les équations particulieres qui me doivent donner l'équation du Problême, je remarque (fig. 30) que les deux angles CAF, DAE ſont égaux, puiſque CAD & FAE ſont ſuppoſés égaux ; & par la même raiſon CBF eſt égal à DBE ; ainſi pour faire des triangles ſemblables, je tire FG qui faſſe l'angle $AFG = AED$, & par conſequent $AGF = ADE$, & de même FH qui faſſe $BFH = BED$, & $BHF = BDE$; ainſi j'ai les triangles ſemblables AFG, AED, & BFH, BED. Je prolonge BC juſqu'au point R, où elle rencontre ED prolongée, & je mene par F la ligne $KFLT$, parallele à EDR ; ces lignes me donnent d'autres triangles ſemblables, comme ADN, LGF, &c.

Mais dans la figure 31. les angles DAC & EAF étant ſuppoſés égaux, en ajoutant à chacun l'angle commun CAE, les angles DAE, FAC ſont égaux : Je mene FG de maniere que $AFG = AED$ & $FGA = EDA$, & j'ai les deux triangles ſemblables AFG, AED. De même l'angle ABC eſt ſuppoſé égal à l'angle EBM complement à deux droits de EBF ; ainſi ajoutant à chacun l'angle EBC, j'aurai l'angle $ABE = CBM$ qui eſt égal à ſon oppoſé au ſommet FBH ; je tire FH de maniere que $BFH = BED$ & $FHB = BDE$, & j'ai les

deux triangles ſemblables BFH, BED: Je mene auſſi $LFKT$ parallele à EDI, & je prolonge AC juſqu'à N, & BC juſqu'à R, ce qui me donne d'autres triangles ſemblables ADN, IQN, QFL, à cauſe des paralleles; & GFL, ADN; parceque AND eſt égal à ſon alterne GLF, & que ADN eſt égal par la conſtruction à FGL; comme auſſi BDR, BKT, à cauſe des paralleles, & BDR, THF, parceque $BRD = BTF$ à cauſe des paralleles, & que BDR le même que BDE eſt égal à FHT le même que $FHB =$ (par la conſtruction) BDE. Je ſuppoſe à preſent l'inconnue $DE = x$; les triangles ſemblables me feront trouver deux valeurs differentes de $DE\,(x)$ deſquelles faiſant une équation, elle ſera l'équation de la courbe.

FIG. XXX. Les triangles ſemblables BDR, BKT, donnent $DB\,(b).\ DR\,(e) :: KB\,(b-z).\ KT = \frac{be-ez}{b}$; ainſi $FT = \frac{be-ez-bu}{b}$; & $DB\,(b).\ BR\,(f) :: KB\,(b-z).\ BT = \frac{bf-fz}{b}$. Les triangles ſemblables BDR, THF, donnent $BR\,(f).\ DR\,(e) :: FT\,(\frac{be-ez-bu}{b}).\ TH = \frac{bee-eez-beu}{bf}$; d'où l'on déduit $BH = BT - TH = \frac{bff-ffz-bee+eez+beu}{bf}$. Ils donnent encore $BR\,(f).\ BD\,(b) :: FT\,(\frac{be-ez-bu}{b}).\ FH = \frac{be-ez-bu}{f}$. Enfin les triangles ſemblables BFH, BED, donnent $BH\,(\frac{beu+eez-ffz+bff-bee}{bf}).\ FH\,(\frac{-bu-ez+be}{f}) :: BD\,(b).\ DE\,(x) = \frac{-b^3u-bbez+b^3e}{beu+eez-ffz+bff-bee}$; c'eſt la premiere valeur de $DE\,(x)$. Les triangles ſemblables ADN, AKL, donnent $AD\,(a).\ DN\,(c) :: AK\,(a+z).\ KL = \frac{ac+cz}{a}$; d'où l'on déduit $LF = \frac{ac+cz-au}{a}$. Ils donnent encore $AD\,(a).\ AN\,(d) :: AK\,(a+z).\ AL = \frac{ad+dz}{a}$. Les triangles ſemblables ADN, LGF, donnent auſſi $AN\,(d).\ DN\,(c) :: LF\,(\frac{ac+cz-au}{a}).\ LG = \frac{acc+ccz-acu}{ad}$; d'où l'on déduit $AG = AL - LG = \frac{add+ddz-acc-ccz+acu}{ad}$. Ils donnent encore $AN\,(d).\ AD\,(a) :: LF\,(\frac{ac+cz-au}{a}).\ FG = \frac{ac+cz-au}{d}$ Enfin les triangles ſemblables AGF, ADE, donnent $AG\,(\frac{acu-ccz+ddz+add-acc}{ad}).\ FG\,(\frac{-au+ez+ae}{d}) :: AD\,(a).\ DE\,(x) = \frac{-a^3u+aaez+a^3e}{acu-ccz+ddz+add-acc} = \frac{-b^3u-bbez+b^3e}{beu+eez-ffz-bee+bff}$, où ſuppoſant $-cc+dd = +xx$, & $+ee-ff = -\varepsilon\varepsilon$, l'on a $\frac{-a^3u+aaez+a^3e}{acu+xxz+axx} = \frac{-b^3u-bbez+b^3e}{beu-\varepsilon\varepsilon z+bex}$

qui se réduit à $-a^3beuu + aabcezu - a^3beeu - aaceezz = 0$;
$+ b^3acuu + a^3eezu + a^3bceu + bbxxezz$
$+ abbcezu + ab^3xxu + aabceez$
$+ b^3xxzu - ab^3ceu - a^3ceez$
$+ abbxxez$
$- b^3xxez$
$+ a^3bcee$
$- ab^3xxe$

C'est l'équation de la courbe pour la figure 30, qui fait voir qu'elle est une section conique.

On trouve pour la figure 31, en se servant des triangles semblables marqués par les mêmes lettres, $DE(x) = \frac{-a^3u + aacz - a^3c}{-acu + ccz - auz - acc + add} = \frac{b^3u - bbez + b^3e}{beu - eez + ffz + bee - bff}$, où supposant $-ee + ff = +\varepsilon\varepsilon$, & $cc - dd = xx$, l'on a $\frac{-a^3u + aacz - a^3e}{-acu + xxz - axx} = \frac{b^3u - bbez + b^3e}{beu + eez - bee}$, qui se réduit à . . . . . .

$-a^3beuu + aabcezu + a^3beeu + aaceezz = 0$;
$+ ab^3cuu - a^3eezu - a^3bceu + bbxxezz$
$- abbcezu + ab^3xxu - aabceez$
$- b^3xxzu + ab^3ceu - a^3ceez$
$- abbxxez$
$- b^3xxez$
$+ a^3bcee$
$+ ab^3xxe$

C'est l'équation de la courbe pour la figure 31, qui ne differe de la précedente que par quelques signes.

Pour connoître si la courbe passe par les poles A *&* B.

EN supposant que $ID(u) = 0$, l'on aura le seul dernier terme de chacune des équations précedentes. Celui de la premiere étant divisé par $-aacee + bbxxe$, donne l'équation déterminée $zz + az - ab = 0$, dont la racine positive
$- bz$
$z = b = BD$ (fig. 30), & la négative $z = -a = AD$; ainsi la courbe passe par les poles A & B. Le dernier terme de la seconde étant divisé par $aacee + bbxxe$, donne l'équation déterminée $zz - az + ab = 0$, dont les deux racines
$- bz$
sont positives, parcequ'elles sont du même côté de l'origine D (fig. 31). La premiere est $z = a = DA$; la seconde

$z = b = DB$; d'où l'on conclut que la courbe passe par A & B.

Pour connoître si le point C *du triangle déterminé* ABC *est dans la courbe.*

FIG. XXX. EN menant par C la ligne $C\beta$ parallele à la ligne des coupées EDI & $C\delta$ parallele aux ordonnées IF, DB; supposant $C\beta = D\delta = u$, & $C\delta = D\beta = z$, & nommant les autres lignes comme ci-dessus, les triangles semblables BDR, $B\beta C$, donneront $DR(e).\ \beta C(u) :: DB(b).\ B\beta = \frac{bu}{e}$; d'où l'on déduit $D\beta(z) = DB - B\beta = \frac{be-bu}{e}$. Les triangles semblables ADN, $A\beta C$, donneront aussi $DN(c).\ C\beta(u) :: AD(a).\ A\beta = \frac{au}{c}$; d'où l'on déduit $D\beta(z) = A\beta - AD = \frac{au-ac}{c} = \frac{be-bu}{e}$, d'où l'on tire $D\delta(u) = \frac{ace+bce}{ae+bc}$, & $\delta C(z) = \frac{abe-abc}{ae+bc}$. Or l'on trouve précisément les mêmes valeurs de u & de z en supposant $FG\left(\frac{-au+es+ac}{d}\right)$, & $FH\left(\frac{-bu-es+be}{f}\right)$, chacune égale à zero, ce qui doit arriver dans la formation de la courbe quand le point F qui la décrit se trouve au point C; ainsi la courbe passe au point C.

Si on vouloit sçavoir les points où la courbe rencontre la ligne EDR, il n'y auroit qu'à supposer dans les équations précedentes $z = o$, & les deux valeurs de u que l'on trouveroit par cette supposition, marqueroient ces points; si l'on trouvoit les valeurs de u imaginaires, ce seroit une marque que la courbe ne rencontreroit point EDR. Si on trouvoit deux valeurs égales positives ou négatives de u, cela feroit voir que ED toucheroit la courbe au point auquel u auroit ces deux valeurs égales.

Pour connoître les cas où la courbe est une parabole, ou une ellipse, ou une hyperbole, & pour en trouver le parametre & le diametre.

IL faut faire en sorte que le quarré de l'une des deux inconnues, comme z, n'ait pas d'autre coëficient que l'unité, & l'équation sera pour la figure 31e.

$$zz + aabce - a^3\epsilon\epsilon - abbce - b^3xx \;\Big\}\; uz - aabc\epsilon\epsilon - a^3c\epsilon\epsilon - abbxxe - b^3xx\epsilon \;\Big\}\; z - a^3be + ab^3c \;\Big\}\; uu + a^3b\epsilon\epsilon - a^3bce + ab^3xx + ab^3ce \;\Big\}\; u + a^3bc\epsilon\epsilon + ab^3xxe \;\Big\} = o,$$

$$aac\epsilon\epsilon + bbxxe$$

Et comme l'on peut exprimer les coëficiens qui ſont connus par d'autres grandeurs connues plus ſimples, * on exprimera le coëficient du terme uz par $\frac{2m}{n}$; celui du terme z par $2q$; celui du terme uu par $\frac{rr}{nn}$; celui du terme u par s, & enfin le dernier terme par tt, & l'on aura l'équation abregée $zz - \frac{2m}{n}uz - 2qz \pm \frac{rr}{nn}uu \pm su \pm tt = 0$, qui contient toutes les équations aux ſections coniques par raport à une autre ligne qu'au diametre, n'y ayant que la diverſité des ſignes, les differens raports des coëficiens, & quelques termes qui peuvent quelquefois ſe trouver nuls ou égaux à zero, qui la rendent propre à l'une des ſections coniques plutôt qu'à l'autre. * 279.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt poſitive & égale au quarré $\frac{mm}{nn}$ de la moitié de $\frac{2m}{n}$, la ſection conique eſt une parabole. * * 440.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt poſitive & ſurpaſſe $\frac{mm}{nn}$, c'eſt une ellipſe. * * 440.

Quand $\frac{rr}{nn}$ eſt négative, c'eſt une hyperbole par raport à l'un de ſes diametres, * & non pas par raport aux aſymptotes. * 440.

Si on vouloit trouver le parametre, quand c'eſt une parabole; le parametre & le diametre, quand c'eſt une hyperbole ou une ellipſe, il n'y auroit qu'à ſuppoſer chaque terme de l'équation abregée (excepté le premier) égal au terme qui lui répond dans l'équation correſpondante du ſeptiéme Problême*, & déterminer par ces équations les valeurs des indéterminées f, g, i, l, d, p, & la valeur de p ſeroit le parametre, celle de d ſeroit le diametre. Mais comme l'on n'a beſoin de ces choſes que pour décrire la ſection conique par la méthode des art. 360, 361, & que la pratique du Problême que l'on traite ici, donne la deſcription facile de la ſection conique; il eſt inutile de les expliquer ici plus au long. * 426.

La maniere de trouver les axes avec leurs parametres des ſections coniques décrites par la méthode précedente.

444. IL faut remarquer pendant que l'on fait la deſcription de la courbe, la ſituation où les ſeconds côtés Af, Bf ſont paralleles entr'eux, & en même temps le point M où ſe croiſent les deux premiers côtés, lorſque les ſeconds ſont paralleles; & les laiſſant dans cette ſituation, faire décrire une circonference $AMBNA$ au point M; ou, ce qui revient au même, FIGURE XXXII.

& ce qui eſt plus facile, il faut tracer la circonference $AMBNA$ ſur la corde AB, de maniere que l'arc AMB (du côté de la ligne donnée DE où ſe coupoient les deux premiers côtés, pendant que le point de concours des ſeconds côtés décrivoit la courbe) ſoit capable d'un angle AMB, qui faſſe avec les deux angles donnés EAF, EBF, quatre angles droits. Il faut enſuite tirer par le centre O de ce cercle la ligne $NOMD$ perpendiculaire à la ligne donnée DE; & ayant mené par le point M où elle rencontre la circonference, les droites MA, MB, il faut faire l'angle MAf égal à l'angle donné EAF, & $MBf = EBF$; & les deux lignes Af, Bf ſeront paralleles: car l'angle AMB faiſant deux droits avec MAB, MBA, il faut que les deux qui reſtent BAf, ABf faſſent auſſi deux angles droits, puiſque AMB fait quatre angles droits avec MAf, MBf; par conſequent Af, Bf ſont paralleles. Or l'on va démontrer par l'Analyſe que l'axe ou l'un des axes de la courbe décrite par le point F, eſt parallele aux lignes paralleles Af, Bf, d'où il ſera facile de trouver l'axe dans la courbe décrite par le point F.

La corde AB qui joint les deux poles eſt donnée, & les angles AMB, MAf, MBf ſont auſſi donnés, puiſque les angles EAF, EBF, auſquels les deux derniers ſont égaux, ſont donnés; & de plus la ligne DE eſt donnée de poſition; c'eſt pourquoi la circonference $AMBNA$ eſt donnée, ſon diametre MN eſt donné, les lignes ND, MD ſont données, comme auſſi AM, MC, BM, ML; & menant AN, BN, ces lignes ſont auſſi données; enfin tirant AK perpendiculaire ſur fB prolongée en K, AK & BK ſont données. Il faut encore tirer FH perpendiculaire ſur BH qui rencontre Af en G; & enfin tirer du point E ſur AMC prolongée la perpendiculaire EI; ces choſes ſuppoſées,

On nommera les données $DM(m)$, $DN(n)$, $AK(a)$, $KB(b)$, $MC(c)$, $CD(d)$, $DL(e)$ $ML(f)$; & les inconnues $DE(x)$, $AG(u)$, $FG(z)$. Les triangles rectangles ſemblables DMC, CEI, donnent $MC(c).CD(d) :: CE(x-d).CI = \frac{dx-dd}{c}$; & $MC(c).DM(m) :: CE(x-d).EI = \frac{mx-dm}{c}$. Les triangles rectangles MDC, MAN étant ſemblables à cauſe des angles égaux oppoſés au ſommet DMC, AMN, l'on a $MC(c).MD(m) :: MN(n-m).AM$

$= \frac{mn+mm}{c}$; d'où l'on déduit $AI = AM + MC + CI = \frac{mn-mm+cc+dx-dd}{c} = \frac{mn+dx}{c}$; parceque $+\overline{MC}^2 (+cc) = +\overline{DM}^2 (+mm) + \overline{CD}^2 (+dd)$. Or les triangles rectangles EAI, FAG, ſont ſemblables ; car ôtant l'angle EAG des angles égaux IAG, EAF, les angles reſtans EAI, FAG ſont égaux ; c'eſt pourquoi $AI (\frac{mn+dx}{c})$. $EI (\frac{mx-dm}{c}) :: AG (u)$. $FG (z)$; ce qui donne $DE (x) = \frac{mnz+dmu}{mu-dz}$. Il faut à preſent trouver une ſeconde valeur de $DE (x)$.

Les triangles rectangles LDM, LEP, ſont ſemblables, ayant l'angle L commun ; c'eſt pourquoi $ML (f)$. $MD (m) :: LE (e+x)$. $EP = \frac{em+mx}{f}$; & $ML (f)$. $LD (e) :: LE (e+x)$. $LP = \frac{ee+ex}{f}$. Mais les triangles rectangles ſemblables MLD, MNB, donnent $ML (f)$. $MD (m) :: MN (n-m)$. $BM = \frac{mn-mm}{f}$; d'où l'on déduit $BP = BM + ML - LP = \frac{mn-mm+ff-ee-ex}{f} = \frac{mn-ex}{f}$, à cauſe de $\overline{ML}^2 (+ff) = \overline{MD}^2 (mm) + \overline{LD}^2 (+ee)$. Enfin les triangles rectangles BEP, BFH, ſont ſemblables, puiſqu'en ôtant des angles égaux EBF, MBf, l'angle commun MBF, les angles reſtans EBP, FBH, ſont égaux ; c'eſt pourquoi $BP (\frac{mn-ex}{f})$. $EP (\frac{em+mx}{f}) :: BH = AG (u) - BK (b)$. $FH = FG (z) + GH = AK (a)$; d'où l'on tire $x = \frac{mnz-emu+amn+bem}{nu+ez-bm+ae} = \frac{mnz+dmn}{mu-dz}$, qui donne

$$\begin{array}{llll} zz + & az + \frac{m}{n}uu - & \frac{bm}{n}u = 0. \\ & - \frac{bm}{d+e}z & & - \frac{am}{d+e}u \\ & + \frac{bde}{dn+en}z & & + \frac{adc}{dn+en}u \end{array}$$

C'eſt l'équation de la courbe que décrit le point F, (fig. 32), laquelle équation appartient à l'ellipſe, puiſque zz & $\frac{m}{n}uu$ ont le même ſigne + * ; & le produit uz ne s'y trouvant point, 1°. la ligne des coupées $AG (u)$ eſt parallele au diametre *, lequel diametre eſt l'axe, puiſque l'ordonnée $FG (z)$ eſt perpendiculaire à la ligne des coupées $AG (u)$. 2°. $\frac{DM}{DN} (\frac{m}{n})$ coëficient de uu, marque le raport du parametre au diametre *, & par conſequent auſſi le raport du quarré du ſecond diametre au quarré du premier diametre.

* 440. * 438. * 439.

Quand la ligne droite DE que décrit le concours des deux premiers côtés EA, EB, eſt coupée par la circonfe-

renee $AMBNA$; quand elle eſt par exemple de, l'équation devient $zz + az - \frac{m}{n}uu + \frac{bm}{n}u = 0$, qui appartient

$$-\frac{bm}{d+e}z \qquad -\frac{am}{d+e}u$$
$$-\frac{bde}{dn+en}z \qquad +\frac{ade}{dn+en}u$$

*440. à l'hyperbole par raport au diametre, parceque * $-\frac{m}{n}uu$ a le
*438. ſigne $-$; AG eſt parallele à l'axe * ; puiſque uz ne s'y trouve pas, & que $FG\,(z)$ eſt perpendiculaire ſur $AG\,(u)$, & $\frac{DM}{DN}\,(\frac{m}{n})$
*339. exprime le raport du parametre au diametre *, comme auſſi le raport du quarré du ſecond diametre au quarré du premier diametre.

Quand la droite DE touche la circonference $AMBNA$ & devient $\wedge\varepsilon$, alors les triangles MDC, CEI, MDL s'évanouiſſent, & il ne reſte que les triangles AEI, FAG, MAN, MBN, BEP, BFH ; & ſi l'on fait une figure pour ce cas, on trouvera en ſe ſervant de ces triangles une équation à la parabole dans laquelle uz & uu ne ſe trouvent point ; ce qui
*438. fait voir que AG eſt parallele au diametre * qui doit être l'axe, puiſque $FG\,(z)$ eſt perpendiculaire ſur $AG\,(u)$.

REMARQUES.

445. QUAND une ſection conique eſt décrite, & qu'on a une ligne droite donnée de poſition AG parallele à l'axe ; pour trouver l'axe, il n'y a qu'à mener deux perpendiculaires à AG qui ſe terminent de côté & d'autre à la courbe, & mener une droite par les points du milieu de chacune, ce ſera l'axe.

COROLLAIRE I.

446. ON peut aiſément mener une tangente de la courbe par
FIGURE XXXII. l'un des deux poles, comme B, ſans même qu'elle ſoit tracée. Il faut mener par le pole A une droite AQ juſqu'à la donnée DE (on peut facilement l'imaginer, & les lignes dont on va parler, qu'on n'a pas tracées dans la figure 32, pour éviter la confuſion) qui faſſe avec AB l'angle $QAB = EAF$; puis mener QB, & tirer par B la ligne Bf, qui faſſe avec QB l'angle $QBf = EBF$, & cette ligne Bf ſera tangente au point B : car en imaginant la ſituation des deux premiers côtés AE, BE dans le temps que le ſecond côté AF eſt couché ſur AB, & décrit la portion de courbe infiniment petite au point B ; il eſt clair que dans cette ſituation l'angle

l'angle BAQ eſt égal à EAF, & $QBF = EBF$, & qu'à ce moment la petite portion de courbe qui eſt au point B, ſe trouve dans la ligne Bf; & Bf eſt par conſequent tangente au point B.

COROLLAIRE II.

Où l'on enſeigne à décrire telle ſection conique qu'on voudra dont cinq points ſont donnés.

147. COMME l'on décrit une ligne droite dont on a deux points, un cercle dont on a trois points, on peut de même décrire par la méthode précedente une ſection conique déterminée telle qu'on voudra; lorſqu'on en a cinq points A, B, C, G, F, il faut en joindre trois, A, B, C, par les lignes AB, AC, BC, & prendre deux de ces points A & B pour poles; mener par les autres points F, G, les lignes FA, FB, GA, GB; faire les angles FAE, GAK, égaux chacun à l'angle CAD complement à deux droits de l'angle CAB; & faire l'angle FBE égal à l'angle ABg complement à deux droits de l'angle ABC, & $GBK = ABC$; mener la ligne droite EDK par les points E & K, où les lignes AE, BE & AK, BK ſe rencontrent. Si l'on fait avec des regles des angles égaux à EAF, EBF, & ſi faiſant tourner ces angles ſur les poles A & B, on fait toujours en ſorte que les premiers côtés AE, BE ſe coupent ſur la droite EDK, il eſt clair que le point F qui eſt le concours des deux ſeconds côtés AF, BF décrira la ſection conique qui paſſera par les cinq points donnés. FIGURE XXXIII.

Si l'un des cinq points ou une partie des cinq points étoit dans l'une des hyperboles, & les quatre autres ou l'autre partie dans l'hyperbole oppoſée; il faudroit faire les angles FAE, GAK égaux chacun à l'angle CAB, & non pas à ſon complement à deux droits CAD; & de même les angles FBE, GBK égaux chacun à l'angle CBA, & la ligne EDK paſſeroit entre les poles A & B, comme dans la figure 30.

AVERTISSEMENT.

148. SI au lieu d'une ligne droite DE l'on faiſoit parcourir au point de concours E des deux premiers côtés AE, BE des angles mobiles EAF, EBF, une des ſections coniques, laquelle on voudra, qui paſſât par l'un des poles, par exemple par A, le point de concours F des deux ſeconds côtés AF, FIGURE XXX. & XXXI.

BF, décriroit une courbe du ſecond genre, c'eſt à-dire, dont on trouveroit l'équation, comme on a fait celle des ſections coniques, dans laquelle les inconnues auroient trois dimenſions; & ſi l'on faiſoit décrire au point de concours *E* la courbe du ſecond genre qu'on viendroit de tracer, le point de concours *F* décriroit une courbe d'un genre plus élevé, & ainſi à l'infini.

Avertiſſement.

On ne porte pas ici cette matiere plus loin, parcequ'il faudroit faire un traité entier de ces lignes courbes, & on s'eſt propoſé ſeulement de faire voir ici quelques uſages de l'Analyſe par raport aux courbes geometriques, & ſurtout aux ſections coniques, & ce que l'on en a dit ſuffit pour entendre ce que l'on dira dans la ſuite qui y aura raport, ſans avoir beſoin d'autres ouvrages.

DES COURBES QUI NE SONT PAS GEOMETRIQUES.

449. OUTRE les courbes *geometriques* dont les coordonnées ſont de ſimples lignes droites par le moyen deſquelles on exprime un raport commun à tous les points de chacune de ces courbes par une équation algebrique, où les inconnues ont un nombre déterminé de dimenſions; il y a une infinité d'autres courbes dans chacune deſquelles il y a, comme dans les courbes algebriques, un raport commun à tous leurs points que l'Analyſe exprime par une équation; mais ce ne peut pas être en y employant de ſimples lignes droites pour coordonnées qui ayent entr'elles un commun raport, qui puiſſe être exprimé par une équation algebrique, ce ſeroient des courbes geometriques, mais dans quelques-unes on ſe ſert pour l'une ou l'autre des coordonnées, & quelquefois pour toutes les deux, de lignes courbes, comme d'arcs de cercle, ou d'arcs d'autres courbes; ou bien l'on ſe ſert de lignes droites pour coordonnées, mais que l'on ſuppoſe égales à des arcs de cercles ou d'autres courbes; dans quelques-unes les abciſſes partent d'un même point, & les ordonnées ſont des arcs de courbes; dans quelques autres les coordonnées quoiqu'elles ſoient des lignes droites ou des arcs de courbes, elles ſuppoſent encore la quadrature de quelques courbes, c'eſt-à-dire l'expreſſion des coordonnées dans l'équation de ces courbes, contient l'expreſſion de la quadra-

ture de quelque courbe divisée par quelque ligne. Il y en a dont on ne connoît le raport commun de tous les points, ou de toutes les lignes infiniment petites dont leur contour est composé, que par des lignes infiniment petites qui font des triangles infiniment petits qui donnent chacun une même équation, qui devient par le moyen des grandeurs changeantes x, y, &c. l'équation de la courbe.

Quelques-uns appellent ces lignes *mechaniques*; d'autres pour prévenir le préjugé que donneroit ce nom de *mechanique* aux Lecteurs, en les portant à croire que ces courbes n'ont pas des proprietés & des usages qu'on puisse démontrer aussi exactement que celles des courbes geometriques, aiment mieux les appeller *transcendentes*. Il n'importe quel nom leur donner, & on peut les appeller *mechaniques*; mais il est certain que depuis l'heureuse découverte du calcul *differentiel* & *integral*, on en démontre les proprietés aussi exactement que celle des courbes geometriques, & qu'on en fait presque autant d'usage dans la Geometrie & dans les sciences physico-mathematiques, & que la plupart des plus belles découvertes & des plus beaux Problêmes resolus par les Sçavans de notre temps, regardent les proprietés & les usages de ces courbes.

Quoiqu'on puisse exprimer les principales proprietés de plusieurs courbes mechaniques par des équations où il ne faut que le calcul ordinaire de l'Algebre; on ne peut gueres cependant découvrir les propietés & les usages des courbes mechaniques, qu'en employant dans leurs équations les expressions du calcul differentiel & integral, & en se servant de ce calcul; c'est pourquoi on se contentera ici de donner seulement l'idée de quelques courbes mechaniques.

DES LIGNES SPIRALES.

50. SI l'on imagine que le rayon CA prolongé à l'infini, du cercle AED, se meut en tournant autour du centre C, en commençant au point A, & allant de A vers E, D, A, & qu'en même tems un point C parte de C, & se meuve sur le rayon CA de maniere qu'il arrive au point A en même temps que CA; la ligne CBA que décrit le point C par ce mouvement, s'appelle *spirale*. Sa proprieté principale se déduit de sa formation, qui est que la circonference $AEDA$ est un arc quelcon- FIGURE XXXIV.

que AED pris depuis l'origine A juſqu'au point D où ſe trouve le rayon CD quand le point mobile C ſe trouve en même temps au point B de la ſpirale, comme le rayon CD que parcourt le point mobile C pendant que le rayon CD ou CA parcourt la circonference entiere, eſt à la partie CB du même rayon que parcourt le même point C pendant que le rayon CA ou CD parcourt l'arc AED.

Ainſi nommant le rayon r; ſa partie CB priſe pour abſciſſe, x; la circonférence $AEDA$, c; & chacun des arcs AED pris pour ordonnées, y; la proportion précedente s'exprimera ainſi, $c.y::r.x$; ce qui donne l'équation à la ſpirale $cx=ry$, ou $x=\frac{ry}{c}$.

REMARQUES.

I.

451. ON remarquera que quand le point mobile C eſt arrivé en A, il peut continuer de ſe mouvoir; & dans une ſeconde révolution, il décrira une ſeconde partie de la ſpirale, dans une troiſiéme revolution, une troiſiéme partie de la ſpirale, & ainſi à l'infini; ce qui eſt cauſe que le rayon prolongé CA rencontre la ſpirale en une infinité de points; & que l'abſciſſe x peut avoir une infinité de valeur par raport à tous ces points.

II.

452. On peut encore concevoir que le point mobile C peut ſe mouvoir de C juſqu'à A, de maniere que le raport de la circonference AEA (c) à l'arc AED (y), ſoit le même que celui d'une puiſſance quelconque m (m repreſente un nombre quelconque entier ou rompu) du rayon CA (r^m) à une ſemblable puiſſance de l'abſciſſe CB (x^m); & l'on aura pour l'equation de ces ſpirales à l'infini $cx^m=r^my$, ou $x^m=\frac{r^m}{c}y$.

III.

453. Outre ces ſpirales, l'on en peut encore imaginer d'autres d'une infinité de ſortes, parmi leſquelles on fera ſeulement ici remarquer la ſpirale logarithmique, dont la proprieté eſt que la tangente BT à un point quelconque B, fait toujours le même angle au point B avec le rayon BC. Mais l'équation neceſſaire pour exprimer cette ſpirale, employe le calcul differentiel dont on ne parlera que dans la partie qui ſuit.

On remarquera seulement que cette spirale ne commence pas au centre C d'où partent les rayons CA, CD, comme les précedentes.

DES CYCLOÏDES.

454. SI l'on imagine que le cercle AFE roule sur la droite ED, & si l'on conçoit que le point A décrit en même temps une courbe AfD sur le même plan où est la ligne ED & le cercle AFE qu'on appelle *generateur*, cette courbe se nomme *cycloïde*. Si l'on tire par tous les points F de la demi-circonference AFE, une droite Ff parallele à la base ED, jusqu'à la cycloïde en f, la droite Ff est toujours égale à la longueur de l'arc AF, & la base ED est égale à la demi-circonference AFE. Car il est évident que quand le point A est arrivé au point D, tous les points de la demi-circonference AFE, à commencer du point E, ont été appliqués successivement sur les points de la base ED, & qu'ainsi toute la demi-circonference EFA a été, pour ainsi dire, mesurée par la base ED, qui lui est par consequent égale; & que quand le point A est arrivé au point f de la cycloïde, si l'on trace le demi-cercle generateur afe par ce point f, en faisant ae perpendiculaire sur ED, Ee est la mesure de l'arc qui en roulant s'est, pour ainsi dire, mesuré sur Ee, lequel arc est visiblement égal à l'arc AF, ou af qui est celui qu'a décrit pendant ce mouvement le point A depuis A jusqu'en F, ou depuis a jusqu'en f, en tournant sur son centre, pendant qu'en avançant le cercle generateur roulant toujours, le même point A a décrit la partie de cycloïde Af. Or Bb étant égal à Ee, & BF à bf, il est évident que $Ff = Ee =$ à l'arc AF ou af. FIGURE XXXV.

Ainsi prenant la demi-circonference AFE pour la ligne des coupées, & les droites Ff pour les ordonnées, & nommant la demi-circonference AFE (c), la base ED (b), chaque coupée AF (z), l'ordonnée Ff (y), l'on aura $c . b :: z . y$, ce qui donnera l'équation à la cycloïde $y = \frac{bz}{c}$; ou bien, parceque $c = b$, l'équation sera $y = z$.

455. Si l'on prolonge fF jusqu'à B, & qu'on nomme Bf (y), AE (a), AB (x), AF (z), il est évident que l'ordonnée Bf est égale à l'arc AF (z), & de plus à la perpendiculaire BF, qui est égale * à $\sqrt{AB \times BE} = \sqrt{ax - xx}$; ainsi l'on aura encore $y = z + \sqrt{ax - xx}$ pour l'équation à la cycloïde. * 287.

456. C'eſt encore une proprieté de la cycloïde, qu'on démontrera dans la ſeconde partie, que chacun des arcs de la cycloïde, comme Af, eſt double de la corde AF de l'arc correſpondant AF; ainſi nommant toujours $AE(a)$, $AB(x)$; l'arc $Af(s)$; la corde AF ſera égale * à $\sqrt{ax}$, & l'on aura pour une troiſiéme équation de la cycloïde $s = 2\sqrt{ax}$.

* 288.

REMARQUES.

I.

457. LA cycloïde a beaucoup de proprietés & d'uſages qui ont été découverts de notre temps; & de plus l'on a diſtingué trois ſortes de cycloïdes à qui convient l'équation $y = \frac{bx}{c}$; 1re. quand $b = c$, c'eſt la cycloïde ordinaire, 2e. quand b ſurpaſſe c, c'eſt la cycloïde *allongée*; 3e. quand b eſt moindre que c, c'eſt la cycloïde *racourcie*.

II.

458. Il y a même une infinité d'autres ſortes de cycloïdes, qui ont pour baſe ED une courbe; elles ſe forment en concevant que le cercle generateur roulant ſur une circonference ou ſur une autre courbe, un point pris dans la circonference du cercle generateur, ou dans un des rayons au dehors ou au dedans du cercle, décrit ſur le plan où eſt ce cercle une eſpece de cycloïde, qu'on appelle *epicycloïde*. On doit bientôt voir un ſçavant traité de toutes ces cycloïdes compoſé par M. *Nicole*.

III.

459. On peut concevoir que le cercle generateur fait une infinité de tours ſur ſa baſe prolongée à l'infini; ainſi chaque cycloïde peut s'étendre à l'infini, excepté une eſpece d'epicycloïde autour de la circonference pour baſe, qui revenant aux mêmes points, eſt bornée à n'avoir qu'un nombre déterminé de parties toutes ſemblables, & elle eſt geometrique.

DE LA COURBE LOGARITHMIQUE.

460. SOIT une droite AL prolongée de côté & d'autre à l'infini, & conçue partagée en parties égales les plus petites qu'on puiſſe imaginer, AC, CE, EG, &c. & qu'il y ait ſur les diviſions les droites paralleles AB, CD, EF, &c. qui faſſent

FIGURE XXXVI.

une progreſſion geometrique ; la courbe *BDFH*, &c. qui paſſe par toutes les extrêmités de ces droites proportionelles, s'appelle la *logarithmique*, dont les coupées ſont ſur la droite *AL*, & les ordonnées ſont *AB*, *CD*, &c. Cette courbe a pluſieurs proprietés de grand uſage ; mais comme l'on ne peut guéres les exprimer que par le calcul differentiel, on fera ſeulement remarquer ici que comme les parties de la ligne des coupées ſont une progreſſion arithmetique, & les ordonnées correſpondantes une progreſſion geometrique ; & que quand tous les termes d'une progreſſion arithmetique ſont correſpondans pris de ſuite aux termes d'une progreſſion geometrique auſſi pris de ſuite, les termes de la progreſſion arithmetique s'appellent les *logarithmes* des termes de la progreſſion geometrique ; la courbe logarithmique contient les uns & les autres, & c'eſt delà qu'elle tire ſon nom. Ainſi prenant *AB* pour l'unité, & *A* pour le point où commencent les logarithmes, la partie *ABML* contient les nombres qui ſurpaſſent l'unité & leurs logarithmes correſpondans ; & l'autre partie *AghB* contient les nombres moindres que l'unité & leurs logarithmes correſpondans, & le logarithme de l'unité eſt zero.

Avertiſſement.

Ce que l'on vient de dire des courbes mechaniques ſuffit pour en donner ici une idée aux Lecteurs ; & pour n'oublier aucune des courbes qu'on a imaginées juſqu'à preſent : on va expliquer en peu de mots les courbes qu'on appelle *exponentielles* & *parcourantes*.

DES COURBES QU'ON APPELLE *exponentielles* ET *parcourantes*.

161. LES grandeurs comme a^x, x^x, x^y, x^z, &c. qui ſont des conſtantes comme a, ou des changeantes comme x, y, &c. élevées à des puiſſances, dont l'expoſant x, y, z eſt une grandeur changeante, s'appellent *exponentielles* ou *parcourantes*. Les équations qui contiennent de ces ſortes de grandeurs, ont le même nom ; comme auſſi les courbes dont le raport commun à tous les points de leur contour s'exprime par ces ſortes d'équations.

Par exemple, en nommant x les abſciſſes *AC*, *AE*, &c. FIGURE XXXVI.

depuis l'origine A, & y les ordonees CD, EF, &c. & une grandeur conſtante a; ſuppoſé que la courbe $BDFH$, &c. s'exprime par cette équation $a^x = y$, quelques-uns la nomment *exponentielle*, d'autres *parcourante*; de même $x^x = y$, ou $x^y = y$, $x^z = y$, ſont des équations de cour besparcourantes.

Pour ſe former une idée diſtincte de ces courbes, ſi $a^x = y$ eſt l'équation de la courbe BDF, il faut concevoir que la premiere ordonnée $CD\,(y)$ eſt égale à la conſtante a élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt l'abſciſſe correſpondante $AC\,(x)$ La ſeconde $EF\,(y)$ eſt égale à la conſtante a élevée à la puiſſance de la ſeconde abſciſſe $AE\,(x)$; & ainſi des ordonnées ſuivantes.

Si $x^x = y$ eſt l'équation de la courbe, il faut concevoir que $CD\,(y) = AC\,(x)$ élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt $AC\,(x)$, que $EF\,(y) = AE\,(x)$ élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt $AE\,(x)$, & ainſi des autres. D'où l'on conçoit aiſément la courbe dont $x^y = y$ ſeroit l'équation: Mais quand l'équation eſt, par exemple, $x^z = y$, dans laquelle l'expoſant z eſt une changeante differente de x & de y, l'on conçoit une autre courbe $A\delta\varphi\varepsilon$, dont l'une des coordonnées ACE, &c. eſt commune avec celle de la courbe parcourante, & dont on ſçait le raport de chacune des ordonnées $C\delta$, $E\varphi$, &c. qui ſont les z, avec les abſciſſes correſpondantes communes AC, AE, &c. qui ſont les x.

Les équations exponentielles peuvent avoir pluſieurs termes, comme $x^x + x^a = y^y + y$.

Les expoſans changeans x, y, &c. des grandeurs exponentielles peuvent eux-mêmes être élevés à des puiſſances dont les expoſans ſoient auſſi changeans, ce qui fait diſtinguer ces grandeurs exponentielles & leurs courbes en pluſieurs genres, dont celles qui précedent ſont le premier: Le ſecond eſt, par exemple, $x^{x^x} = y^{y^y}$, & ainſi à l'infini.

SECTION

SECTION IV.

De l'uſage que fait l'Analyſe des courbes pour réſoudre les équations déterminées, & les Problêmes des ſciences Phyſico-Mathematiques.

Uſage que l'Analyſe fait des courbes geometriques, pour réſoudre les équations déterminées.

Principe d'où l'Analyſe déduit cet uſage.

162. EN ſuppoſant que les équations à la ligne droite & à toutes les courbes geometriques de tous les genres ont leurs coupées repreſentées par la même inconnue, par exemple x ou u, &c. & leurs ordonnées auſſi exprimées par la même inconnue, comme y ou z, &c. ſi en ſe ſervant de deux de ces équations quelconques, on fait évanouir l'inconnue de la coupée, de maniere que la troiſiéme équation que l'on formera de ces deux autres, n'ait que la ſeule inconnue y de l'ordonnée; les deux lignes dont on a pris les équations pour faire évanouir x, ſe peuvent couper en autant de points que l'inconnue y a de dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation dont y eſt la ſeule inconnue.

Par exemple, ſi l'on prend la valeur de x dans l'équation à la ligne droite $x = \frac{a}{b}y$, & qu'on la ſubſtitue dans une équation de laquelle on voudra des ſections coniques, comme dans $px = yy$, qui eſt l'équation à la parabole; on aura la troiſiéme équation $yy - \frac{ap}{b}y = 0$, dans laquelle y étant au ſecond degré, marque qu'une ligne droite peut couper une parabole en deux points; & comme il y a une valeur de $y = 0$, cela marque que les coupées de l'équation à la ligne droite commençant au même point où commencent les coupées de l'équation à la parabole, auquel point $y = 0$; le premier point où la ligne droite coupe la parabole eſt au ſommet, c'eſt-à-dire à l'origine des x & des y, puiſque y s'y trouve égal à zero. Mais ſi l'origine des coupées de l'équation de la ligne droite étoit à un autre point qu'à l'origine des x & des y, y auroit deux valeurs réelles dans la troiſiéme équation qu'on trouveroit en faiſant évanouir x par les deux autres.

De même prenant la valeur de x dans l'équation de la parabole $px = yy$, qui eſt $x = \frac{yy}{p}$; & la ſubſtituant dans l'équation par exemple du cercle, qui eſt $yy = dx - xx$, on trouve la troiſiéme équation $\frac{y^4}{pp} - \frac{d}{p}yy + yy = 0$, dans laquelle y^4 a quatre dimenſions; ce qui fait voir que le cercle peut couper la parabole en quatre points, dont il y en a deux de confondus au ſommet de la parabole où eſt l'origine des x & des y, parceque y a deux valeurs égales à zero dans la troiſiéme équation précedente: mais quand l'origine des coupées eſt différente dans la parabole & le cercle, y a quatre valeurs réelles dans la troiſiéme équation que l'on trouve par le moyen des deux équations à la parabole & au cercle.

On trouvera de même qu'en prenant deux équations de deux ſections coniques quelconques, y aura quatre dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation qui naîtra de l'évanouiſſement de x par leur moyen; ainſi deux ſections coniques peuvent ſe couper en quatre points; que y aura ſix dimenſions dans le premier terme de la troiſiéme équation qui naîtra de l'évanouiſſement de x par le moyen de deux équations, l'une d'une ſection conique quelconque, & l'autre d'une courbe du ſecond genre; & qu'ainſi une courbe du premier genre en peut couper une du ſecond en ſix points.

On peut de la même maniere trouver en combien de points une courbe geometrique quelconque peut être coupée par une ligne droite, par une courbe du premier genre, par une courbe du troiſiéme, &c.

EXEMPLE.

FIG. XIX. LA parabole ACc dont l'axe eſt ABb, le parametre $AP = p$, les $x = AB$, Ab; les $y = BC$, bc, a pour équation $yy - px = 0$. La ligne droite SCc, en ſuppoſant $SA = a$; AT parallele à BC menée par A égale à b; & prenant les x ſur AB du même point A d'où l'on prend les x de la parabole, aura pour abſciſſe $SB = a + x$, & pour ordonnée $BC = y$, & pour équation $\frac{ab+bx}{a} = y$; d'où l'on tire $x = \frac{ay-ab}{b}$; ſi l'on met cette valeur de x dans l'équation de la parabole, on aura la troiſiéme équation $yy - \frac{apy+abp}{b} = 0$, dans laquelle

y a deux valeurs positives, * qui sont celles des deux ordonnées BC (y), bc (y), menées des deux points C, c où la droite SCc, dont l'équation est $x = \frac{ay - ab}{b}$, coupe la parabole ACc, dont l'équation est $yy - px = 0$; lesquelles deux ordonnées communes à la droite & à la parabole, sont devenues déterminées par la commune intersection de la droite & de la parabole. * 39 8e. Cor.

Cet exemple suffit pour faire clairement concevoir le principe, & pour faire voir en même tems quelle en est la raison ; avec quelle justesse l'Analyse s'accorde avec la Geometrie, & comment elle fait découvrir avec le seul calcul les proprietés des figures les plus composées jointes les unes avec les autres, & comment réciproquement la Geometrie exprime par ses figures les resolutions des Problêmes découvertes par l'Analyse ; c'est ce qu'on verra mieux par l'usage que l'Analyse fait de ce principe.

Usage que l'Analyse fait du principe précedent, pour former la methode de trouver exactement, par les figures de la Geometrie, les lignes qui sont les valeurs des racines des équations déterminées qui donnent la résolution des Problêmes déterminées de quelque degré que puissent être ces équations. C'est cette methode qu'on nomme la construction des équations.

463. IL suit du principe précedent, que pour trouver les lignes qui sont les valeurs des racines d'une équation déterminée quelconque, c'est-à-dire de quelque degré qu'elle puisse être, dont l'inconnue est par exemple z ; 1°. Il faut trouver deux équations dans chacune desquelles l'une des inconnues, par exemple celle qui marque les ordonnées, soit z ; & l'autre qui exprime les coupées, soit une autre inconnue comme u aussi commune à ces deux équations ; & que ces équations comprennent aussi, non chacune, mais les deux ensemble, toutes les grandeurs connues de l'équation qu'on veut resoudre, & enfin qu'elles soient telles qu'en faisant évanouir l'inconnue u par leur moyen, la troisiéme équation qui en viendra soit precisément l'équation proposée à resoudre.

464. Par exemple si on veut resoudre l'équation du quatriéme degré $z^4 - nz^3 + pzz - qz + r = 0$, il faut trouver deux équations comme $zu - \sqrt{r} = 0$, qui est une équation à l'hyperbole par raport aux asymptotes, & $zz - nz + p - \frac{q}{\sqrt{r}}u + uu = 0$, qui est une équation au cercle, qui sont telles qu'en mettant dans la seconde les valeurs de u, uu, qui sont $u = \frac{\sqrt{r}}{z}$, $uu = \frac{r}{zz}$, l'on a pour troisiéme équation la proposée.

2°. Il faut tracer les courbes des deux équations qu'on a trouvées en commançant par laquelle on voudra, par exemple on tracera d'abord l'hyperbole équilatere de l'équation $zu - \sqrt{r} = 0$; ou bien (en supposant, pour ne pas se servir d'incommensurables, $\sqrt{r} = aa$) de l'équation $zu - aa = 0$, en tirant les deux droites perpendiculaires OR, OH; & prenant OR & la perpendiculaire Rr à OR, chacune $= a$, & traçant par r l'hyperbole dont OR, OH seront les asymptotes, après quoi nommant $OC\,(u)$, & $BC\,(z)$, l'on aura $BC \times OC\,(zu) = OR \times Rr\,(aa = \sqrt{r})$

FIGURE XXXVII.

L'hyperbole étant ainsi tracée, il faut ensuite décrire le cercle dont l'équation est $zz - nz + uu - \frac{q}{\sqrt{r} = aa}u + p = 0$; & il le faut faire de telle maniere, que les ordonnées z du cercle soient sur les ordonnées $BC\,(z)$ de l'hyperbole, ou bien qu'elles leur soient paralleles, & qu'elles ayent la même origine; & qu'il en soit de même des coupées du cercle & de l'hyperbole. Mais les termes $nz\frac{q}{\sqrt{r}}u$, marquant * que l'équation est à une ligne parallele au diametre, il faut comparer cette équation du cercle avec l'équation indéterminée du cercle * $zz - 2lz + uu - 2iu + ll + ii - \frac{1}{4}dd = 0$, & supposer que ces deux équations sont la même équation, c'est-à-dire, que leurs termes correspondans sont égaux; (s'il y avoit eû le terme uz dans l'équation du cercle, il auroit falu la comparer avec l'équation indéterminée du cercle où se trouve uz *) cette supposition donnera les équations particulieres propres à déterminer les valeurs de l, i, d, par raport à l'équation $zz - nz + uu - \frac{q}{aa = \sqrt{r}}u + p = 0$; & l'on trouvera $l = \frac{1}{2}n$, $i = \frac{q}{2\sqrt{r} = 2aa}$, $\frac{1}{2}d = \sqrt{ll + ii - p} = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$.

* 436.

FIGURE XXIX.

* 436.

* 436.

FIGURE XXXVII.

Pour décrire à présent le cercle de cette équation de la maniere propre à donner les racines de la proposée, il faut de l'origine O prendre sur la ligne OH des ordonnées z de

l'hyperbole, qu'on ſuppoſe auſſi être la ligne des ordonnées z du cercle, la ligne $OH = l = \frac{1}{2}n$; ſi la valeur de $l = \frac{1}{2}n$ eût été négative, il auroit falu prendre $OH = \frac{1}{2}n$ ſur HO prolongée de l'autre côté de l'origine O; ce qu'il faut remarquer pour la ſuite. Après cela il faut élever par le point H la perpendiculaire $HK = i = \frac{q}{2\sqrt{r}}$; le point K ſera le centre du cercle qu'il faut décrire. C'eſt pourquoi du centre K avec le rayon $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, il faut décrire la circonference $BBBA$, & mener des quatre points B, B, &c. où elle coupe l'hyperbole, les quatre lignes BC perpendiculaires ſur la ligne OH des z, & ces quatre lignes BC détermineront les quatre lignes OC, OC, &c. qui ſeront les quatre valeurs exactes de z dans l'équation propoſée z^4, &c. ou, ſi l'on veut, leurs quatre paralleles & égales Bc, Bc, &c. car le cercle $BBBAB$ a pour équation par la conſtruction, $zz - nz + uu - \frac{q}{\sqrt{r}}u + p = 0$; & on peut encore le démontrer ainſi, $FB = OC - OH = z - \frac{1}{2}n$, $KF = KH - FH = \frac{q}{2\sqrt{r}} - u$; & le rayon du cercle $KB = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$. Or à cauſe du triangle rectangle KFB, (on imagine facilement la ligne KB, qui n'eſt pas marquée dans la figure 37) $\overline{KB}^2 = \overline{KF}^2 + \overline{FB}^2$; ce qui donne en mettant les valeurs de ces quarrés, l'équation précedente du cercle. L'équation de l'hyperbole eſt auſſi $zu - \sqrt{r} = 0$ par la conſtruction; d'où prenant la valeur de $u = \frac{\sqrt{r}}{z}$, & la ſubſtituant dans l'équation précedente du cercle, on trouve preciſément l'équation propoſée z^4, &c.

165. On remarquera ſur cette conſtruction, 1°. qu'on peut trouver ſur la figure même le rayon $KB = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, ſans en faire d'autre à part; car il n'y a qu'à imaginer l'hypothenuſe OK du triangle rectangle OHK qui ſera égale à $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$; faire enſuite le demi-cercle dont elle ſera le diametre, & y inſcrire la corde $OA = \sqrt{p}$, & l'autre corde KA, étant le côté du triangle rectangle dont l'hypothenuſe eſt $OK = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$, & le côté $OA = \sqrt{p}$; l'autre côté KA ſera égal à $\sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, & ſera par conſequent le rayon du cercle de l'équation précedente.

166. 2°. Si le cercle coupoit les hyperboles oppoſées, les valeurs de z que donneroient les interſections de l'hyperbole BB,

ſeroient les racines poſitives, & celles que donneroient les interſections de l'hyperbole oppoſée, ſeroient les négatives.

467. 3°. Si le cercle touchoit ſeulement l'hyperbole ſans la couper, ce ſeroit une marque que deux interſections ou même les quatre ſeroient réunies en une; ce qui feroit connoître que les valeurs de z, ou du moins deux ſeroient égales.

468. 4°. Si la corde $OA = \sqrt{p}$, étoit trop grande pour être inſcrite à la demi circonference décrite ſur le diametre $OK = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r}}$, ce ſeroit une marque que les racines ſeroient imaginaires, comme auſſi ſi le cercle, dont le rayon eſt $KA = \sqrt{\frac{1}{4}nn + \frac{qq}{4r} - p}$, étoit trop petit, & ne coupoit ni ne touchoit l'hyperbole BB, &c. Ces remarques font voir la conformité de la Geometrie & de l'Analyſe, & elles ſervent, ſur-tout les trois dernieres, dans toutes les conſtructions des équations.

COROLLAIRE.

469. IL eſt évident par le principe & par l'application qu'on en vient de faire, qu'on peut reſoudre ou conſtruire une équation déterminée quelconque, par le moyen d'une équation à la ligne droite, & d'une équation à une courbe du même degré que ſera l'équation propoſée : Qu'une équation du troiſiéme ou du quatriéme degré peut ſe conſtruire par le moyen de deux équations dont chacune eſt celle d'une ſection conique, (on y comprend le cercle & de même dans la ſuite); que les équations du cinquiéme & ſixiéme degré peuvent ſe conſtruire par une équation d'une ſection conique & par l'équation d'une courbe du ſecond genre : Que les équations du ſeptiéme & du huitiéme degré peuvent ſe conſtruire par une équation d'une ſection conique & une autre d'une courbe du troiſiéme genre. Les équations du 5e, 6e, 7e, 8e & 9e degré peuvent auſſi ſe conſtruire par deux équations chacune d'une courbe du ſecond genre. L'on peut déduire aiſément du principe & de l'application qu'on en a faite, de quel genre doivent être les courbes dont on pourra prendre les équations pour conſtruire les équations déterminées des degrés plus élevés.

Mais il faut remarquer que les conſtructions des équations déterminées par les équations des courbes les plus ſimples,

doivent être preferées aux conſtructions par les équations des courbes plus compoſées ; ainſi (ſans parler de la conſtruction des équations déterminées du ſecond degré où le cercle & les lignes droites ſuffiſent) l'on conſtruit les équations du troiſiéme & du quatriéme degré par les équations de deux ſections coniques, dont l'une eſt ordinairement celle du cercle, comme étant très-facile à décrire ; celles du cinquiéme & ſixiéme degré par une équation d'une ſection conique & une d'une courbe du ſecond genre ; les équations du ſeptiéme, huitiéme & neuviéme degré, par deux équations de deux courbes du ſecond genre, &c.

Il ne reſte plus pour faire concevoir clairement comment l'Analyſe ſe ſert des courbes pour trouver les racines des équations déterminées, qu'à expliquer la méthode dont il faut ſe ſervir pour trouver quand on a une équation déterminée, les deux équations aux deux courbes qui ſervent à la conſtruire.

Méthode pour trouver les équations des courbes qui ſervent à conſtruire les équations déterminées.

I.

Pour les équations déterminées du 3e & du 4e degré.

270. TOUTES les équations du troiſiéme degré peuvent être repréſentées par cette formule $z^3 + nzz + aqz + aar = 0$; on peut toujours donner une ſemblable préparation aux grandeurs connues d'une équation * ; on ſuppoſe que les * 279.
ſignes + repréſentent ceux des équations particulieres ; ainſi quand il y a quelques termes de ces équations qui ont —, les ſignes + des termes correſpondans de la formule repréſentent ces ſignes. Quand le ſecond terme manque, n eſt égale à zero. Pour ne faire qu'un cas des équations du troiſiéme & du quatriéme dégré, il faut multiplier les équations du troiſiéme degré par l'inconnue z, & la formule ſera $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz = 0$; & alors l'une des racines ſera égale à zero. On n'employe pas la lettre p, parcequ'on s'en eſt ſervi dans les équations des ſections coniques, par raport à leurs diametres & aux lignes differentes de leur diametre, pour marquer le parametre. Les équations du quatriéme

degré peuvent de même être repréſentées par cette formule $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + a^3s = 0$. L'on peut reſoudre ces équations par deux équations ; la premiere à une ſection conique quelconque ſans qu'elle ſoit déterminée, c'eſt-à-dire, par une parabole quelconque, par une ellipſe quelconque, & par une hyperbole quelconque ; la ſeconde par un cercle auſſi quelconque. L'on peut auſſi les reſoudre par deux équations à deux ſections coniques, dont l'une ſoit déterminée, c'eſt-à-dire une telle parabole déterminée, une telle ellipſe, ou une telle hyperbole déterminée, ou un tel cercle déterminé, & dont l'autre ne ſoit pas déterminée.

PREMIER CAS.

Quand aucune des deux ſections coniques n'eſt déterminée.

471. 1°. IL faut ſuppoſer cette équation à la parabole 1re. $au = zz + \frac{1}{2}nz$; en quarrant chaque membre, on aura $aauu = z^4 + nz^3 + \frac{1}{4}nnzz$.

2°. Il faut mettre dans chacune des formules précedentes $aauu - \frac{1}{4}nnzz = z^4 + nz^3$ à la place de $z^4 + nz^3$, & $au - \frac{1}{2}nz = zz$ à la place de zz ; & la premiere formule donnera $aauu - \frac{1}{4}annu + \frac{1}{8}n^3z = 0$; $+ aaqu - \frac{1}{2}anqz$ $+ aarz$ | qui devient en diviſant par aa, 2e. $uu - \frac{nn}{4a}u + \frac{n^3}{8aa}z = 0$, $+ qu - \frac{nq}{2a}z$ $+ rz$

qui eſt une ſeconde équation à la parabole quand l'équation propoſée eſt du troiſiéme degré. La ſeconde formule donnera, 2e. $uu - \frac{nn}{4a}u + \frac{n^3}{8aa}z + as = 0$, qui eſt une ſeconde $+ qu - \frac{nq}{2a}z$ $+ rz$ équation à la parabole quand la propoſée eſt du quatriéme degré.

3°. Il faut ajouter enſemble la 1re. & la 2e. équation, & l'on aura, 3e. $uu - \frac{nn}{4a}u + zz + \frac{n^3}{8aa}z = 0$. $+ qu - \frac{nq}{2a}z$ $- au + rz$ $+ \frac{1}{2}nz$

C'eſt l'équation au cercle pour la formule du troiſiéme degré.

On

On ajoutera de même la premiere & la 2e équation, & l'on aura, 3e, $uu - \frac{nn}{4a}u + zz + \frac{n3}{8aa}z + as = 0$.

$+ qu \quad - \frac{nq}{2a}z$

$- au \quad + rz$

$+ \frac{1}{2}nz$

C'eſt l'équation au cercle pour la forme du quatriéme degré.

72. On peut trouver les racines de toute équation du troiſiéme degré repréſentée par la formule, en conſtruiſant la parabole de la premiere équation, & lui joignant le cercle de la 3e équation qui la coupera en quatre points, dont un ſera au ſommet de la parabole, auquel point $z = 0$; & menant des trois autres points de ces interſections trois ordonnées à la ligne des abſciſſes u de la parabole, elles ſeront les trois valeurs des racines de l'équation du troiſiéme degré. Si le cercle ne coupoit la parabole qu'en un point outre celui du ſommet, il y auroit deux racines imaginaires; & s'il la coupoit en un point & la touchoit en un autre, il y auroit deux racines qui ſeroient égales à cauſe de l'union de deux interſections dans le point touchant.

73. On peut de même trouver les racines de toute équation du quatriéme degré repréſentée par la formule, en traçant la parabole de la premiere équation, & lui joignant le cercle de la 3e équation. Mais pour ne pas groſſir ce Traité inutilement, on n'en donnera un exemple que dans le ſecond cas.

74. Si l'on vouloit ſe ſervir, pour trouver les racines des équations du troiſiéme & du quatriéme degré repréſentées par les formules précedentes, du cercle de la 3e ou IIIe équation, & d'une ellipſe ou d'une hyperbole; voici la maniere de trouver les équations.

4°. Il faut retrancher la premiere équation de la 2e, & l'on aura $uu - \frac{nn}{4a}u - zz + \frac{n3}{8aa}z = 0$.

$+ qu \quad - \frac{nq}{2a}z$

$+ au \quad + rz$

$- \frac{1}{2}nz$

C'eſt une équation à l'hyperbole équilatere par raport au diametre pour la formule du troiſiéme degré.

On retranchera de même la premiere équation de la 2e, & l'on aura $uu - \frac{nn}{4a}u - zz + \frac{n^3}{8aa}z + as = 0$.

$+ qu \quad - \frac{nq}{2a}z$

$+ au \quad + rz$

$- \frac{1}{2}nz$

C'eſt une équation à l'hyperbole équilatere par raport au diametre pour la formule du quatriéme degré.

475. 5°. Pour trouver des équations à l'ellipſe & à l'hyperbole qui n'eſt pas équilatere, il faut multiplier la 1re équation par la fraction arbitraire mais connue $\frac{b}{c}$, & l'on aura $\frac{b}{c}zz + \frac{bn}{2c}z - \frac{ab}{c}u = 0$. Il faut enſuite ajouter cette équation à la 2e, & la ſomme ſera une équation à l'ellipſe pour la formule du troiſiéme degré; & enſuite la retrancher de la 2e, & la difference ſera une équation à l'hyperbole non équilatere par raport au diametre, pour la formule du troiſiéme degré.

On ajoutera de même cette équation à la 2e, & enſuite on l'en retranchera, & la ſomme ſera une équation à l'ellipſe pour la formule du quatriéme degré, & la difference ſera une équation à l'hyperbole pour la formule du quatriéme degré.

476. L'on peut trouver de differentes façons les lignes qui ſont les racines de la formule du troiſiéme & du quatriéme degré, en joignant deux à deux les équations précedentes qui répondent à la formule du troiſiéme degré, quand la propoſée eſt du troiſiéme degré, & celles qui répondent à la formule du quatriéme degré, quand la propoſée eſt du quatriéme degré, puis traçant les courbes de ces deux équations de maniere que les u de l'une ſoient ſur les u de l'autre, ou leur ſoient paralleles & ayent la même origine, & que ce ſoit la même choſe des z; mais il vaut mieux dans la pratique ſe ſervir de l'une des équations aux ſections coniques avec l'équation du cercle, parceque le cercle eſt plus facile à décrire; & dans ce cas il faut ſe ſervir des axes des ſections coniques, parceque les ordonnées du cercle ſont toujours perpendiculaires aux coupées.

477. 6°. Si l'on veut une équation à l'hyperbole par raport aux aſymptotes, pour ne faire qu'un même cas des équations du troiſiéme & du quatriéme degré, on multipliera la formule du troiſiéme degré $z^3 + nzz + aqz + aar = 0$, par $z + a = 0$, quand le dernier terme aura $+$, & par

$z - a = 0$, quand le dernier terme aura $-$; & l'on aura l'équation du 4e degré $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + a^3r = 0$;
$+ az^3 + anzz + aaqz$

on comprendra enſuite cette formule, c'eſt-à-dire toutes les équations du 3e degré ainſi élevées au 4e avec toutes les équations du 4e ſous cette formule commune du 4e degré $z^4 + nz^3 + aqzz + aarz + aass = 0$; l'on ſuppoſe que dans toutes les équations du 4e degré de cette formule, le dernier terme a $+$; il n'importe pas quel ſigne ayent les termes moyens entre le premier & le dernier. On ſuppoſera cette équation à l'hyperbole entre les aſymptotes I. $uz - as = 0$; en la quarrant on aura $uuzz = aass$; on mettra dans le dernier terme de la formule la valeur de $aass$; & l'on aura en diviſant par zz, $zz + nz + aq + \frac{aar}{z} + uu = 0$; & mettant dans le terme $\frac{aar}{z}$ la valeur de $z = \frac{as}{u}$ priſe de la Ire équation, l'on aura II. $zz + nz + uu + \frac{ar}{s}u + aq = 0$, qui eſt une équation au cercle, que l'on trouveroit encore en mettant ſimplement au lieu de as, ſa valeur uz dans le dernier terme de la formule, car l'on auroit en diviſant par z, $z^3 + nzz + aqz + aar + asu = 0$; & multipliant par u, & mettant enſuite pour uz ſa valeur as, puis diviſant par as, l'on auroit $zz + nz + uu + \frac{ar}{s}u + aq = 0$. Si l'on décrit l'hyperbole de la premiere équation, & qu'on décrive enſuite le cercle de la 2e équation, de maniere que l'origine des u & celle des z ſoient communes, & que les u du cercle ſoient paralleles aux u de l'hyperbole, & que ce ſoit la même choſe des z, les interſections du cercle & de l'hyperbole ou des hyperboles oppoſées, quand il y a des racines poſitives & négatives, donneront les points de l'hyperbole, d'où menant les ordonnées z de l'hyperbole, l'on aura les racines de la propoſée qui ſeront ces ordonnées z. Si le dernier terme de la formule étoit négatif, il eſt évident que le terme uu de l'équation au cercle auroit le ſigne $-$; ainſi elle ſeroit l'équation d'une hyperbole équilatere, & non pas d'un cercle.

78. Si le dernier terme de la formule étoit négatif, il faudroit transformer l'équation du quatriéme degré de maniere que le dernier terme fût poſitif dans la transformée, ce qui eſt toujours poſſible : car le dernier terme n'étant négatif dans le quatriéme degré que parcequ'il y a quelque racine néga-

45. tive, en les rendant toutes positives, le dernier terme de viendra positif.

REMARQUE.

479. QUAND l'équation donnée n'a pas de second terme, il n'y a qu'à supposer toutes les grandeurs des équations précedentes où est n égales à zero, & elles serviront pour résoudre cette équation.

SECOND CAS.

Quand l'une des sections coniques est donnée.

480. IL faut, quand l'on veut employer une section conique donnée pour résoudre une équation du troisiéme ou du quatriéme degré, introduire dans les équations qui y doivent servir des grandeurs indéterminées, de maniere que par le moyen de ces indéterminées, l'on puisse déterminer l'équation de la parabole ou de l'ellipse, ou du cercle, ou de l'hyperbole qu'on aura trouvée par la méthode être l'une des deux équations qui doit résoudre l'équation proposée, l'on puisse, dis je, la déterminer à être l'équation de cette section conique donnée. Comme l'on a déja employé dans les équations aux sections coniques qui expriment leur raport à d'autres lignes que leur diametre les lettres d, p, f, g, h, i, l, on se servira ici de deux autres indéterminées k & m. On ne fera, pour abreger, qu'un cas des équations du troisiéme &
477. du quatriéme degré, comme dans l'article 6 du premier cas.

METHODE.

481. SOIT la formule de toutes les équations du troisiéme degré élevées au quatriéme, & de toutes les équations du 4e degré, $y^4 + ny^3 + aqyy + aary + aass = 0$.

1°. Il faut la transformer en supposant $y = \frac{zz}{k}$, k est une indéterminée ; & substituant cette valeur de y, on aura la transformée $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 + \frac{kkq}{a} zz + \frac{k^3 r}{a} z + \frac{k^4 ss}{aa} = 0$; on regardera cette transformée comme l'équation proposée à résoudre ; & quand on aura déterminé k, & trouvé les racines, on aura les valeurs de y en mettant dans $y = \frac{zz}{k}$ les valeurs de z & de k.

482. 2°. Il faut supposer cette équation à quelle parabole on voudra, & même à une parabole donnée à cause de l'indéterminée k, I. $zz + \frac{nk}{2a} z = ku$, ou $zz + \frac{nk}{2a} z - ku = 0$,

qui donnera $z^4 + \frac{nk}{n} z^3 + \frac{nnkk}{4aa} zz = kkuu$; ainſi l'on aura $zz = ku - \frac{nk}{2a} z$, & $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 = kkuu - \frac{nnkk}{4aa} zz$. On mettra dans la propoſée les valeurs de $z^4 + \frac{nk}{a} z^3$, & de zz ; & l'on aura II. $uu + \frac{qk}{a} u - \frac{nqk}{2aa} z + \frac{kkss}{aa} = 0$,

$$- \frac{nnk}{4aa} u + \frac{n^3k}{8a^3} z$$
$$+ \frac{rk}{a} z$$

qui eſt une ſeconde équation à la parabole.

On ajoutera la Ire & la IIe équation, & l'on aura

III. $zz + \frac{rk}{a} z + uu + \frac{qk}{a} u + \frac{kkss}{aa} = 0$,

$$- \frac{nqk}{2aa} z \qquad - \frac{nnk}{4aa} u$$
$$+ \frac{n^3k}{8a^3} z \qquad - ku$$
$$+ \frac{nk}{2a} z$$

qui eſt une équation à quel cercle on voudra à cauſe de l'indéterminée k, & même à un cercle donné, à cauſe de la même indéterminée.

183. 3°. Si l'on veut des équations à une ellipſe donnée, & à une hyperbole donnée par raport au diametre, il faut introduire une nouvelle indéterminée m, ce qui ſe fera en multipliant la Ire équation par $\frac{m}{a}$, & l'on aura IV. $\frac{m}{a} zz + \frac{kmn}{2aa} z - \frac{km}{a} u = 0$.

On ajoutera cette IVe équation à la IIe, & l'on aura

V. $uu + \frac{qk}{a} u + \frac{m}{a} zz + \frac{kmn}{2aa} z + \frac{kkss}{aa} = 0$.

$$- \frac{nnk}{4aa} u \qquad - \frac{nqk}{2aa} z$$
$$- \frac{km}{a} u \qquad + \frac{n^3k}{8a^3} z$$
$$+ \frac{rk}{a} z$$

qui eſt une équation à une ellipſe qui peut être donnée à cauſe des deux indéterminées k & m, dont k ſervira à déterminer le diametre de cette équation à être le diametre donné de l'ellipſe donnée, & m à déterminer le parametre de cette équation à être le parametre donné de l'ellipſe donnée.

On retranchera la IVe équation de la IIe, & l'on aura

VI. $uu + \frac{qk}{a} u - \frac{m}{a} zz - \frac{kmn}{2aa} z + \frac{kkss}{aa} = 0$,

$$- \frac{nnk}{4aa} u \qquad - \frac{nqk}{2aa} z$$
$$+ \frac{km}{a} u \qquad + \frac{n^3k}{8a^3} z$$
$$+ \frac{rk}{a} z$$

qui eſt une équation à une hyperbole par raport au diame-

tre, qui peut être donnée à cauſe de deux indéterminées k & m.

Comme il n'y a point de terme uz dans la Ve & la VIe
419. équation, $\frac{m}{a}$ eſt le raport du parametre au diametre; par conſequent nommant d le diametre de l'ellipſe & de l'hyperbole donnée, & p le parametre, l'on aura toujours $m = \frac{ap}{d}$; ce qui détermine m par raport à l'ellipſe donnée ou à l'hyperbole donnée.

484. On peut trouver les racines de la propoſée par la Ve équation, après l'avoir déterminée à être l'équation de l'ellipſe donnée, & par la IIIe qui eſt l'équation du cercle; mais alors le cercle ne peut plus être donné, parcequ'il ne reſte plus d'indéterminées pour déterminer l'équation IIIe à être l'équation d'un tel cercle donné. On peut auſſi trouver ces mêmes racines par la VIe équation après l'avoir déterminée à être l'équation de l'hyperbole donnée, & par la IIIe équation qui eſt celle du cercle, mais qui ne peut plus être donné par la raiſon qu'on vient de dire. Il y a pourtant des cas quand le diametre de l'hyperbole donnée eſt moindre que ſon parametre, dans leſquels, lorſqu'on veut déterminer k, on ne trouve que des valeurs imaginaires de k; ainſi dans ces cas de quelques équations particulieres qu'on peut trouver à réſoudre, on ne le peut pas par une telle hyperbole donnée avec le cercle; mais on le peut toujours avec une hyperbole donnée par raport aux aſymptotes, comme on le va expliquer, en faiſant remarquer auparavant que l'angle des ordonnées du cercle étant toujours droit, il faut auſſi toujours ſe ſervir de l'axe ou de l'un des axes dans la ſection conique à laquelle on joint le cercle pour réſoudre l'équation; & quand l'hyperbole entre les aſymptotes eſt arbitraire, & qu'on veut l'employer avec le cercle, il faut prendre l'équilatere à cauſe de l'angle droit que font les aſymptotes.

485. 4°. Si l'on veut réſoudre la propoſée par une hyperbole donnée entre les aſymptotes & par un cercle, il faut ſuppoſer la racine quarrée $\frac{kk'}{a}$ du dernier terme de la transformée égale à uz, & l'on aura VII. $uz = \frac{kk'}{a}$, ou $uz - \frac{kk'}{a} = 0$, qui eſt une équation à l'hyperbole entre les aſymptotes, qui peut être donnée à cauſe de l'indéterminée k; car ſuppoſé

que l'équation de l'hyperbole donnée soit $uz = bb$, l'on aura $\frac{kks}{a} = bb$; par conséquent $k = bv\frac{a}{s}$; ce qui détermine la valeur de k de maniere que l'équation indéterminée $uz - \frac{kks}{a} = o$, devient l'équation particuliere de l'hyperbole donnée.

Pour trouver l'équation au cercle qui doit être joint à l'hyperbole donnée pour trouver les racines de la proposée, il faut distinguer deux cas; le premier, quand l'hyperbole donnée est équilatere; le second quand elle ne l'est pas; alors l'angle des asymptotes est aigu ou obtus.

PREMIER CAS.

Quand l'hyperbole donnée est équilatere.

IL faut quarrer chaque membre de la VIIe équation, mettre dans la transformée au lieu du dernier terme $\frac{kkss}{aa}$ sa valeur $uuzz$, diviser ensuite l'équation par zz, & mettre dans le terme $\frac{k^3s^3}{a^3z}$, la valeur de z prise de la VIIe équation $z = \frac{kks}{au}$; & l'on aura VIII. $zz + \frac{nk}{a}z + \frac{kkq}{a} + \frac{ks}{s}u + uu = o$, qui est l'équation du cercle, qu'il faut joindre à l'hyperbole donnée pour trouver par ses intersections avec l'hyperbole les racines de la transformée.

SECOND CAS.

Quand l'angle des asymptotes est aigu ou obtus.

IL faut introduire une nouvelle indéterminée m, par le moyen de laquelle on pourra faire en sorte que quoique l'équation exprime le raport du cercle comme dans la figure 29, à une droite ON qui ne fait pas un angle droit avec les ordonnées du cercle, cependant on puisse avoir une autre ligne OM parallele au diametre Aa du cercle à laquelle les ordonnées du cercle soient perpendiculaires. Pour introduire cette indeterminée m il faut multiplier la VIIe équation par $\frac{m}{a}$, & l'on aura IX. $\frac{m}{a}uz - \frac{mkks}{aa} = o$. Il faut l'ajouter à la VIIIe quand l'angle des asymptotes est aigu, & l'on aura X. $zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{ks}{s}u + \frac{kkq}{a} = o$, qui est l'équation $- \frac{mkks}{aa}$ du cercle dont on a besoin. Il faut retrancher la IXe équation de la VIIIe quand l'angle des asymptotes est obtus, &

l'on aura XI. $zz - \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{kr}{s}u + \frac{kkq}{a} + \frac{mkkr}{aa} = 0$, qui eſt l'équation au cercle dont on a beſoin.

486. On remarquera que le dernier terme de la propoſée doit avoir + quand on ſe ſert de l'équation de l'hyperbole aux aſymptotes, afin que uu ait + dans l'équation du cercle qu'il faut joindre à l'hyperbole pour la réſolution de l'équation ; on remarquera auſſi que quand le ſecond terme des équations à réſoudre eſt évanoui, il n'y a qu'à ſuppoſer dans toutes les équations les grandeurs où eſt n égales à zero, & les mêmes équations ſerviront pour le cas où le ſecond terme eſt évanoui.

Avertiſſement.

Pour faire clairement concevoir la conſtruction des équations à ceux qui commencent, on en mettra ici deux exemples.

EXEMPLE I.

La conſtruction des équations du troiſiéme & du quatriéme degré par le moyen d'une parabole donnée & d'un cercle, en ſe ſervant de la Ire & de la IIIe équation du ſecond cas *.

* 482.

487. POUR ne faire qu'un cas des équations du troiſiéme & du quatriéme degré par la méthode de l'art. 477, on ſuppoſera que $y^4 + ny^3 + aqyy + aary + aass = 0$, repréſente toute équation qu'on veut réſoudre du troiſiéme ou du quatriéme
* 481. degré, & qu'en ſuppoſant $y = \frac{ss}{k}$, $z^4 + \frac{nk}{a}z^3 +$ * &c. en eſt la transformée, & qu'elle eſt l'équation dont on fait la conſtruction, après laquelle conſtruction on aura les valeurs de y, en mettant celles de z & de k dans $y = \frac{ss}{k}$.

FIGURE XXXVIII. Soit la parabole donnée OAC, dont l'axe eſt AB, le parametre $AP = a$, & l'équation $yy - ax = 0$; pour faire en
* 482. ſorte que l'équation indéterminée à la parabole * $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, convienne à la parabole donnée, il faut s'imaFIGURE XXVII. giner que la parabole AC (fig. 27) eſt la donnée, que les x ſe prennent ſur AB, que BC, BC ſont les ordonnées y, & AP (p) eſt le parametre a : Le terme $\frac{nk}{2a}z$ marque que l'équation $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, exprime le raport des points de la parabole donnée à une autre ligne que l'axe ; & comme uz ne s'y trouve pas, cela marque que cette ligne eſt parallele à
* 438. l'axe * ; ainſi il faut s'imaginer que c'eſt OM qui eſt $= u$, & que

que MN (g) eſt zero, & ON (f) la même que OM (b), que $MC = z$; & l'équation * $zz - \frac{2g}{f}uz - 2lz + \frac{gg}{ff}uu + \frac{2gl}{f}u$ * 427.
$- \frac{hp}{f}u + ll + ip = 0$, à cauſe de $g = 0$, & $b = f$ eſt zz
$- 2lz - pu + ll + ip = 0$. Il faut ſuppoſer que c'eſt la même équation que $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, & que les termes correſpondans ſont égaux, ce qui donne $AL\,(l) = -\frac{nk}{4a}$. p ou $a = k$, ce qui détermine k; le dernier terme $+ ll + ip = 0$, puiſque le terme connu eſt zero dans $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$; ainſi mettant la valeur de ll, l'on a $\frac{nnkk}{16aa} + ip = 0$; & mettant au lieu de k ſa valeur p ou a (p étant ici nommée a), l'on trouve LO ou $Ai\,(i) = -\frac{nn}{16a}$, & $AL\,(l) = -\frac{n}{4}$; ainſi l'équation $zz + \frac{nk}{2a}z - ku = 0$, devient l'équation de la parabole donnée (A) $zz + \frac{n}{2}z - au = 0$, en mettant au lieu de k ſa valeur a; mais elle exprime le raport des points de la parabole à une ligne parallele à l'axe AB qu'on trouve ainſi. Soit menée AL perpendiculaire à l'axe AB, & égale à $\frac{n}{4}$, il faut la mener vers la gauche de l'axe, parcequ'elle eſt négative, & que l'on prend ici la droite de l'axe pour les ordonnées poſitives; ſi le ſecond terme de la transformée avoit été négatif, $\frac{n}{4}$ auroit été poſitive, & il auroit falu mener AL vers la droite de l'axe. Il faut tracer par L, LO parallele à l'axe qui rencontre la parabole en O; cette ligne ſera la ligne des coupées (u), & LO ſera $= \frac{nn}{16a} = i$; car menant l'ordonnée Ob, le quarré de Ob ou de AL qui eſt $\frac{nn}{16}$ eſt égal au produit de la coupée Ab ou OL qui eſt $\frac{nn}{16a}$ par le parametre a. L'équation de la parabole donnée devient donc par raport à la ligne des coupées OL, $zz + \frac{n}{2}z - au = 0$. Les ordonnées z ſont les perpendiculaires ſur OL prolongées juſqu'à la parabole. FIGURE XXXVIII.

Il faut à preſent joindre à cette parabole le cercle de la IIIe équation, laquelle eſt (en mettant au lieu de k ſa valeur a) $zz + rz + uu + qu + ss = 0$.

$B.$ $-\frac{nq}{2a}z$ $-\frac{nn}{4a}u$
$+\frac{n^3}{8aa}z$ $-au$
$+\frac{n}{2}z$

Il faut s'imaginer que le cercle de la figure 29 * eſt celui * 436.
de cette équation, excepté que le terme uz manquant, la ligne MN (g) eſt zero, & ON (f) ne fait qu'une même ligne

*436. avec OM (b) ; ainſi l'équation * $zz - 2lz + uu - 2iu + ll + ii - \frac{1}{4}dd = 0$, eſt la même que la précedente, & ſuppoſant leurs termes correſpondans égaux, on trouvera OL $(l) = -\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}$. LK ou OH $(i) = -\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}$, & le demi diametre Ka $(\frac{1}{2}d) = \sqrt{-\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}}^2 - \sqrt{-\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}}^2 - ss$.

FIGURE XXXVIII. Les coupées u de la parabole donnée ayant leur origine au point L, & ſe prenant ſur LO, & les ordonnées commençant à la ligne LO des abſciſſes, à laquelle elles ſont perpendiculaires comme Obc, il faut prendre ſur LO la ligne $OD = -\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}$, laquelle OD répond à OH (i) de la fig. 29 quand cette quantité eſt poſitive, mais quand elle ſe trouve négative, il faut prendre Od égale à cette quantité ſur OL prolongée de l'autre côté. Il faut enſuite élever au point D la perpendiculaire $DK = -\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}$, laquelle DK répond à HK (l) de la figure 29 ; mais quand elle eſt négative, il faut prendre Dk égale à cette quantité de l'autre côté. Le point K ou k eſt le centre du cercle, qu'il faut décrire avec le rayon, qu'on nommera $\frac{1}{2}d$, égal à cette quantité $\sqrt{-\frac{r}{2} + \frac{nq}{4a} - \frac{n^3}{16aa} - \frac{n}{4}}^2 - \sqrt{-\frac{q}{2} + \frac{nn}{8a} + \frac{a}{2}}^2 - ss$, & tirer des points C, C, où il coupera la parabole des perpendiculaires ſur la ligne LOD ; ces perpendiculaires ſeront les valeurs des racines de la transformée : car prenant la valeur de u dans l'équation A de la parabole donnée, & la ſubſtituant dans l'équation B du cercle, on trouvera l'équation transformée propoſée à réſoudre.

REMARQUES.

I.

488. QUAND le ſecond terme manque dans la propoſée, la même conſtruction ſert en ſuppoſant $n = 0$ dans toutes les grandeurs où elle ſe trouve, & la conſtruction eſt bien plus facile, la parabole donnée n'ayant nul beſoin de préparation ; il faut ſeulement y joindre le cercle, mais on a voulu rendre la conſtruction generale.

II.

489. Quand l'équation propoſée n'eſt que du troiſiéme degré, mais élevée au quatriéme degré, l'une des valeurs de z ou l'une des GC eſt toujours égale à la grandeur a de l'équation $x \pm a = 0$, par laquelle on a multiplié la propoſée pour l'elever au quatriéme degré, & les autres valeurs de z ſont les racines de la propoſée.

III.

490. Quand on a tiré les lignes OD, DK pour conſtruire le cercle, la ligne qui eſt la valeur du rayon ſe trouve comme à l'art. 465.

IV.

491. Comme l'on a averti que les ſignes + des termes de la formule des équations du troiſiéme & du quatriéme degré repréſentoient les ſignes + ou — des équations particulieres qu'on aura à réſoudre, le Lecteur y doit faire attention, & il trouvera aiſément les ſignes convenables aux cas particuliers.

EXEMPLE II.

La conſtruction des équations du troiſiéme & du quatriéme degré par le moyen d'une hyperbole donnée entre les aſymptotes qui ne ſont pas un angle droit, & d'un cercle en ſe ſervant de la VIIe & de la Xe équation.

492. L'EQUATION à réſoudre eſt la transformée $z^4 + \frac{nk}{a} z^3 + \frac{kkq}{a} zz + \frac{k^3 r}{a} z + \frac{k^4 s}{a^2} = 0$, l'équation à l'hyperbole donnée eſt $uz = \frac{kks}{a}$; on ſuppoſe que les hyperboles oppoſées CC, cc ſont données, c'eſt-à-dire, décrites ſur un plan avec leurs aſymptotes AD, AB, qui font un angle aigu; & que leur équation eſt $uz = bb$: Pour rendre l'équation $uz = \frac{kks}{a}$ propre à cette hyperbole, il faut ſuppoſer $\frac{kks}{a} = bb$, ce qui détermine la valeur de l'indéterminée k, qui devient $k = b\sqrt{\frac{a}{s}}$: Mais pour abreger le calcul on laiſſera k par tout au lieu de ſa valeur qu'il ſera facile de ſubſtituer à ſa place. Il faut joindre à cette hyperbole tracée le cercle dont l'équation eſt $zz + \frac{m}{a} uz + \frac{nk}{a} z + uu + \frac{kr}{s} u + \frac{kkq}{a} - \frac{mkks}{aa} = 0$; enſuite menant des points où il coupera les hyperboles des paralleles à celle des aſymptotes ſur laquelle ſe prennent les z de l'hyperbole, elles ſeront les valeurs de la propoſée. FIGURE XXXIX.

Il faut pour décrire ce cercle s'imaginer que c'eſt celui de la figure 29, & que l'équation précedente eſt la même que

* 436. l'équation * $zz - \frac{2s}{f}uz - 2lz + uu + \frac{2sl}{f}u + ll = 0$; $- \frac{2hi}{f}u + ii$ $- \frac{1}{4}dd$

& ſuppoſer les termes correſpondans égaux ; ainſi, 1°. $-\frac{2s}{f} = +\frac{m}{a}$. On ſuppoſera pour profiter de l'indéterminée m, qu'elle eſt égale à g (GF fig. 29) ; ainſi l'on aura $OF(f) = -2a$, & $FG(g) = m$; d'où il ſuit que $OG(h) = \sqrt{4aa - mm}$; on ſuppoſera pour abreger $h = \sqrt{4aa - mm} = c$; & comme ici $OF(f)$ ou $2a$ ſe trouve négative, & $FG(m)$ poſitive, $OG(-h$ ou $-c)$ ſera négative. 2°. $OL(l) = -\frac{nk}{4}$. 3°. Mettant dans $\frac{2sl-2hi}{f} = \frac{kr}{s}$ les valeurs de f, g, h, l, on trouvera OH ou $KL(i) = \frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}$. 4°. L'équation des derniers termes fera trouver le demi diametre Ka ($\frac{1}{2}d$) $= \sqrt{\frac{nnkk}{4aa} + \frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}^2 - \frac{akkq + mkks}{aa}}$.

FIGURE XXIX.

Il faut joindre à preſent le cercle à l'hyperbole donnée dans laquelle on ſuppoſe que les coupées u ſe prennent ſur l'aſymptote AB, & que les ordonnées z ſont paralleles à l'aſymptote AD : Pour le joindre, il faut que les coupées u du cercle ſe prennent auſſi ſur la même AB, & que les ordonnées z du cercle ſoient paralleles à AD ; c'eſt pourquoi on prendra $AF = -2a$; on menera FG parallele à AD, & du point A on tirera AG perpendiculaire à AD & à FG ; on nommera $FG(m)$; & c'eſt l'avantage qu'on tire de l'indéterminée m qu'on a introduite, de ce qu'étant indéterminée, il eſt libre de la déterminer à la ligne FG qui faſſe un angle droit avec AG, ce qui eſt neceſſaire pour le cercle où les ordonnées doivent être perpendiculaires à cette ligne AG & paralleles à FG ; on nommera GA ($c = \sqrt{4aa - mm}$) ; on prolongera GA vers N. Le triangle rectangle AFG répond au triangle OFG de la figure 29, mais il eſt de l'autre côté à cauſe des quantités négatives. Pour trouver le centre du cercle, il faut prendre du point A ſur l'aſymptote AD parallele aux ordonnées z, $AL = -\frac{nk}{2a}$ du côté oppoſé à AD, parceque cette quantité eſt négative ; cette ligne répond à OL de la figure 29. Il faut enſuite mener par L une parallele LM à la ligne GAN ; cette parallele LM répond à la ligne

FIGURE XXXIX.

LKBa de la figure 29, & c'eſt la ligne du diametre du cercle laquelle paſſe par ſon centre : Pour avoir ce centre, il faut prendre ſur LM la ligne $LK = +\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}$ vers la droite de l'aſymptote DAL où ſont les coupées u poſitives quand LK eſt poſitive du côté oppoſé quand elle eſt négative : cette ligne LK répond à la ligne LK de la figure 29, & le point K eſt le centre du cercle. Enfin de ce centre K avec le rayon $\sqrt{\frac{nnkk}{4aa} + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 - \frac{akkq + mkks}{aa}}$, dont on trouvera la longueur comme ci-deſſus*; on tracera un cercle qui coupera les hyperboles données en des points, deſquels menant les ordonnées $BC(z)$ à l'aſymptote AB, elles ſeront les racines de la transformée propoſée à réſoudre ; les ordonnées de l'hyperbole CC ſeront les racines poſitives, & les ordonnées de l'oppoſée ſeront les négatives : voici comme on le démontre. * 465.

En concevant le rayon KC, l'on aura par la proprieté du cercle, ou à cauſe du triangle rectangle KMC, $\overline{MC}^2 + \overline{KM}^2 = \overline{KC}^2$. Mais $MC = BC(z) + BN(+\frac{m}{2a}u) + NM(+\frac{nk}{2a})$; & $KM = +LK(+\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}) - LM(-\frac{cu}{2a})$; par conſequent $\overline{MC}^2 + \overline{KM}^2 = zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + \frac{mm}{4aa}uu + \frac{mnk}{2aa}u + \frac{nnkk}{4aa} + (\frac{ccuu}{4aa} = +\frac{4aa-mm}{4aa} \times uu =) uu - \frac{mm}{4aa}uu - \frac{mnk}{2aa}u + \frac{kr}{s}u + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 = \frac{nnkk}{4aa} + \overline{\frac{mnk}{2ac} - \frac{akr}{cs}}^2 - \frac{akkq + mkks}{aa}$, qui ſe réduit à $zz + \frac{m}{a}uz + \frac{nk}{a}z + uu + \frac{kr}{s}u + \frac{kkq}{a} - \frac{mkkr}{aa} = 0$, qui eſt l'équation X du cercle qu'on a conſtruite. Mettant dans cette équation la valeur de u priſe de l'équation VII de l'hyperbole, qui eſt $u = \frac{kks}{az}$, & celle de $uu = \frac{k^4ss}{aazz}$, l'on trouve exactement la transformée $z^4 + \frac{nk}{a}z^3$, &c.

3. La conſtruction eſt à peu près ſemblable, quand l'angle des aſymptotes eſt obtus. La plus facile de toutes eſt quand cet angle eſt droit comme ci-deſſus art. 464. On fera ſur cette conſtruction des remarques ſemblables à celles qu'on a faites ſur la précedente.

Il eſt à propos de remarquer auſſi que quand on réſout en particulier un Problême de Geometrie, dont l'équation déterminée monte au troiſiéme ou au quatriéme degré ; on trouve ordinairement avant d'arriver à cette équation déterminée deux équations particulieres du ſecond degré qui ont

les deux inconnues u & z, & qui de plus contiennent toutes les connues du Problême, & c'eſt en ſe ſervant de ces deux équations particulieres pour faire évanouir l'une des inconnues u, qu'on arrive à l'équation déterminée, alors on peut conſtruire le Problême par le moyen de ces deux équations particulieres, c'eſt-à-dire, qu'en conſtruiſant les deux ſections coniques de ces deux équations, & les uniſſant enſemble, les points d'interſection donneront les lignes qui ſatisfont au Problême. Mais quand l'une de ces deux équations particulieres n'eſt pas celle du cercle qui eſt plus facile à decrire que les autres ſections coniques ; on peut préferer la méthode qu'on a donnée où le cercle eſt employé.

II.

La méthode pour trouver les équations des courbes qui ſervent à conſtruire les équations déterminées qui ſurpaſſent le 4e degré.

494. LA méthode eſt ſemblable à celle que l'on a donnée pour les équations déterminées du troiſiéme & du quatriéme degré ; il faut ſeulement faire évanouir le ſecond terme des équations à réſoudre. On peut ſe ſervir de la premiere parabole cubique $y^3 = aax$ pour les équations du 5e, 6e, 7e, 8e & 9e degré, comme on s'eſt ſervi de la parabole du premier genre pour le 3e & 4e degré, & elle fera trouver une ou pluſieurs équations des courbes du ſecond genre, dont l'une étant jointe avec la parabole cubique, la coupera en des points, d'où menant les ordonnées y de la parabole cubique, elles ſeront les racines de l'équation propoſée. Comme l'on n'entrera pas ici dans le détail comme l'on a fait pour les équations du 3e & du 4e degré, & qu'on ſera obligé d'employer pluſieurs lettres qui repréſentent les coëficiens connus, on ſe ſervira pour cela des lettres $i, k, l, m, n, p, q, r, s, t$; & l'on employera a pour tenir lieu d'unité, & pour rendre tous les termes homogenes.

La propoſée eſt par exemple $y^9 + aly^7 + a^2my^6 + a^3ny^5 + a^4py^4 + a^5qy^3 + a^6ryy + a^7sy + a^8t = 0$. On ſuppoſera $+ a^5ky^3$

l'équation $y^3 = aax$; on mettra au lieu de y ſa valeur, excepté dans l'une des grandeurs du terme y^3, & l'on aura $x^3 + \frac{l}{a}yxx + mxx + \frac{n}{a}yyx + pyx + \frac{q}{a}y^3 + akx + ryy + asy + aat = 0$, qui eſt une équation à une courbe du ſecond

genre, qu'on peut décrire par points, en ſuppoſant pour trouver chaque point l'une des deux inconnues égales à l'unité, à deux, trois, quatre, &c.

Si l'on mettoit au lieu de y^3 ſa valeur aax dans le terme $\frac{q}{a}y^3$, on auroit une autre courbe du ſecond genre très-facile à décrire par points, puiſque l'inconnue y ne monteroit qu'au ſecond degré.

Si la propoſée eſt du douziéme degré comme $y^{12} * + aiy^{10} + aaky^9 +$ &c. en ſuppoſant l'équation $y^3 = aax$, on trouvera, en mettant partout aax au lieu de y^3, une équation d'une courbe du troiſiéme genre, qui étant jointe avec la parabole cubique, fera trouver les racines de la propoſée.

On pourra dans les équations des degrés plus élevés, employer les équations à la parabole d'un genre auſſi plus élevé, comme $y^4 = a^3x$, $y^5 = a^4x$, &c.

On pourroit au lieu de l'équation à la parabole, employer l'équation à une eſpece d'hyperbole du ſecond genre, du troiſiéme genre, &c. comme $yyx = a^3$, $y^3x = a^4$, &c.

Enfin l'on pourroit même employer pour premiere équation celle d'une ſection conique ; mais en ſubſtituant la valeur de y en x priſe de cette équation, on trouveroit celle d'une courbe d'un genre plus élevé, laquelle étant jointe à la ſection conique, feroit trouver les racines de l'équation propoſée.

Uſage des courbes pour la réſolution des Problêmes des ſciences Phyſico-mathematiques.

USAGE DE LA PARABOLE.

95. LA courbe que décrit une bombe lorſqu'elle ſort du mortier, quelque inclinaiſon que l'on donne au mortier, eſt une parabole. Car ſi l'on imagine dans la figure 8e, que la verticale HA prolongée au-deſſous de A eſt le diametre ; que les points N, Q, K dans les lignes MO, PR, SK ſont ceux par où paſſe la bombe, & par conſequent ceux de la courbe qu'elle décrit ; que les lignes menées de chacun de ces points au prolongement de HA, qui ſoient paralleles à la direction du jet $ACMPS$, ſont les ordonnées : il ſuit de ce qu'on a démontré art. 329, ſecond cas, & 330, ſecond cas, que le FIG. VIII.

quarré de AM égale à l'ordonnée du point N, eſt au quarré de AP égale à l'ordonnée du point Q, comme MN égale à la partie du diametre ou à la coupée qui répond à l'ordonnee du point N, eſt à PQ égale à la partie du diametre qui répond au point Q; & comme il eſt évident par les art. 329 & 330, ſecond cas, que cette propriété convient à tous les points de la courbe que décrit la bombe, & que c'eſt la pro-
368. prieté de la parabole,* cette courbe eſt une parabole : ainſi nommant $MN(x)$, $PQ(u)$, $AM(y)$, $AP(z)$, on a cette proportion de la parabole $yy.zz::x.u$.

Avertiſſement.

On déduit ordinairement la réſolution des Problêmes de l'art de jetter les bombes des proprietés de la parabole; mais comme l'on a donné cette réſolution ſans l'employer, il eſt inutile de s'y arrêter ici : on mettra au lieu de cela les deux Problêmes ſuivans.

PROBLÊME I.

496. *TROUVER l'équation de la courbe qui paſſe par les ſommets*
FIG. VIII. *des axes de toutes les paraboles décrites par une bombe jettée par une même force de poudre, en donnant au mortier toutes les inclinaiſons poſſibles des cordes* AC, AE, AG, &c.

IL faut s'imaginer que l'horizontale AOK & la verticale HA ſont les lignes des coordonnées de cette courbe que l'on cherche; on prendra les coupées ſur AH, ainſi les AB, AD, AF, & leurs paralleles comme ON, &c. ſeront les x; & les ordonnées ſur AOK, ainſi AO & les paralleles à AO ſeront les y; la force du jet HA eſt donnée, & on ſuppoſe $HA=d$. Il eſt évident que le point le plus élevé de chaque
324. jet, comme le point N* du jet par AC, eſt le ſommet de la parabole de ce jet. Or par l'art. 324 l'on a $y=2\sqrt{dx-xx}$, ce qui donne $yy-4dx+4xx=0$, qui eſt l'équation qui convient à tous les points des ſommets des paraboles d'une même force de poudre, c'eſt-à-dire à tous les points les plus élevés de ces paraboles, puiſque la changeante y marque l'éloignement AO où eſt chacun de l'axe HA, & la changeante x exprime la hauteur AB, AD, &c. ſur l'axe AH de chacun de ces points. Mais $yy-4dx+4xx=0$ eſt l'équation

l'équation d'une ellipſe *; ainſi la courbe qui paſſe par tous ces ſommets eſt une ellipſe. *Ce qu'il falloit trouver.* * 377.

PROBLÊME II.

497. *TROUVER l'équation de la courbe qui touche toutes les paraboles d'une même force de poudre.*

POUR réſoudre ce Problême, il ſuffit de conſiderer deux de ces paraboles AMC, AmC, dont les axes OM, om ont leurs ſommets M, m par le Problême précedent dans la même ellipſe $AMmH$; ces deux paraboles ſe coupent toujours en un point C, lequel point C eſt toujours au-dedans de la courbe touchante, excepté ce ſeul cas, qui eſt que ce point d'interſection C eſt dans la touchante, lorſque les deux paraboles AMC, AmC deviennent une ſeule & même parabole, c'eſt-à-dire, quand les deux axes OM, om, deviennent un même axe OM, & par conſequent les deux ordonnées AO, Ao deviennent une même ordonnée. Ces choſes ſuppoſées: FIG. XL.

Soit la connue $AH = d$, l'ordonnée AO, $Ao = y$, la coupée ou la partie de l'axe OM, om, depuis le ſommet, $= x$

A. $yy - 4dx + 4xx = 0$ eſt l'équation commune aux ſommets de toutes les paraboles par le Problême précedent, ſuppoſant à preſent que le point d'interſection C eſt dans la courbe touchante; AB, qu'on nommera u, ſera une ordonnée de la courbe touchante, & BC, qu'on nommera z, en ſera la coordonnée; & l'on aura par la proprieté de la parabole AMC cette proportion *, le quarré de AO (yy) eſt à la partie de l'axe OM (x), comme le quarré de CN ou OB ($u - y$), qui eſt $uu - 2uy + yy$, eſt à la partie correſpondante de l'axe $MN = MO - CB = x - z$; ce qui donne l'équation $xyy - zyy = uux - 2uyx + xyy$, qui ſe réduit à * 368.

B. $zyy - 2uxy + uux = 0$. Cette équation convient au point d'interſection C de deux paraboles quelconques, comme AMC, AmC, dont les axes & les ordonnées aux axes ſont ſimplement paralleles; faiſant évanouir l'une des deux coordonnées x ou y des deux paraboles par le moyen des deux équations A & B, par exemple prenant la valeur de $x = \frac{zyy}{2uy - uu}$ dans l'équation B, & la ſubſtituant dans l'équa-

tion A, on trouve l'équation D. $yy - \frac{u^3 y - 2dzuy + dzuu + \frac{1}{4}u^4}{uu + zz} = 0$, laquelle équation détermine le point d'interſection *C*, (qui par l'équation B étoit le point d'interſection de deux paraboles quelconques, dont les axes & les ordonnées aux axes étoient ſimplement paralleles) à être le point d'interſection *C* de deux paraboles quelconques d'un même jet, c'eſt-à-dire de deux paraboles quelconques parmi celles dont les ſommets des axes ſont tous dans la même ellipſe *AMmH*.

Pour déterminer à preſent l'équation D à exprimer le point d'interſection *C* de deux de ces paraboles d'un même jet, qui ont leur point d'interſection *C* dans la courbe touchante qu'on cherche, il ne faut plus que ſuppoſer que ces deux paraboles *AMC*, *AmC* deviennent une même parabole; ce qui ſe fera en ſuppoſant que *AO* (*y*) a deux valeurs égales ou deux fois la même valeur dans l'équation D. Et
* 75. alors multipliant * l'équation D par la progreſſion arithmetique 2, 1, 0, on trouvera $y = + \frac{\frac{1}{2}u^3 + dzu}{uu + zz}$. Mettant cette valeur de *y* & ſon quarré à la place de *y* & de *yy* dans l'équation D, elle deviendra l'équation E. $uu + 4dz - 4dd = 0$, qui eſt l'équation de tous les points d'interſection *C* de toutes les paraboles d'une même force de poudre priſes deux à deux, qui ſe coupant dans un point *C* de la courbe touchante qu'on cherche, deviennent deux à deux une même parabole, & font par là que l'équation E exprime le raport de chaque point *C* de cette courbe touchante par le moyen des deux coordonnées changeantes *AB* (*u*) & *BC* (*z*). Et comme l'équation E eſt celle d'une parabole, on voit que la courbe touchante eſt une parabole, dont les Lecteurs trouveront aiſément le parametre. *Ce qu'il falloit trouver.*

Uſage de l'Ellipſe & de l'Hyperbole.

PROBLÈME.

FIG. XXV. & XXVI. 498. *TROUVER la nature de la courbe* AC, *dont l'axe eſt la ligne* AB, *qui ſoit telle que ſi l'on donne à la ſurface d'un morceau de verre la courbe* AC, *il raſſemble en un ſeul point* f ou φ *tous les rayons de lumiere comme* EC, *qui ſeront paralleles à l'axe* AB.

SUPPOSITION.

ON ſuppoſe, 1°. qu'un rayon de lumiere comme *EC* paſſant d'un milieu dans un autre different comme de l'air dans le verre, s'il eſt perpendiculaire à la ſurface des deux milieux, il continue dans le ſecond ſon chemin dans la même ligne droite; mais que s'il eſt oblique à la ſurface des deux milieux, il ne continue pas ſon chemin dans la même ligne droite, mais qu'il ſe rompt à l'entrée du ſecond milieu, & qu'il continue enſuite ſon chemin dans une autre ligne droite *Cf* ou *Cφ*. 2°. Que ſi l'on tire une perpendiculaire *pCP* à la ſurface *CS* qui ſepare les deux milieux, (quand la ſurface eſt courbe, la perpendiculaire à la tangente de la courbe au point *C* où paſſe le rayon de lumiere, eſt la perpendiculaire à la ſurface des deux milieux en ce point *C* qui eſt le point touchant,) l'angle *ECp* que forme le rayon *EC* avec la partie *Cp* de la perpendiculaire qui eſt dans le premier milieu, s'appelle l'*angle d'incidence*, & l'angle *fCP* ou *φCP* que forme le rayon rompu *Cf* ou *Cφ* dans le ſecond milieu avec la perpendiculaire *CP*, s'appelle l'*angle de refraction*. 3°. Que quand pluſieurs rayons de lumiere paſſent ainſi obliquement d'un milieu dans un autre, c'eſt une loi prouvée par l'experience, & dont on donne la raiſon dans la Dioptrique & dans la Phyſique, que le raport du ſinus de l'angle d'incidence & du ſinus de l'angle de refraction eſt le même par raport à tous les rayons, quelque difference qu'il y ait entre les angles d'incidence; c'eſt ce raport conſtant qu'on appelle *le raport de la refraction*. Quand les rayons paſſent de l'air dans le verre, ce raport eſt $\frac{3}{2}$; & quand ils paſſent du verre dans l'air, ce raport eſt $\frac{2}{3}$. 4°. Que dans les courbes *AC* le rayon incident eſt *EC*; la tangente au point *C* eſt *CS*; la perpendiculaire à ce point eſt *pCP* qui rencontre l'axe *AB* en *P* ou *p*; le rayon rompu eſt *Cf* ou *Cφ*; par conſequent l'angle d'incidence eſt *ECp* = (à cauſe des paralleles *EC*, *AB*) à l'angle *CPA* ou *CpA*, qui (ou ſon complement) dans le triangle *CPf* ou *Cpφ*, a pour côté oppoſé le rayon rompu *Cf* ou *Cφ*; & l'angle de refraction eſt *PCf* ou *pCφ*, qui dans le même triangle *CPf* ou *Cpφ* a pour côté oppoſé la ligne *Pf* ou *pφ*; ainſi le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle de refraction, comme le rayon rompu *Cf* ou *Cφ* eſt à la diſtance *fP* ou *φp*,

FIG. XXV. & XXVI.

où eſt le point f ou φ, auquel ſe raſſemblent les rayons, de la perpendiculaire PCp ou pCP; ainſi quand les rayons CE paralleles à l'axe AB, paſſent de l'air dans le verre, comme on le ſuppoſe dans la figure 25, $Cf. fP :: 3. 2$; quand ils paſſent du verre dans l'air, comme on le ſuppoſe (fig. 26), $p\varphi. C\varphi :: 2. 3$. Ces choſes ſuppoſées, voici l'état de la queſtion.

Il s'agit de trouver la courbe AC (fig. 25 & 26), qui ſoit telle que menant des lignes droites $Cf, C\varphi$ de tous les points C de la courbe à un point fixe f ou φ de l'axe AB, & menant auſſi par tous les points C de la courbe des perpendiculaires pCP, à la tangente de ces points C, juſqu'à l'axe en P ou p, le raport de chaque Cf ou $C\varphi$ à la diſtance correſpondante fP ou φp ſoit toujours le même raport, & qu'on puiſſe le rendre égal au raport $\frac{3}{2}$ fig. 25, $\frac{2}{3}$ fig. 26.

RESOLUTION.

LES figures 25 & 26 font voir d'une maniere ſi claire & ſi courte que la courbe AC doit être une ellipſe quand les rayons paſſent de l'air dans le verre, & une hyperbole quand ils paſſent du verre dans l'air, qu'il eſt inutile de chercher ces courbes par l'Analyſe. Car MF & CP ou Cp étant ſup-
FIG. XXV. & XXVI. poſées perpendiculaires à la tangente CS, & par conſequent étant paralleles, l'axe Aa ou $A\alpha$, ou la ligne égale à l'axe
*421. & 422. * Mf ou $M\varphi$ eſt à la diſtance des foyers Ff ou $F\varphi$, comme chaque rayon rompu Cf ou $C\varphi$ eſt à Pf ou $p\varphi$ diſtance où eſt le foyer f ou φ de la perpendiculaire CP ou Cp; d'où l'on voit qu'en faiſant une ellipſe dont l'axe Aa ſoit à la diſtance des foyers Ff comme 3 à 2, & une hyperbole dont l'axe $A\alpha$ ſoit à la diſtance des foyers $F\varphi$ comme 2 à 3, ces deux courbes ſeront celles que l'on cherche.

FIG. XXV. C'eſt pourquoi ſi après avoir tracé une ellipſe AC dont l'axe Aa ſoit à la diſtance des foyers Ff comme 3 à 2, on décrit un arc de cercle du centre f avec quel rayon on voudra fC moindre que fA, qui rencontre l'ellipſe aux deux points C, c, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'axe, & que l'on faſſe tourner la figure compriſe entre l'arc de l'ellipſe & l'arc du cercle autour de l'axe AB, elle décrira la figure convexe d'un côté & concave de l'autre qu'il faut donner à un verre, afin que les rayons paralleles à l'axe AB comme EC,

tombant de l'air sur la surface convexe CA, ils aillent tous se rassembler au foyer f.

Après avoir de même tracé une hyperbole AC (fig. 26), dont la distance des foyers $F\varphi$ soit à l'axe $A\alpha$ comme 3 à 2, si l'on tire une perpendiculaire CB à l'axe AB, & qu'on fasse tourner la figure ACB autour de l'axe AB, elle décrira la figure qu'il faut donner à un morceau de verre, afin que les rayons EC paralleles à l'axe qui entreront dans le verre au travers de la ligne droite BC sans y souffrir de refraction lui étant perpendiculaires, soient détournés par la refraction qu'ils souffriront au sortir du verre par la surface hyperbolique du verre aux points C, c, de maniere qu'ils aillent tous se rassembler au foyer φ. *Ce qu'il falloit trouver.*

Usage de la Cycloïde pour donner de la regularité aux Horloges.

9. *TROUVER quelle est la nature de la courbe* DPGA *que le centre de pesanteur* P *d'un pendule simple* SP, *ou le centre d'oscillation* P *d'un pendule* SP *qu'on suppose composé, doit décrire par sa pesanteur, afin que chacune de ses vibrations ou chacune des descentes de ce centre depuis quel point on voudra de la courbe, comme du point* D, *ou du point* P, *ou du point* G, *ou de tout autre point jusqu'au point le plus bas* A, *se fasse toujours dans un temps égal.* FIG. XLI.

SUPPOSITIONS.

I.

ON suppose que quand un corps pesant descend par le mouvement de sa seule pesanteur, soit par une ligne verticale FA, soit par un plan incliné comme GA terminé par les mêmes horizontales FG, AL, la viteſſe qu'il aura acquise par la descente inclinée GA, sera égale à la viteſſe qu'il auroit acquise par la descente FA terminée par les mêmes horizontales FG, AL. Ainsi la viteſſe acquise par FA étant $= \sqrt{FA}$*, la viteſſe acquise par GA est aussi égale à $\sqrt{FA}$ Mais le temps est different; car le temps T par $FA = \frac{2FA}{\sqrt{FA}}$*, & le temps t par $GA = \frac{2GA}{\sqrt{FA}}$*; ainsi $T . t :: FA . GA$. D'où FIG. VIII. * 308. * 309. & 310.

l'on déduit aiſément que ſi differens corps peſans deſcendoient par pluſieurs plans differemment inclinés qui fuſſent compris entre les mêmes horizontales, les temps employés à deſcendre par ces plans differens ſeroient proportionels aux longueurs de ces plans.

D'où il ſuit que les temps des deſcentes d'un corps peſant tombant librement par les cordes GA, EA, CA, &c. d'un cercle dont le diametre AH eſt vertical, ſont tous égaux entr'eux, & égaux chacun au temps de la deſcente par le diametre HA. Car nommant la conſtante HA (d), chacune des changeantes AF, AD, AB, &c. (x), l'on aura chacune des cordes GA, EA, CA, &c. $= \sqrt{dx}$ *; les temps des deſcentes par ces cordes ſeront égaux chacun * à $\frac{2\sqrt{dx}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{d} = \frac{2d}{\sqrt{d}}$, qui eſt le temps de la deſcente par le diametre HA.

* 288.

* 301. & 310.

II.

Fig. XLI. Si un même corps peſant deſcendoit de ſuite par pluſieurs plans inclinés contigus qui fiſſent les uns avec les autres des angles qui ne differaſſent de la ligne droite ou de 180 degrés que par des angles infiniment petits, comme font les côtés infiniment petits dont on conçoit que ſont formées les lignes courbes, la viteſſe acquiſe par la deſcente de ces plans comme par DPG (fig. 41), eſt auſſi égale à la viteſſe acquiſe par la deſcente de la verticale EM compriſe entre les mêmes horizontales ED, MG; ainſi la viteſſe par $DPG = \sqrt{EM}$; la viteſſe acquiſe par $DPGA = \sqrt{EA}$; & le temps T de la deſcente par DPG eſt $\frac{2 \times DPG}{\sqrt{EM}}$ *; le temps t de la deſcente par DPA eſt $\frac{2 \times DPA}{\sqrt{EA}}$. Ces choſes ſuppoſées, voici la réſolution.

* 301. & 310.

RESOLUTION.

CONCEVANT l'origine de la courbe au point A, on marquera chacun des arcs AG, AP, AD, &c. qui doivent être parcourus dans un même temps par la changeante s; & ce temps égal & conſtant de la deſcente par chaque s ſera nommé T; & chacune des verticales AM, AB, AE, &c. correſpondante à chaque s, s'exprimera par la changeante x. Or la viteſſe acquiſe par la deſcente de chaque s eſt égale à $\sqrt{x}$ *, ainſi le temps T de la deſcente par chaque s ſera $\frac{2s}{\sqrt{x}}$; ou bien, parceque cette expreſſion convient au temps de

* 308.

chacun des arcs, on peut la diviſer par 2, & la marquer ainſi $\frac{s}{\sqrt{x}}$; cette expreſſion du temps devant être la même pour chacun des arcs, puiſque les temps pendant leſquels ils doivent être parcourus ſont égaux, eſt égale à une grandeur conſtante; on peut donc la ſuppoſer égale à la grandeur conſtante $2\sqrt{a}$; par conſequent l'on aura $\frac{s}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{a}$, qui ſe réduit à $s = 2\sqrt{ax}$, qui eſt l'équation de la courbe que l'on cherche. Or c'eſt l'équation de la cycloïde *. Ainſi ſi l'on fait décrire au centre de peſanteur ou d'oſcillation des arcs de cycloïde, les durées des vibrations du pendule ſeront toujours égales, ſoit que le poids de l'horloge agiſſant plus fort, faſſe décrire de plus grands arcs de cycloïde, ſoit que le poids de l'horloge agiſſant moins fort, en faſſe décrire de plus petits. * 456.

D'où l'on voit que pour donner une entiere juſteſſe aux horloges, il ne reſte plus qu'à trouver le moyen de faire décrire au centre de peſanteur ou d'oſcillation du pendule, des arcs de cycloïde; ce que l'on enſeignera dans la ſeconde Partie.

Avertiſſement.

Les courbes ont une infinité d'autres beaux uſages, mais ce que l'on en a dit ſuffit pour faire voir aux Lecteurs comment l'Analyſe les fait découvrir par le calcul ordinaire de l'Algebre, quand cela eſt poſſible.

SECONDE PARTIE.

Usage de l'Analyse dans la résolution des Problêmes de la Geometrie & des sciences Physico-mathematiques, en employant le calcul differentiel.

PREMIERE SECTION.

Où l'on explique le calcul differentiel & les principes dont il dépend.

PRINCIPE DU CALCUL DIFFERENTIEL PRIS DES ANCIENS GEOMETRES.

500. C'EST une chose ordinaire aux anciens Geometres de regarder deux quantités comme étant égales quand elles different moins entr'elles qu'aucune grandeur finie & déterminée, tant petite qu'elle puisse être, en demeurant finie ou bornée.

C'est sur ce principe qu'en concevant des polygones inscrits & circonscrits au cercle, dont les côtés allant en diminuant de plus en plus à l'infini, font que le perimetre & l'aire de ceux de ces polygones qui ont les côtés les plus petits, approchent le plus du perimetre & de l'aire du cercle ; ils supposoient qu'on pouvoit concevoir un polygone inscrit & un autre circonscrit de tant de côtés, & par consequent de côtés si petits, que la difference entre ces deux polygones, & à plus forte raison la difference de l'un & de l'autre d'avec le cercle, fût moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée; & ils regardoient le dernier, pour ainsi dire, de ces polygones inscrits & le dernier de ces circonscrits comme égaux entr'eux & au cercle ; ce qu'ils n'auroient pû faire qu'en concevant les côtés de chacun de ces polygones comme infiniment petits, & comme y en ayant une infinité ; puisque pendant qu'ils demeureroient finis & déterminés, la difference du polygone inscrit & du circonscrit seroit finie, & de même

même leur difference d'avec le cercle seroit aussi finie, & l'on ne pourroit pas supposer ces trois figures égales, comme il leur étoit necessaire de le faire, afin que leurs preuves fussent démonstratives. C'est par ce principe que sont démontrées la plûpart des propositions du 12e *Livre d'Euclide.*

On s'est heureusement avisé de notre temps de donner des expressions propres à ces differences infiniment petites, lesquelles differences pendant qu'elles sont réelles ont des raports entr'elles très-réels, & qui sont égaux aux raports des grandeurs finies, par le moyen desquelles ces raports des differences peuvent être exprimés. La méthode de trouver les expressions des differences & de leurs raports, est ce qu'on appelle *le calcul des differences*, ou *le calcul differentiel*; par le moyen duquel on trouve d'une maniere courte & facile une infinité de raports entre les lignes droites & courbes geometriques & méchaniques qu'on auroit bien de la peine à trouver par d'autres voyes; & comme les grandeurs entieres que l'on peut comparer ont des differences qui ont des expressions qui les leur rendent propres, on peut retourner de ces differences aux grandeurs entieres qu'on appelle *sommes* ou *integrales*, & les trouver par le moyen de leurs differences: Ce retour des differences aux grandeurs integrales dont elles sont les differences, est ce qu'on nomme *le calcul integral.* Par le calcul differentiel on trouve les expressions des differences des grandeurs integrales, & l'on fait sur ces expressions les operations que fait l'Algebre sur les grandeurs algebriques; par le calcul integral on trouve les expressions des grandeurs integrales dont on a l'expression des differences.

UTILITÉS DE CES CALCULS.

DEPUIS qu'on a employé ces calculs dans l'usage de l'Analyse, on a non seulement résolu d'une maniere plus courte & plus aisée la plûpart des plus difficiles Problêmes qu'on avoit résolus par le calcul ordinaire; mais on a fait des découvertes surprenantes dans la Geometrie composée & dans les sciences physico-mathematiques, comme on le peut voir dans *les Memoires de l'Academie*, dans *les Actes de Leipsic*, dans *l'Analyse des Infiniment Petits*, dans *les Ouvrages de M. Newton*, & dans tous les autres où l'on employe ces calculs.

On applique ces calculs aux courbes méchaniques, comme aux courbes geometriques, & l'on découvre par leur moyen les proprietés des unes & des autres avec la même facilité.

Il n'eſt point neceſſaire dans ces calculs d'ôter les ſignes radicaux, ce qui ôte l'un des plus grands embarras du calcul ordinaire, outre que ces calculs ſont ordinairement plus courts d'eux-mêmes que ne ſont les ordinaires.

Ces calculs ſuivent la nature dans la réſolution des Problêmes phyſico-mathematiques, laquelle n'agiſſant que par le mouvement & les figures, commence & agit ordinairement par des degrés infiniment petits à chaque inſtant du temps, chacun de ces inſtans étant auſſi infiniment petit.

Enfin on réduit par ces calculs la Geometrie compoſée ou la Geometrie de toutes les courbes à la Geometrie ſimple des figures rectilignes, ce qui la réduit à toute la ſimplicité poſſible, & ce qui met les Geometres en état de la porter à toute la perfection poſſible.

Le principe du calcul differentiel ſert à démontrer ſans calcul pluſieurs propoſitions de la Geometrie compoſée.

CE principe que dans la comparaiſon des grandeurs finies on peut regarder des differences qu'elles ont entr'elles, plus petites qu'aucune grandeur déterminée, ou infiniment petites (on n'entend que la même choſe par ces deux expreſſions); ce principe, dis-je, ſuffit pour démontrer ſans calcul & d'une maniere très-ſimple pluſieurs propoſitions de la Geometrie compoſée, que l'on ne démontre que par de longs circuits. En voici quelques exemples ſur la cycloïde.

503. FIGURE XXXV. Si l'on mene par un point quelconque *f* de la cycloïde l'ordonnée *fFB* parallele à la baſe *DE* qui rencontre le cercle generateur en *F*, qu'on tire la corde *FA*, & qu'on mene par *f* la droite *fa* parallele à la corde *FA*, *fa* ſera la tangente au point *f*; Car en mettant le cercle generateur dans la ſituation *eaf*, où ſon point *f* décrit la partie *f* infiniment petite de la cycloïde, il eſt évident qu'en menant la corde *fe*, on peut concevoir que cette corde *fe* tournant à cet inſtant ſur le point *e*, comme ſur un centre, décrit par ſon extrêmité *f* un arc *f* infiniment petit, qui fait la petite partie *f* de la cycloïde : or *ef* étant le rayon de ce petit arc, eſt perpendiculaire à la tangente de ce petit arc *f*; *fa* perpendiculaire

à *ef*, & parallele à *FA*, eſt donc la tangente de ce petit arc *f* ou de ce point *f* de la cycloïde; d'où il ſuit auſſi que *fe* eſt parallele à *FE*.

104. Pour entendre les propoſitions ſuivantes, il faut remarquer que ſi l'on envelope la courbe *SKD* d'un fil également tendu par tout, qui ſoit comme colé ſur cette courbe, & qui lui ſoit égal en longueur, qu'on develope enſuite la courbe en commençant au point *D*, & que l'extrêmité *D* du fil pendant le developement inſenſible que l'on fait de la courbe *DKS*, décrive la ſeconde courbe *DPA*; la premiere courbe *DKS* s'appelle *la developée* de la ſeconde courbe *DPA*; chacune des parties du fil comme *PK* détachées les unes après les autres de deſſus la developée *DKS*, s'appellent *les rayons de la developée*; & la courbe *DPA* eſt la courbe formée par le developement du fil de la developée. Ces choſes ſuppoſées: FIG. XLI.

105. Il eſt évident que chaque rayon *KP* de la developée eſt égal à la partie developée *DK* de la courbe *DKS*, ſi ce n'eſt quand le fil qui envelope la developée eſt plus long ou plus court que la courbe qu'il envelope; car dans le premier cas le rayon de la developée eſt égal à la partie de cette courbe qui eſt developée, & de plus à la ligne droite dont on ſuppoſe que le fil ſurpaſſe la courbe qu'il envelope; & dans le ſecond cas il n'eſt égal qu'à la partie de la courbe qu'on ſuppoſe qu'il envelopoit.

106. Que chaque rayon *KP* de la developée eſt une tangente de la developée; car le reſte *SK* du rayon *KP* demeurant comme colé à la developée, le point *K* eſt la particule de la developée du point *K*, & le rayon *KP* ne fait qu'une ligne droite avec cette particule & en eſt le prolongement; ainſi le rayon *KP* eſt la tangente de la developée en ce point *K*.

107. Que chaque rayon *KP* de la developée eſt perpendiculaire au point *P* à la courbe *DPA*. Car on peut concevoir que le rayon *KP* à l'inſtant qu'il forme la particule *P* de la courbe *DPA*, ſe meut ſur le centre *K*, & qu'il forme un arc infiniment petit *P* qui eſt la particule *P* de la courbe *DPA*. Or le rayon *KP* eſt perpendiculaire au petit arc *P* ou à la petite partie de la tangente au point *P*, laquelle petite partie eſt en même temps le petit arc formé par le rayon *KP*, la particule *P* de la courbe *DPA*, & la petite partie de la tangente,

Suppoſons à preſent que DPA eſt une cycloïde dont le cercle generateur eſt AFE, la baſe DE égale à la demi-circonference AFE, & qu'il faille trouver la longueur PK du rayon de la developée au point P, & enſuite qu'elle eſt la nature de la courbe DKS qui eſt la developee de la cycloïde DPA.

508. Pour trouver la longueur du rayon PK, il faut concevoir que PG eſt une partie infiniment petite de la cycloïde, que PK eſt la perpendiculaire de la cycloïde au point P, & que GK l'eſt au point G; à cauſe qu'on ſuppoſe GP infiniment petite, les deux perpendiculaires PK, GK peuvent être conſiderées comme partant du même point K de la developée qui eſt comme le centre autour duquel le fil ou le rayon PK eſt conçû tourner lorſqu'il forme la particule PG; qu'on mene les ordonnées PFB, GHM, qui rencontrent le cercle generateur aux points F & H par où il faut mener les cordes EF, FA, EH, HA; enfin qu'on conçoive décrits des centres K & E les petits arcs fl, FL, les petits triangles rectangles FLH, flh ſeront ſemblables & égaux; car 1°. les hypothenuſes HF, hf ſont égales, puiſque par la formation de
454. la cycloïde $Ef = FP$ (à cauſe des paralleles fP, FE), & que FP eſt égale à l'arc AHF, & par la même raiſon $Eh = HG =$ à l'arc AH; ainſi $Ef - Eh = hf =$ à l'arc AF — l'arc $AH =$ l'arc FH. 2°. $hl = Gh - Pf =$ à la corde EH — la corde $EF = HL$; par conſequent le petit côté ou le petit arc fl eſt égal au petit côté ou au petit arc FL, mais $fKl = FEL$, à cauſe des paralleles KP, EF, & KG, EH. D'où il ſuit que les rayons de ces petits arcs qui ſont Kf & EF ſont égaux: mais fP par la formation de la cycloïde eſt égale à la corde EF; par conſequent le rayon KP eſt double de la corde EF. Et comme la même démonſtration convient à tout autre rayon repréſenté par KP, il eſt évident que chaque rayon PK de la développée de la cycloïde eſt toujours double de la corde correſpondante EF du cercle generateur, & que par conſequent SA eſt double du diametre AE.

509. Pour trouver la nature de la developée DKS de la cycloïde, il faut mener De perpendiculaire à la baſe DE de la cycloïde & égale à EA ou à ſon égale ES, décrire ſur le diametre De le demi-cercle DIe; tirer la corde DI parallele à Pf & à FE, qui fera par conſequent l'angle fDI égal à ſon alterne DEF, ce qui ſera cauſe (les cercles DIe, AFE étant égaux), que

ces cordes DI, EF ſeront égales, & leurs arcs égaux, & que DI ſera auſſi égale à fK qui eſt égale à EF; & menant IK, elle ſera égale & parallele à Df. Ces choſes ſuppoſées:

La baſe ED étant égale à la demi circonference AFE, & FP ou ſon égale Ef étant égale à l'arc AHF *, le reſte fD de la baſe eſt égal à l'arc EF & à l'arc DI qui eſt égal à EF; l'ordonnée KI de la developée DKS menée d'un point quelconque K au cercle DIe, étant égale à Df, eſt par conſequent égale à l'arc DI; & comme il eſt évident que la démonſtration peut s'appliquer à tout autre point de la developée, la proprieté de cette developée eſt que chaque ordonnée KI eſt égale à l'arc correſpondant DI du cercle DIe. Et comme c'eſt la proprieté de la cycloïde * dont DIe eſt le cercle generateur, la developée DKS de la cycloïde DPA, eſt elle-même une cycloïde égale à la premiere DPA, puiſque le cercle generateur de l'une eſt égal à celui de l'autre: Elle eſt ſeulement dans une autre ſituation; le point D de la developée répond au point A de la cycloïde DPA, & le point S de la premiere au point D de la ſeconde. * 454 * 454

o. Comme l'on a démontré que chaque partie KP du fil developé eſt double de la corde correſpondante DI, & comme la partie KP du fil developé eſt égale à la partie developée DK de la cycloïde DKS; il s'enſuit que chacun des arcs DK d'une cycloïde eſt double de la corde correſpondante DI du cercle generateur, & que la cycloïde DKS eſt double du diametre De du cercle generateur.

REMARQUES.

I.

Où l'on explique ce qui reſtoit à faire pour donner la regularité aux Horloges.

1. IL eſt à preſent évident que ſi l'on donne à deux lames de cuivre SK, Sk la courbure SK d'une cycloïde SKD, dont le cercle generateur DIe ait pour diametre De la moitié de la longueur du pendule SP ou de ſon égale SA, qu'on ſuppoſe être la longueur du pendule dont les vibrations ſont préciſément d'une ſeconde; & que l'on ſuſpende le pendule SA ou SP au point S entre ces deux lames de cuivre par une ſoye déliée, de façon que quelque mouvement que le poids

de l'horloge imprime au pendule SP, ce pendule ſoit toujours la tangente de la cycloïde SK ou Sk; il eſt, dis-je, évident que le centre de peſanteur ou d'oſcillation P, décrira dans toutes ſes vibrations des arcs de cycloïde AP, leſquelles par conſequent * ſeront toutes d'une égale durée. Ce qui reſtoit à démontrer de ce qu'il faut faire pour donner toute la juſteſſe poſſible aux horloges; & c'eſt pour cela qu'on a choiſi ici ces Exemples de la cycloïde.

* 499.

II.

512. Comme l'on peut regarder des grandeurs infiniment petites par raport aux grandeurs finies dont elles ſont les differences, on peut regarder de même des grandeurs comme infiniment grandes par raport à d'autres finies qui deviennent égales à zero par raport à ces grandeurs infiniment plus grandes; on démontre facilement par là pluſieurs propoſitions de Geometrie; par exemple on a déterminé par là la ſituation des aſymptotes de l'hyperbole art. 400. en ſuppoſant qu'elles ſont des tangentes de l'hyperbole à des points infiniment éloignés du centre de l'hyperbole. De même dans les Problêmes où entrent les triangles rectangles dont un côté augmente toujours pendant que l'autre demeure le même, ou bien diminue toujours, en ſuppoſant que ce dernier côté eſt égal à zero par raport à l'autre, ou que celui-ci devient infini; alors le côté infini & l'hypotenuſe deviennent paralleles. De même quand un angle aigu va toujours en diminuant, en le ſuppoſant égal à zero, ou infiniment petit, & ſes côtés infiniment grands; on a le cas où les deux côtés deviennent paralleles.

C'eſt ainſi qu'en ſuppoſant qu'un des foyers de l'ellipſe demeurant immobile, l'autre s'éloigne à l'infini, l'ellipſe devient une parabole, & qu'on trouve par le même calcul pluſieurs proprietés communes à ces deux figures.

Ces ſuppoſitions, dont l'eſprit apperçoit la verité, abregent en pluſieurs cas les réſolutions du Problême, & les rendent generales.

Explication du calcul differentiel.

PREMIERE SUPPOSITION OU DEMANDE.

3. TOUTES les lignes droites & courbes, & toutes les figures des ſurfaces & des ſolides, peuvent être regardées comme formées ou décrites par le mouvement; les lignes droites par le mouvement d'un point qui n'eſt point détourné dans ſa direction; les courbes par le mouvement d'un point qui étant détourné à chaque inſtant de ſa direction, ne décrit aucune ligne droite finie, mais une infinité de petites lignes droites chacune infiniment petite, & qui font enſemble deux à deux des angles qui ne different de la ligne droite, ou de l'angle de 180 degrés, que d'un angle infiniment petit. Les angles ſont formés par le mouvement d'une ligne droite mobile autour du ſommet, & de même les triangles; les figures des ſurfaces par le mouvement d'une ligne droite ou courbe qui ſe meut le long d'une autre droite, de façon que pendant tout le mouvement de la ligne droite ou courbe qui ſe meut, demeure toujours parallele à elle-même; par exemple, un rectangle peut être regardé comme formé par le mouvement de la ligne qui en fait la hauteur le long de la baſe; la ſurface d'un cylindre par le mouvement d'une circonference qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant la direction de l'axe du cylindre; les figures ſolides par le mouvement d'une figure plane qui ſe meut toujours parallele à elle-même ſuivant une ligne droite, les priſmes & les cylindres ſont ainſi formés par le mouvement de leur baſe. Une infinité de ſurfaces courbes & les ſolides qu'elles comprennent, peuvent auſſi être regardés comme formés par le mouvement d'une figure plane autour d'une ligne doite, comme la ſphére par le mouvement d'un demi-cercle autour de ſon diametre, & la ſurface de la ſphére par le mouvement de la demi-circonference; de même les cylindres par le mouvement d'un rectangle autour de ſa baſe regardée comme axe; les ſolides paraboloïdes, ellipſoïdes, &c. par le mouvement d'une demi-parabole & d'une demi-ellipſe autour de ſon axe. C'eſt ainſi que les anciens Geometres ont conſideré les formations des lignes & des figures.

PREMIERE DE'FINITION.

CHACUNE des quantités (il ſuffit de conſiderer ici les lignes droites & courbes) qui augmente inſenſiblement ou qui diminue inſenſiblement dans la formation des lignes & des figures s'appelle *variable* ou *changeante*; & les lignes qui n'augmentent ou ne diminuent point, & demeurent égales pendant que les autres changent, s'appellent *conſtantes*.

SECONDE SUPPOSITION OU DEMANDE.

514. CHAQUE partie de temps finie, quelque petite qu'elle ſoit, eſt diviſible à l'infini comme l'étendue, & ces parties de temps infiniment petites, dont il en faut une infinité pour faire une partie finie de temps, s'appellent *des inſtans*. Il en eſt de même de la viteſſe, du mouvement, & de toute grandeur.

SECONDE DE'FINITION.

515. L'AUGMENTATION ou la diminution infiniment petite que reçoit une quantité changeante à chaque inſtant par une viteſſe quelconque, dans la formation d'une ligne ou d'une figure, eſt ce qu'on appelle *une difference*. Les lignes changeantes droites & courbes ſont marquées par les lettres des inconnues x, y, z, u, &c. les lignes conſtantes par les lettres des connues a, b, c, &c. & l'on ſe ſervira de la lettre d pour marquer les differences; ainſi dx ſera la difference de la ligne changeante x; dy ſera la difference de la ligne changeante y; & ainſi des autres.

516. Par exemple, que l'on conçoive la ligne droite BC à l'origine A de la droite $ABbH$, & que cette ligne BC ſe meut toujours parallelement à elle-même ſuivant $ABbH$, & qu'en même temps un point C qui part de A ſur la droite BC ſe meut auſſi le long de BC en allant de B vers C, de maniere qu'il ſe trouve toujours dans une courbe quelconque ACc qu'il décrit par ſon mouvement; qu'on ſuppoſe auſſi la partie finie AC de la courbe déja décrite par le point C, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe quelconque la partie infiniment petite Cc de la courbe, & en même temps que la droite BC parcourt la partie infiniment petite $Bb =$ (en menant Cd parallele à Bb) Cd. Qu'on nomme la coupée changeante

Fig. XLII.

geante $AB(x)$; l'ordonnée changeante $BC(y)$; l'arc de courbe changeante $AC(u)$; l'on marquera ainſi les differences, $Bb = Cd(dx)$, $dc(dy)$, $Cc(du)$; & comme le petit arc $Cc(du)$ eſt conçu comme une droite infiniment petite qui eſt en cet endroit une partie de la courbe, & qui etant prolongée en T, eſt la tangente aux points C & c, qu'on ſuppoſe infiniment proches l'un de l'autre, les raports des trois petites differences $Cc(du)$, $Cd(dx)$, $dc(dy)$ dans le petit triangle Ccd, ſont égaux aux raports des trois côtés correſpondans $CT(t)$, $BT(s)$, $BC(y)$ du triangle ſemblable TCB formé par la tangente $CT(t)$, la ſoutangente $BT(s)$, & l'ordonnée $BC(y)$.

17. On peut auſſi conſiderer la courbe AC comme formée par le point C qu'on ſuppoſe partir du point A pris comme un centre ou pole dans un point de la courbe, ou en quel endroit on voudra du plan de la courbe, lequel point C ſe meut de telle maniere le long de la droite AC pendant que cette droite tourne autour du pole fixe A, qu'il ſe trouve toujours dans la courbe AC qu'il décrit par ſon mouvement. Suppoſé que la partie finie AC de la courbe ſoit déja décrite par le point C, & qu'il décrit en un inſtant par une viteſſe quelconque l'arc infiniment petit Cc, & qu'on tire Ac & du centre A le petit arc de cercle Cr, qui à cauſe de ſon infinie petiteſſe peut être regardé comme une petite droite, & qu'on nomme le rayon $AC(z)$ & l'arc $AC(u)$, & le petit arc de cercle $Cr(dx)$, Cc ſera du, rc ſera dz; & en concevant la petite partie cC prolongée qui ſera la tangente de la courbe au point C, & par le pole A une perpendiculaire At au rayon Ac mené de A à c qui rencontre la tangente en t; le petit triangle Ccr formé par les trois differentielles $Cc(du)$, $Cr(dx)$, $cr(dz)$, ſera ſemblable au triangle fini cAt, & les trois differences auront entr'elles les mêmes raports que les trois côtés de ce triangle cAt.

COROLLAIRE I.

18. ON voit par ces formations des courbes, qu'on peut regarder une courbe comme un polygone, ou quand elle ne rentre pas en elle-même, comme une partie de polygone qui a une infinité de côtés dont chacun eſt infiniment petit, & chacun de ces petits côtés fait en même temps une partie

de la courbe, une partie de la tangente de la courbe en ce point là, & pour ainſi dire le côté infiniment petit d'un polygone d'une infinité de côtés inſcrit à la courbe.

COROLLAIRE II.

519. ON peut conſiderer chaque partie infiniment petite d'une courbe, par exemple Cc, comme formée par le mouvement d'un point C qui eſt pouſſé par deux forces, l'une ſuivant la direction Cd, & l'autre ſuivant dc dans la premiere formation, * de façon que la viteſſe de la premiere ſoit à celle de la ſeconde, comme Cd à cd; & ſuppoſé qu'on achevât le parallelograme dont Cd & cd ſont les côtés angulaires, il doit décrire Cc qui eſt la diagonale de ce parallelograme *, & chaque viteſſe par les côtes eſt à la viteſſe par la diagonale, comme chacun de ces côtés eſt à la diagonale décrite dans le même temps; ainſi la viteſſe (u) par Cd (dx) eſt à la viteſſe (u) par Cc (du), comme dx à du; & de même la viteſſe (v) par cd (dy) eſt à la viteſſe (u) par Cc (du), comme dy à du; & les viteſſes par les côtés ſont entr'elles comme ces côtés Cd (dx), cd (dy). Et, à cauſe de l'égalité du temps, $T = \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$. Ce qu'on peut facilement appliquer à la ſeconde formation.

516. 304.

REMARQUE.

520. ON pourroit auſſi nommer par une lettre toute autre quantité variable, comme une partie des figures des ſurfaces ou des ſolides qui vont en augmentant ou en diminuant inſenſiblement, comme le ſegment CAC, l'eſpace ABC, le ſolide formé par cet eſpace en tournant autour de l'axe AB, &c. par exemple nommant z une partie de figure variable, ſa difference qui ſeroit une partie infiniment petite comme CAe du ſegment CAC, comme $CBbc$ de l'eſpace ABC, ſeroit dz. Mais comme les figures s'expriment en Algebre par le produit de pluſieurs lettres, comme un rectangle par le produit ab de ſes deux côtés; un priſme par le produit abc de ſa baſe par ſa hauteur; il eſt plus utile dans les Problêmes ſur ces figures, de marquer leurs differences par des produits, par exemple $BC \times Bb = ydx$ marquera le petit eſpace $CBbc$ qui eſt la difference de l'eſpace changeante ABC.

FIG. XLII.

PROBLÊME,

QUI CONTIENT LE CALCUL DIFFERENTIEL.

TROUVER la difference d'une quantité quelconque qui contient des grandeurs changeantes.

PREMIER CAS.

1. QUAND les changeantes ſont ſimplement lineaires, & ne ſont point multipliées les unes par les autres, (il n'importe pas qu'elles ſoient multipliées par des conſtantes, puiſque les conſtantes n'ont point de differences), & qu'elles ſont ſimplement jointes les unes aux autres par les ſignes + & —; il ne faut que prendre les differences de toutes les changeantes, & les joindre enſemble par les mêmes ſignes, & l'on aura la difference que l'on cherchoit.

Ainſi la difference de $x - y + z = a$, eſt $dx - dy + dz = 0$; la difference de $ax - by + cz = ab$, eſt $adx - bdy + cdz = 0$; la difference de $\frac{aa}{b}x - \frac{bc}{a}y + \frac{cc}{e}z = ab$, eſt $\frac{aa}{b}dx - \frac{bc}{a}dy + \frac{cc}{e}dz = 0$; la difference de $x\sqrt{a} - y\sqrt{b} + z\sqrt{c} = ab$, eſt $dx\sqrt{a} - dy\sqrt{b} + dz\sqrt{c} = 0$. La raiſon de cette pratique eſt évidente quand les lignes vont en augmentant, car la ſeconde y eſt la premiere y plus la difference dy dont la ſeconde ſurpaſſe la premiere; il en eſt de même des autres: Mais comme l'on ne veut que l'expreſſion de la ſeule difference, il faut ſimplement marquer dy.

REMARQUE.

2. DOÙ l'on voit que quand une changeante y va en décroiſſant, c'eſt la premiere y qui ſurpaſſe la ſeconde y de la difference dy, ainſi la ſeconde y eſt $y - dy$; & dans ce cas il faut changer le ſigne de la difference de la ſeconde y; par exemple ſi x augmente, & que y diminue, la difference de $x + y$ ſera $dx - dy$, & la difference de $x - y$ ſera $dx + dy$. Neanmoins en ſuivant la regle du premier cas dans la réſolution d'un Problême, on retrouve ordinairement les grandeurs négatives qui avoient des differences négatives, ce qui les doit faire prendre du côté oppoſé *. Cependant il eſt plus à propos de ſuivre la remarque. * 281. & 282.

SECOND CAS.

523. QUAND pluſieurs changeantes ſont multipliées les unes par les autres, &, ſi l'on veut, qu'il y ait auſſi des conſtantes dans leurs produits; il faut multiplier la difference de chacune ſeparément par le produit des autres, & la ſomme des produits ſera la difference que l'on cherchoit.

Pour trouver la difference de $xy = ab$, il faut multiplier la difference dx de x par y, & la difference dy de y par x; & la ſomme $ydx + xdy = 0$, ſera la difference de $xy = ab$, ou ſimplement $ydx + xdy$ ſera la difference de xy.

De même ſi l'on a le produit $xyz = abc$, la difference ſera $yzdx + xzdy + xydz = 0$; ou $yzdx + xzdy + xydz$ ſera la difference de xyz; la difference de axy ſera $aydx + axdy$; & ainſi des autres.

La raiſon de cette regle eſt que pour multiplier les differences de x & de y l'une par l'autre, il faut concevoir que x eſt devenue $x + dx$, & y eſt devenue $y + dy$; & le produit de ces deux quantités eſt $xy + ydx + xdy + dxdy$; & comme l'on ne veut que les differences, il faut ôter la grandeur finie xy, & il reſte pour la difference du produit xy, la ſomme $ydx + xdy + dxdy$; mais $dxdy$ eſt une grandeur infiniment petite par raport à $ydx + xdy$, c'eſt pourquoi il la faut auſſi négliger, & il ne reſte que $ydx + xdy$ pour la difference de xy que l'on cherchoit.

En voici une autre démonſtration. On peut concevoir chaque difference dx & dy de x & de y partagée par la moitié, & concevoir, 1°. que x eſt diminuée de la moitié de ſa difference, & qu'elle eſt devenue $x - \frac{1}{2}dx$; & de même que y eſt devenue $y - \frac{1}{2}dy$, & leur produit ſera $xy - \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. On peut auſſi concevoir 2°. que x & y ſont augmentées chacune de la moitié de leur difference, que x eſt devenue $x + \frac{1}{2}dx$, & que y eſt devenue $y + \frac{1}{2}dy$; & leur produit ſera $xy + \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy + \frac{1}{4}dxdy$. Or il eſt clair qu'en retranchant la premiere ſomme des produits de la ſeconde, on aura pour reſte exact $ydx + xdy$, & que ce reſte eſt égal à la difference du produit xy. Pour le repréſenter à l'imagination, il n'y a qu'à faire un rectangle qui aille en augmentant, dont x ſoit la baſe & y la hauteur, & prendre d'abord $x - \frac{1}{2}dx$ & $y - \frac{1}{2}dy$, & y diſtinguer les

rectangles que donne leur produit, & prendre enſuite $x + \frac{1}{2}dx$ & $y + \frac{1}{2}dy$, & marquer les rectangles que donne leur produit, & l'on verra que les deux petits rectangles $ydx + xdy$ ſont la difference du rectangle entier xy.

Cette démonſtration ſuppoſée, il eſt évident que la difference de xyz, ou du produit de tant de changeantes qu'on voudra, eſt la ſomme des produits de la difference de chacune de ces changeantes par le produit des autres changeantes; car il n'y a qu'à prendre le produit des deux xy comme une ſeule grandeur u, & la difference de xyz ſera égale à la difference de uz. Or la difference de uz eſt $zdu + udz$; & mettant la valeur de du & de u à leur place, on aura la difference de xyz égale à $xzdy + yzdx + xydz$; & ainſi des autres.

COROLLAIRE I.

4. IL ſuit de là que la difference d'une puiſſance quelconque d'une changeante x, eſt le produit de la difference dx de cette changeante par la puiſſance de la même changeante dont l'expoſant eſt moindre d'une unité que celui de la premiere, multiplié par l'expoſant de la premiere; ainſi la difference de xx eſt $2xdx$; la difference de x^3 eſt $3xxdx$; celle de x^4 eſt $4x^3dx$; & en general celle de x^n eſt $nx^{n-1}dx$.

Car $ydx + xdy$ étant par le ſecond cas la difference du produit de xy, il eſt évident qu'en ſuppoſant $y = x$, ce qui donne $dy = dx$, & en mettant dx au lieu de dy, & x au lieu de y, dans $ydx + xdy$, on aura $xdx + xdx = 2xdx$. Ce qu'il eſt facile d'appliquer aux puiſſances plus élevées.

5. Quand il y a des conſtantes pour les coëficiens des puiſſances des changeantes, elles demeurent dans les differences de ces puiſſances; ainſi la difference de ax^3 eſt $3axxdx$; la difference de ax^n eſt $nax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{1}{2}xx$ eſt $\frac{1}{2} \times 2xdx = xdx$; la difference de $\frac{a}{n}x^n$ eſt $ax^{n-1}dx$; la difference de $\frac{x^n}{a}$ eſt $\frac{n}{a}x^{n-1}dx$; la difference de $x^n y^m$ eſt $nx^{n-1}y^m dx + mx^n y^{m-1}dy$; & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

6. QUAND une fraction a au dénominateur une ou pluſieurs changeantes ou leurs puiſſances, on ſçait qu'on les peut mettre au numerateur en mettant le ſigne — devant leur expo-

ſant; ainſi $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, $\frac{ax^n}{by^m} = \frac{a}{b}x^n y^{-m}$, $\frac{ax^n}{bx^m} = \frac{a}{b}x^{n-m}$; & ainſi des autres. D'où l'on voit que la difference de ces fractions qui ont des changeantes au dénominateur, ſe trouve comme celle des produits; ainſi la difference de $\frac{1}{x} = x^{-1}$, eſt $-1x^{-1-1}dx = -x^{-2}dx$; la difference de xy^{-1} eſt $y^{-1}dx - 1xy^{-2}dy$; la difference de $\frac{x^3y^{-4}}{a}$ eſt $\frac{3}{a}xxy^{-4}dx - \frac{4}{a}x^3y^{-5}dy$; la difference de $\frac{a}{b}x^n y^{-m}$ eſt $\frac{an}{b}x^{n-1}y^{-m}dx - \frac{am}{b}x^n y^{-m-1}dy$.

COROLLAIRE III.

527. LES racines des puiſſances des changeantes pouvant être regardées comme des puiſſances elles-mêmes, dont les expoſans ſont des fractions, on en trouve les differences comme celles des puiſſances (premier Corollaire); ainſi la difference de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; la difference de $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, eſt $\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}-1}dx = \frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{2}dx\sqrt{ax}$; en general la difference de $ax^{\frac{1}{n}}$ eſt $\frac{a}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx$; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}$ eſt $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx = \frac{an}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx$; la difference de $ax^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}}$ eſt $\frac{an}{m}x^{\frac{n}{m}-1}y^{\frac{p}{q}}dx + \frac{ap}{q}x^{\frac{n}{m}}y^{\frac{p}{q}-1}dy$; la difference de $\sqrt{x^2-y^2} = \overline{x^2-y^2}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times 2xdx - \frac{1}{2}\times 2ydy \times \overline{x^2-y^2}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$; la difference de $\sqrt{ax-xx} = \overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2}\times adx - \frac{1}{2}\times 2xdx \times \overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}-1} = \frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-xx}}$; la difference de $\frac{a^y}{p}^{m+n} - x^m \times \overline{a \mp x}^n = 0$, eſt $\frac{am+an}{p}y^{m+n-1} - mx^{m-1}dx \times \overline{a \mp x}^n \mp ndx \times -x^m \times \overline{a \mp x}^{n-1} = 0$.

REMARQUES.

I.

528. QUAND il arrive que quelques-unes des grandeurs changeantes vont en diminuant, pendant que les autres augmentent, les differences de celles qui diminuent étant négatives *, il faut changer le ſigne de chaque produit particulier

* 522.

où se trouvent ces differences négatives. Par exemple si les y diminuent pendant que les x augmentent, la difference de xy doit être $ydx - xdy$; c'est-à dire, il faut changer le signe du produit particulier xdy où se trouve la difference negative $-dy$.

II.

9. Quand on a une fois l'expression des differences des grandeurs changeantes, on fait ensuite sur ces expressions les operations ordinaires de l'Algebre; ainsi le produit de dx par dy est $dxdy$; le quarré de dx est dx^2; sa troisiéme puissance est dx^3; & ainsi des autres operations.

III.

Où l'on explique quelques principes du calcul integral.

10. Les quantités dont on a enseigné à trouver les differences, sont les integrales de ces differences; ainsi x est l'integrale de dx; xy est l'integrale de $ydx \pm xdy$; $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'integrale de $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; $\sqrt{ax^3} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$ est l'integrale de $\frac{3}{2} dx\sqrt{ax}$; & en general ax^n est l'integrale de $nax^{n-1}dx$; & ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

11. LA méthode de retrouver les integrales dont on a les differentielles, est ce qu'on nomme *le calcul integral*, dont on parlera dans la troisiéme Partie. Quand on résout des Problêmes de Geometrie & des sciences Physico-mathematiques, qui sont soumis à ce calcul, on trouve d'abord des équations qui contiennent des differences; & remontant ensuite de ces differences à leurs integrales, on a les résolutions de ces Problêmes. Ceux qui veulent faire usage du calcul integral, doivent se rendre très-familieres les methodes qu'on vient de donner, pour trouver les differences des quantités quelconques qui contiennent des changeantes, en faire eux-mêmes beaucoup d'exemples, & bien remarquer les integrales d'où ils ont tiré ces differences; ils acquiereront par là une très grande facilité de retrouver tout d'un coup, sans avoir besoin des regles, les integrales de beaucoup de differences qui se presenteront dans la résolution des

Problêmes, & qui leur donneront tout d'un coup les réſolutions qu'ils cherchoient.

532. Ce ſeul exemple ax^n eſt l'integrale de la difference $nax^{n-1}dx$, peut ſervir de formule pour trouver la plûpart des integrales de chaque difference particuliere qui n'aura qu'une ſeule changeante x, en comparant la difference particuliere dont il faudra trouver l'integrale à la difference $nax^{n-1}dx$, & ſuppoſant qu'elle repréſente cette difference particuliere, & que l'integrale ax^n repréſente l'integrale que l'on cherche. Car il eſt viſible que pour retourner de la difference $nax^{n-1}dx$ à l'integrale ax^n, il faut 1°. élever x à la puiſſance dont l'expoſant ſurpaſſe d'une unité l'expoſant $n-1$, & l'on aura $x^{n-1+1}=x^n$, & mettre dans la difference cette quantité à la place de x^{n-1}, & elle deviendra nax^ndx. 2°. Il faut diviſer cette quantité par la difference dx de x lineaire, multipliée par $n-1+1=n$; c'eſt-à-dire, il faut diviſer nax^ndx par ndx, & le quotient ſera l'integrale ax^n.

Ainſi pour trouver l'integrale repréſentée par ax^n de la difference $\frac{adz-2zdz}{2\sqrt{az-zz}}=\frac{adz-2zdz}{2}\times\overline{az-zz}^{-\frac{1}{2}}$; on ſuppoſera $az-zz=x$, $1=a$, $-\frac{1}{2}=n-1$; par conſequent $-\frac{1}{2}+1=+\frac{1}{2}=n-1+1=n$, $dx=adz-2zdz$, & $\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}=x^n$. Pour avoir la grandeur à diviſer, il faut mettre dans la difference propoſée cette valeur de x^n, & la grandeur à diviſer ſera $nax^ndx=\frac{adz-2zdz}{2}\times\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}$; le diviſeur ſera $ndx=\frac{1}{2}\times adz-2zdz$; & faiſant la diviſion on trouvera l'integrale $ax^n=\overline{az-zz}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{az-zz}$.

533. Il eſt neceſſaire de remarquer que les conſtantes n'ayant point de difference, une integrale jointe par le ſigne + ou − avec une conſtante, a la même difference qu'auroit cette integrale ſeule; c'eſt pourquoi quand on retrouve l'integrale d'une difference, il faut quelquefois lui ajouter ou en retrancher une conſtante, afin d'avoir l'integrale exacte de cette difference. On donnera dans la troiſiéme Partie la Regle qui ſert à trouver cette grandeur conſtante.

On n'a mis ici la remarque précedente & l'avertiſſement, que pour donner à ceux qui commencent une idée du calcul integral.

IV. REMARQUE.

IV. REMARQUE.

4. Les grandeurs conſtantes n'ayant pas de difference, quand des grandeurs changeantes ſont égales à une conſtante, leurs differences ſont égales à zero; ſi $x+y=a$, $dx \pm dy = 0$, ce qui donne $dx = \mp dy$; ſi $axy = abb$, $aydx \pm axdy = 0$, ce qui donne $ydx = \mp xdy$, & $\frac{dx}{a\overline{y}} = \frac{\mp x}{y}$; ſi $xy^{-1} = a^2$, $y^{-1}dx - xy^{-2}dy = 0$; ainſi $dx = xy^{-1}dy$, & $\frac{dx}{a\overline{y}} = \frac{x}{y}$. Cette remarque ſert dans la reſolution de pluſieurs Problêmes.

V.

5. Quand on compare une integrale, c'eſt-à-dire une grandeur changeante finie qui a ſa difference comme $y+dy$, avec une autre grandeur finie; il faut en ôter la difference, qui étant infiniment petite, ne peut point être comptée avec ſon integrale; ainſi $\frac{y+dy}{z}$ doit être ainſi marquée $\frac{y}{z}$: Car il faut une infinité de differences ou de grandeurs infiniment petites pour faire une grandeur finie.

COROLLAIRE IV.

Où l'on explique la maniere de trouver la difference des ſuites, ce qui ſervira dans la 3e Partie à en trouver les integrales, & à en faire des formules generales.

PREMIER CAS.

6. POUR trouver la difference d'une ſuite qui n'a qu'une même grandeur changeante, ordonnée comme on la voit ici (A) $x^m \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}}^{p}$ &c. 1°. Il faut ſuppoſer (B) $K = a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+$ &c. & l'expreſſion précedente ſera changée en celle-ci (C) $x^m K^p$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura (D) $mx^{m-1}K^p dx + px^m K^{p-1}dK$, qu'il faut changer en cette équivalente (E) $mx^{m-1}K \times K^{p-1}dx + px \times x^{m-1}K^{p-1}dK$, & lui donner cette forme (F) $\overline{mKdx + pxdK} \times x^{m-1}K^{p-1}$. 3°. Il faut dans cette derniere F mettre les valeurs de K & de dK priſes de l'équation B, qui ſont $K = a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+$ &c. & $Kd = \overline{nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1}+3nex^{3n-1}}+$ &c. $\times dx$, à la place de Kdx & de dK; & l'on aura $\left.\begin{matrix} ma+mbx^n+mcx^{2n}+mex^{3n}+\text{&c.} \\ +pnbx^n+2pncx^{2n}+3pnex^{3n}+\text{&c.} \end{matrix}\right\} dx \times x^{m-1}K^{p-1}$,

Il eſt évident que c'eſt la difference de la ſuite ou de l'integrale A que l'on cherchoit.

SECOND CAS.

537. POUR trouver la difference d'un produit de pluſieurs ſuites, comme de A. $x^m \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}}^{p} + \&c. \times \overline{f+gx^n+hx^{2n}}^{q} + \&c.$ 1°. Il faut ſuppoſer B. $K = a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+\&c.$ & C. $l = f+gx^n+hx^{2n}+\&c.$ & l'expreſſion A ſera changée en celle-ci D. $x^m \times K^p l^q$. 2°. Il faut en prendre la difference, & l'on aura E. $mx^{m-1}K^p l^q dx + px^m K^{p-1} l^q dK + qx^m K^p l^{q-1} dl$, qu'il faut changer en cette équivalente E. $mx^{m-1}K \times K^{p-1} l \times l^{q-1} dx + px \times x^{m-1}K^{p-1} l \times l^{q-1} dK + qx \times x^{m-1} K \times K^{p-1} l^{q-1} dl$, & lui donner cette forme F. $\overline{mKldx+pxldK+qxKdl} \times x^{m-1} K^{p-1} l^{q-1}$. 3°. Il faut prendre les valeurs de $Kldx$, de $xldK$, & de $xKdl$ dans B & C; (c'eſt-à-dire, multiplier la valeur de K priſe dans B, par la valeur de l priſe dans C, & multiplier leur produit par dx; prendre la valeur de dK dans B, & la multiplier par xl, & prendre la valeur de dl dans C, & la multiplier par xK), & ſubſtituer ces valeurs dans les termes $mKldx + pxldK + qxKdl$ de F, & l'on aura.

$$\left.\begin{array}{rrr} maf & +mag x^n & +mah x^{2n} \\ & +mbf x^n & +mcf x^{2n} \\ & & +mbg x^{2n} \\ +pbf n x^n & +2pcf n x^{2n} & \\ & & +pbg n x^{2n} \\ +qag n x^n & +2qah n x^{2n} & \\ & & +qbg n x^{2n} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1} K^{p-1} l^{q-1}.$$

C'eſt la difference de la ſuite A que l'on cherchoit.

TROISIÈME CAS.

538. POUR trouver la difference de A. $x^m K^p \times \overline{f+gx^n+hx^{2n}}$ &c. où l'on ſuppoſe B. $K = a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+\&c.$ & que l'expoſant de la ſuite $f+gx^n+hx^{2n}+\&c.$ eſt l'unité, il ne faut pas ſuppoſer cette derniere ſuite égale à une ſeule lettre, mais il faut changer l'expreſſion A en cette équiva-

lente C. $fx^m K^p + gx^{m+n} K^p + hx^{m+2n} K^p +$ &c. & enſuite, 1°, on prendra la difference de C. qui eſt D. $mfx^{m-1} K^p dx + pfx^m K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^{m+n-1} K^p dx + pgx^{m+n} K^{p-1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{m+2n-1} K^p dx + phx^{m+2n} K^{p-1} dK +$ &c. qu'on changera en ſon équivalente E. $mfx^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pfx \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+n} \times gx^n \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + pgx^{n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} \times x^{m-1} K \times K^{p-1} dx + phx^{2n+1} \times x^{m-1} K^{p-1} dK +$ &c. à laquelle on donnera cette forme F. $\overline{mfK dx + pfx dK + \overline{m+n} gx^n K dx + pgx^{n+1} dK + \overline{m+2n} \times hx^{2n} K dx + phx^{2n+1} dK} +$ &c. $\times x^{m-1} K^{p-1}$. 2°. Il faut prendre dans B la valeur de K & la difference de K, c'eſt-à-dire la valeur de dK ; & après avoir multiplié la valeur de K par dx, mettre le produit dans le premier terme de F à la place de Kdx ; multiplier de même x par la valeur de dK, & mettre le produit dans le ſecond terme de F à la place de xdK ; ſubſtituer de même à la place de $x^n Kdx$ dans le troiſiéme terme de F le produit de la valeur de K par $x^n dx$, & celui de la valeur de dK par x^{n+1} dans le quatriéme terme de F à la place de $x^{n+1} dK$; celui de la valeur de K par $x^{2n} dx$ dans le cinquiéme terme à la place de $x^{2n} Kdx$; & celui de la valeur de dK par x^{2n+1} dans le ſixiéme terme à la place de $x^{2n+1} dK$ &c. & l'on aura.

G.
$$\left.\begin{array}{l} maf + mabx^n + macx^{2n} + \text{&c.} \\ \quad + pbfnx^n + 2pcfnx^{2n} + \text{&c.} \\ + \overline{m+n} \times agx^n + \overline{m+n} \times cgx^{2n} + \text{&c.} \\ \quad + pbgnx^{2n} + \text{&c.} \\ + \overline{m+2n} \times ahx^{2n} + \text{&c.} \\ \quad + pbhnx^{3n} + \text{&c.} \end{array}\right\} dx \times x^{m-1} K^{p-1}$$

C'eſt la difference de A que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

9. IL faut dans ces ſuites qu'il n'y ait qu'une même inconnue x, & que les expoſans des termes de chacune ſoient la même progreſſion arithmetique $o, n, 2n, 3n$, &c. & que ſi les expoſans ſont poſitifs dans l'une, quand il y en a pluſieurs mul-

tipliées les unes par les autres, comme dans le ſecond & le troiſiéme cas, ils ſoient auſſi poſitifs dans les autres; & s'ils ſont négatifs dans l'une, ils le ſoient auſſi dans les autres.

II.

§40. Il faut ſe rendre les trois cas précedens très-familiers, & ſurtout le 3e, où ſuppoſant $K^{p-1} = \overline{a + bx^n + cx^{2n} + \&c.}^{p-1}$, il y a deux ſuites multipliées l'une par l'autre; & bien remarquer que dans la difference G. chaque terme eſt multiplié par $x^{m-1}K^{p-1}$; que le premier terme $mafdx \times x^{m-1}K^{p-1}$, ne contient qu'une conſtante maf multipliée par $dx \times x^{m-1}K^{p-1}$; que le ſecond terme outre cela eſt multiplié par x^n, le troiſiéme par x^{2n}, & ainſi de ſuite; que l'integrale A du 3e cas dont la difference G eſt telle qu'on vient de le marquer, a tous ſes termes multipliés par $x^m K^p$, ſçavoir, le premier n'eſt qu'une conſtante f multipliée par $x^m K^p$, mais dans le ſecond terme ſon coéficient conſtant eſt multiplié de plus par x^n, & eſt $gx^{m+n}K^p$; dans le troiſiéme terme le coéficient conſtant eſt de plus multiplié par x^{2n}, & eſt $hx^{m+2n}K^p$, & ainſi de ſuite.

III.

§41. D'où l'on voit que quelque nombre de ſuites qu'il y ait de multipliées les unes par les autres dans une difference comme H. $x^{m-1}K^{p-1}l^{q-1}dx \times \overline{\alpha + \beta x^n + \varkappa x^{2n}} + \&c.$ où l'on ſuppoſe $K = a + bx^n + cx^{2n} + \&c.$ $l = f + gx^n + hx^{2n} + \&c.$ on connoît toujours les expoſans de x, K, l dans chacun des termes de la ſuite qui eſt l'integrale de cette difference H. car le premier terme doit être une conſtante multipliée par $x^m K^p l^q$; au ſecond terme il doit y avoir $x^{m+n}K^p l^q$; au troiſiéme terme, $x^{m+2n}K^p l^q$; & ainſi de ſuite. Ce qu'il faut bien remarquer pour la troiſiéme Partie.

IV.

Sur l'exactitude des démonſtrations du calcul differentiel & integral, c'eſt-à-dire ſur la certitude des réſolutions que l'on trouve par ces calculs.

§42. Quand les anciens Geometres démontroient des raports de pluſieurs figures, comme que les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, que les pyramides

de même hauteur ſont entr'elles comme leurs baſes, &c. ils ſe ſervoient pour faire la démonſtration de figures inſcrites ou circonſcrites, dont les côtés diminuant toujours à l'infini, faiſoient qu'on en pouvoit concevoir d'inſcrites dont les côtés étoient infiniment petits, & leſquelles à cauſe de cela differoient moins des grandeurs où elles étoient inſcrites qu'aucune grandeur donnée, mais la diſtinction de ces differences infiniment petites ne duroit que pendant la démonſtration, & parcequ'elle leur étoit neceſſaire pour faire la démonſtration; & ils ſuppoſoient que ces differences s'anéantiſſoient à la fin de la démonſtration, & que la figure inſcrite devenoit exactement la figure même dans laquelle elle étoit inſcrite; car il eſt évident que ſans l'évanouiſſement de cette difference infiniment petite, le raport qu'ils vouloient démontrer n'auroit pas été démontré dans l'exactitude geometrique.

De même dans la methode generale des tangentes des courbes geometriques de l'article 371, on fait la diſtinction de la partie *Cc* de la ſecante de la parabole (fig. 19) pendant tout le calcul, & on ne pourroit pas faire le calcul pour trouver la tangente par cette methode ſans cette diſtinction de la partie *Cc*, ou, ce qui en eſt une ſuite neceſſaire, des parties *Ce*, *ec*; mais pour avoir la tangente, on ſuppoſe que cette partie *Cc* de la ſecante s'évanouit, & devient nulle.

De la même maniere quand on employe le calcul differentiel & integral dans la réſolution d'un Problême, on regarde les differences infiniment petites comme prêtes à s'évanouir, & on ne les regarde ſubſiſtantes que pour le calcul & pour découvrir ce qu'on cherche pendant qu'on le cherche; & au moment que le calcul fait trouver la réſolution qu'on cherche, on regarde ces differences comme s'évanouiſſant & comme devenant nulles; & par là la réſolution que l'on cherchoit eſt dans la même exactitude geometrique que le ſont les concluſions des anciens Geometres, & la découverte exacte que l'on fait des ſoutangentes par la methode de l'article 371.

Des differences ſecondes, troiſiémes, &c.

373. ON ne voit rien dans l'ancienne Geometrie qui ait raport aux differences ſecondes, troiſiémes, &c. mais auſſi les anciens

Geometres ſe ſont bornés à des Problêmes qui n'en avoient pas beſoin : On s'eſt ouvert de notre temps une voye pour la réſolution des Problêmes qui penetre à l'infini, & qui s'etend à toutes les courbes qu'on peut imaginer, geometriques, méchaniques & parcourantes ; l'on a eu beſoin, pour n'être arrêté nulle-part, de diſtinguer dans pluſieurs Problêmes, outre les premieres differences, des ſecondes differences, des troiſiémes, & ainſi à l'infini.

On en a vû la poſſibilité en ce que la grandeur étant diviſible à l'infini, 1°, l'on peut concevoir une progreſſion geometrique $\dot{\cdot}\dot{\cdot}\ a, b, c, e, f, g,$ &c. dont le premier terme a ſoit une grandeur fini, le ſecond b ſoit une difference premiere infiniment petite par raport à a, c une difference ſeconde par raport à la difference premiere b, de maniere que c ſoit infiniment petite par raport à b, & de même e par raport à c ; & ainſi de ſuite ; de façon que le raport infini des deux premiers termes a & b, regne dans toute la progreſſion. C'eſt de cette ſorte qu'on aura une progreſſion de differences premieres, ſecondes, &c. en élevant $\overline{x+dx}^{n}$ à la puiſſance dont n eſt l'expoſant ; car on trouvera la ſuite $x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n\times n-1}{1\times 2}x^{n-2}dx^2 + \frac{n\times n-1\times n-2}{1\times 2\times 3}x^{n-3}dx^3 +$ &c. dont le premier terme contient une grandeur finie, le ſecond une premiere difference dx, le troiſiéme une ſeconde difference $dx \times dx$ ou dx^2 ; & ainſi de ſuite : Et l'on peut voir une ſemblable progreſſion geometrique dans la Geometrie ordinaire,
FIG. II. car ſi l'on ſuppoſe dans la ſeconde figure l'ordonnée du cercle ED ſi petite, qu'elle ſoit une difference premiere prête à s'évanouir, & tout proche de l'extrémité B du diametre AB ; il eſt évident que la grandeur finie AD ſera à une difference premiere ED, comme cette difference premiere ED eſt au reſte DB du diametre, lequel reſte DB eſt par conſequent infiniment petit par rapport à la difference premiere ED ; & par conſequent ce reſte eſt une difference ſeconde ; & l'on pourroit concevoir aiſément une difference troiſiéme, en ſuppoſant que la difference ED eſt le diametre d'un cercle, & continuer cela à l'infini.

2°. On a auſſi vû la poſſibilité de ces differences ſecondes, troiſiémes, &c. en faiſant attention à la formation des lignes
FIG. XLII. & des figures par le mouvement ; par exemple ſi le point C

après avoir décrit la partie finie AC de la courbe, étant mû ensuite le long de BC, qui elle-même se meut parallelement sur AB, décrit en un premier instant la partie infiniment petite $Cc\,(du)$ de la courbe, pendant que BC parcourt dans le même instant Bb ou son egale $Cd\,(dx)$, & que le point C s'avance sur bc depuis d jusqu'à c, & parcourt $dc\,(dy)$ sur la droite bc : En concevant des mouvemens semblables dans le second instant suivant, & que bc a parcouru $bH = ce$, & que le point C a décrit une seconde partie ef infiniment petite de la courbe, & qu'il a avancé sur la droite bc venue en Hf de la longueur infiniment petite ef; on trouvera des differences secondes. Car si l'on suppose le mouvement de la droite BC sur $ABbH$ uniforme, & qu'ainsi $bH = ce = Bb = Cd\,(dx)$, mais que la viteſſe du point C sur cette droite Hf en s'éloignant de l'axe AB, est continuellement avancée ou retardée, en prenant cette derniere supposition, le second accroissement $cf\,(dy)$ sera moindre que le premier accroissement $dc\,(dy)$ & $dc - ef$ qui sera leur difference, sera une difference seconde; & de même $Cc - cf$ sera une difference seconde; puisque chacune de ces differences secondes doit être infiniment petite par raport à sa difference premiere, comme cette difference premiere est infiniment petite par raport à la grandeur finie dont elle est la difference premiere. Si l'on fait attention au mouvement du 3e instant, on y trouvera de même des differences troisiémes, & ainsi à l'infini.

On trouve de même des differences secondes & troisiémes, &c. dans les espaces; car le petit espace Crc est infiniment petit par raport à la difference premiere CAc du segment AC, & par consequent Crc est une difference seconde de ce segment. De même l'espace Cdc est infiniment petit par raport à la difference premiere $CBbc$ de la figure CAB. Il est facile de trouver ainsi des differences secondes & troisiémes dans les figures solides.

Enfin on a vû l'utilité de cette distinction des differences secondes & troisiémes, &c. dans la résolution de plusieurs beaux Problêmes, c'est pourquoi on les a aussi réduites au calcul que voici.

Suppositions ou demandes, & définitions.

I.

144. L'On marque ainsi les differences secondes, troisiémes, &c.

des differences premieres ; la difference de dx eſt ddx ou d^2x ; la difference de d^2x eſt $dddx$ ou d^3x, & ainſi à l'infini ; de même ddu, d^2u, d^3u, &c. ſont les differences ſecondes, troiſiemes, quatriemes de u ; & ainſi des autres. On nomme auſſi les differences premieres, les differences du premier genre ; les ſecondes, les differences du ſecond genre, &c. Les puiſſances d'une difference premiere ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. ainſi $dxdx$ ou dx^2 ; $dxdxdx$ ou dx^3 ; dx^4, &c. ſont des differences du ſecond genre, du troiſiéme, du quatriéme, &c. & il faut remarquer que d^2x eſt $dddx$; mais dx^3 eſt $dxdxdx$, &c. Les produits des differences de differentes changeantes ſont auſſi des differences du ſecond genre, du troiſiéme, &c. comme $dxdy$, $dxdy^2$, dx^2dy^2, &c.

II.

545. Comme les grandeurs finies changeantes ſont les integrales des differences premieres, de même les integrales des differences ſecondes ſont des differences premieres ; les integrales des differences troiſiémes ſont des differences ſecondes ; & ainſi des autres. Et comme un nombre fini de differences premieres ne fait qu'une difference premiere, & qu'il faut une infinité de differences premieres pour faire une grandeur finie ; il en eſt de même des differences ſecondes à l'égard des premieres ; des troiſiémes à l'égard des ſecondes, &c.

III.

546. Comme une grandeur finie conſtante n'a point de difference, de même quand une difference premiere eſt ſuppoſée conſtante, elle n'a point de ſeconde difference, c'eſt-à-dire ſa ſeconde difference, & par conſequent les ſuivantes ſont zero. D'où l'on voit que comme une integrale changeante + ou — une conſtante a la même difference que s'il n'y avoit point de conſtante, ce qui eſt cauſe que pour retourner à l'integrale, il faut quelquefois, après avoir trouvé l'integrale de la difference, ajouter à cette integrale une conſtante finie, ou l'en retrancher ; il faut quelquefois de même en retournant des differences ſecondes aux premieres qui en ſont les integrales, ajouter ou retrancher une difference premiere conſtante pour avoir l'integrale complete.

IV.

547. Lorſque pluſieurs changeantes comme x, y, z, &c. augmentent ou diminuent enſemble, on en conſidere ordinairement

ment une, laquelle on veut, comme recevant à chaque instant des accroissemens égaux, ou des diminutions égales, & par conséquent la différence de cette changeante est considerée comme constante qui n'a pas de seconde différence pendant que les autres en ont, parcequ'elles reçoivent des accroissemens inégaux, ou des diminutions inégales. Pour le représenter à l'imagination, supposé que Cc, cf soient deux parties infiniment petites de la courbe, & que Cc qui est aussi une partie de la tangente en C, soit prolongée en g; que du centre c avec le rayon cf on tire l'arc fi; qu'on prolonge ef en g; qu'on mene par f, fl parallele à ce, & par l & i, lm, in paralleles à Hf; en supposant 1°. l'accroissement $Cd\,(dx)$ constant, c'est-à-dire $Cd = ce\,(dx)$, il est évident que les triangles rectangles Cdc, ceg sont semblables & égaux; par conséquent $eg = dc = dy$; d'où l'on voit que $dc\,(dy)$ va en diminuant, puisque le second dy qui est ef est moindre que le premier qui est dc; leur différence est $eg - ef = fg$; ainsi fg est la différence seconde ddy; & quand les dy vont ainsi en diminuant, la différence seconde $fg\,(-ddy)$ est négative; ce qu'il faut bien remarquer. Par la même raison ig est ddu, étant la différence de $cg = Cc = du$, & de $cf = ci$; & les Cc, $cf\,(du)$ allant en diminuant, $-ddu$ est négative. 2°. Si l'on suppose $dc\,(dy) = ef = lm$, c'est-à-dire dy constant, les triangles rectangles Cdc, cml seront semblables & égaux; & l'on verra que me sera ddx & li sera ddu. 3°. Si l'on suppose $Cc\,(du)$ constant, c'est à-dire $Cc\,(du) = cf = ci$, les triangles rectangles Cdc, cni seront semblables & égaux, & ne sera ddx, & iK sera ddy. Il faut remarquer que quand on suppose une différence constante comme dx, son integrale x n'est pas pour cela constante, puisque sa différence est dx; mais elle n'a point de différences secondes, troisiémes, &c. Fig. LXII.

PROBLÊME II.

148. *TROUVER les differences des expressions qui contiennent des differences.*

ON les trouvera de la même maniere qu'on trouve les différences premieres par le premier Problême; & il suffira ici, pour le faire concevoir, d'en mettre quelques exemples.

Pour trouver la différence de $x\,dx$, on regardera ce produit comme composé des deux grandes changeantes x & dx,

& on prendra la difference de chacune multipliée par l'autre, & on trouvera $dx^2 + xddx$ pour la difference que l'on cherchoit ; d'où il ſuit que la difference de dx^2 eſt $2dxddx$. La démonſtration eſt ſemblable à celle qu'on a donnée pour trouver la difference des produits xy, xx, &c. D'où il ſuit que la difference de $\frac{1}{dx} = dx^{-1}$ eſt $dx^{-1-1} - ddx = -\frac{ddx}{dx^2}$; la difference de $\frac{ydy}{dx} = ydydx^{-1}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $dy^2dx^{-1} + yddydx^{-1} = \frac{dy^2}{dx} + \frac{yddy}{dx}$; mais en ſuppoſant dy conſtante, la difference de $ydydx^{-1}$ ſera $dy^2dx^{-1} - ydydx^{-2}ddx = \frac{dy^2}{dx} - \frac{ydyddx}{dx^2}$; la difference de $du^2 = dx^2 + dy^2$, en ſuppoſant dx conſtante, ſera $duddu = dyddy$; en ſuppoſant dy conſtante, elle ſera $duddu = dxddx$; en ſuppoſant du conſtante, elle ſera $dxddx = -dyddy$; & en ne ſuppoſant aucune de ces differences conſtante, elle ſera $duddu = dxddx + dyddy$; La difference de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $ddu = dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; en ſuppoſant dy conſtante, elle eſt $ddu = \frac{dxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en ſuppoſant du conſtante, elle eſt $0 = \frac{dxddx + dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, qui ſe réduit à $dxddx = -dyddy$. La difference de $my^{m-1}dy = dx$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $\overline{mm - 1m} \times y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$. De même la difference de $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$, en ſuppoſant dx conſtante, eſt $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$. La difference de $\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times -\overline{dxddy}^{-1}$, en ſuppoſant dx conſtante (on ne peut pas ſuppoſer dy conſtante, parcequ'il y a ddy qui ſeroit zero ſi dy étoit conſtante,) eſt $3dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} \times -\overline{dxddy}^{-1} - dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}} \times \overline{-dxddy}^{-2}$, qu'on peut réduire, ſi l'on veut, à cette expreſſion équivalente $-\frac{3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxd^3y \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire concevoir la maniere de trouver les differences de toute quantité qui contient des differences quelconques.

SECTION II.

L'uſage de l'Analyſe dans la réſolution des Problêmes de Geometrie compoſée, en ſe ſervant du calcul differentiel.

AVERTISSEMENT.

49. LORSQU'ON veut réſoudre un Problême de Geometrie ou des ſciences Phyſico-mathematiques par le calcul differentiel & integral, on commence toujours la réſolution par le calcul differentiel, & l'on trouve d'abord l'équation du Problême, laquelle contient des differences, dont il ne faut plus que chercher les integrales, pour avoir la réſolution du Problême.

Quand il arrive qu'on peut ôter les differences de l'équation du Problême qui en contient, ſans avoir recours aux integrales, (par exemple ſi dx, ou dx^2, ou ddx, &c. ſe trouve dans l'équation du Problême, & qu'on puiſſe faire en ſorte qu'elle ſe diviſe exactement par les mêmes differences, cela ne laiſſera dans l'équation que des grandeurs finies ſans difference,) alors le Problême ſe réſout par le ſeul calcul differentiel. C'eſt de cette ſorte que ſont réſolus par le ſeul calcul des differences les Problêmes de l'excellent Livre de *l'Analyſe des infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital*, où l'on voit un uſage perpetuel de l'Analyſe dans les réſolutions des Problêmes par le moyen du calcul differentiel: Mais dans la plûpart des Problêmes la réſolution s'acheve par le calcul integral. On fera remarquer ici que dans l'application de l'Analyſe à la Geometrie compoſée, en ſe ſervant du calcul differentiel & integral, l'on trouve ordinairement des formules generales qui donnent la réſolution de tous les Problêmes ſemblables, en ſubſtituant ſimplement dans ces formules les valeurs qui conviennent aux Problêmes particuliers. On mettra ici celles de ces formules qui ſont le plus d'uſage, & qui ont le plus d'étendue, afin que dans la brieveté qu'on eſt obligé de donner à ce huitiéme Livre, les Lecteurs qui commencent, ne laiſſent pas d'y trouver la méthode de réſoudre les Problêmes les plus utiles de la Geometrie compoſée, & ce qui leur eſt neceſſaire pour entendre les nouvelles découvertes, & pour en faire eux-mêmes.

Les formules des tangentes & des autres lignes qui ont raport aux tangentes.

550. SI l'on imagine que ACc eſt une courbe quelconque dont
FIG. XIX. Cc eſt une partie infiniment petite, & qui eſt par conſequent une petite partie de la tangente au point C; qu'on mene des points C, c les ordonnées CB, cb ſur le diametre AB; qu'on prolonge la tangente cC en S où elle rencontre le diametre prolongé BA, & qu'elle rencontre auſſi au point T la tangente AT du ſommet A; qu'on tire auſſi Ce parallele au diametre AB qui rencontre cb en e & AT en t; enfin qu'on mene CD perpendiculaire à la tangente au point C qui rencontre le diametre au point D.

Quelque angle CBA que faſſent les ordonnées BC avec le diametre AB, le petit triangle Cec ſera toujours ſemblable à chacun des triangles CBS, ATS, CTt. Suppoſant $AB = x$, $BC = y$, l'on aura $Ce = Bb = dx$, $ec = dy$, & à cauſe des triangles ſemblables Cec, CBS, on aura $ec\,(dy).\ Ce\,(dx) ::$ $BC\,(y).\ BS = \frac{y\,dx}{dy}$, qu'on ſuppoſera, pour abreger, $= S$.

Formule de la ſoutangente. $BS\,(S) = \frac{y\,dx}{dy}$; *d'où l'on déduit* $AS = BS - AB = \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$, qu'on ſuppoſera $= s$.

LES triangles ſemblables Cec, SAT, donnent auſſi $Ce\,(dx)$ $.\ ec\,(dy) ::\ AS\,(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}.\ AT = \frac{y\,dx - x\,dy}{a\,x}$, qu'on ſuppoſera $= \theta$; d'où l'on aura $Tt = At$ ou $CB - AT = \frac{x\,dy}{dx}$, qu'on ſuppoſera $= \tau$.

Ces quatre formules pour trouver les lignes $BS\,(S), AS\,(s)$, $AT\,(\theta), Tt\,(\tau)$, ſont toujours les mêmes, quelque ſoit l'angle des ordonnées avec le diametre. On ſuppoſe pour les ſuivantes que cet angle eſt droit, ce qu'il faut bien remarquer.

Nommant l'arc AC de la courbe ACc, u; la partie Cc infiniment petite de cette courbe ſera $= du$; & comme elle eſt l'hypothenuſe du petit triangle rectangle Cec, l'on aura $\overline{Cc}^2\,(du^2) = \overline{Ce}^2 + \overline{ec}^2\,(dx^2 + dy^2)$; ainſi $Cc\,(du) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Les triangles rectangles ſemblables Cec, CBS donnent $ec\,(dy)$ $.\ Cc\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) ::\ BC\,(y).\ CS = \frac{y}{a\,y}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= T$; ainſi $CS\,(T) = \frac{y}{a\,y}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, eſt la formule

de la tangente. Les mêmes triangles donnent auſſi $Ce(dx)$. $Cc(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: AS(\frac{ydx-xdy}{dy})$. $ST = \frac{ydx-xdy}{dxdy} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= t$; d'où l'on déduira $CT = CS - ST$, $= \frac{x}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= t$.

Les triangles rectangles ſemblables Cec, BCD, (car ils ont chacun un angle droit Cec, CBD, & de plus ôtant de chacun des angles droits BCe & DCc l'angle commun DCe, les angles eCc, BCD ſont égaux,) donnent $Ce(dx)$. $Cc(\sqrt{dx^2+dy^2})$ $:: CB(y)$. $CD = \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, qu'on ſuppoſera $= P$. C'eſt la formule de la perpendiculaire CD. Les mêmes triangles donnent encore $Ce(dx)$. $ec(dy) :: CB(y)$. $BD = \frac{ydy}{dx}$, qu'on ſuppoſera $= p$. C'eſt la formule de la ſoûperpendiculaire BD; d'où l'on déduit $AD = AB + BD = \frac{xdx+ydy}{dx}$, qu'on ſuppoſera $= p$; & $SD = SB + BD = \frac{ydx^2+ydy^2}{dxdy}$, qu'on ſuppoſera $= \pi$.

On a mis toutes ces formules pour faire concevoir dans la ſuite ce que l'on entend par la *methode inverſe des tangentes*.

Uſage de ces formules.

EXEMPLE I.

QUAND on veut trouver quelqu'une de ces lignes par raport à une courbe particuliere, par exemple la ſoutangente S, il faut par le moyen de l'équation de cette courbe particuliere, prendre la valeur de $\frac{dx}{dy}$; par exemple ſi l'on veut la ſoutangente de la parabole dont l'équation eſt $yy - px = 0$, il faut prendre les differences, & l'on aura $2ydy = pdx$, ce qui donnera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$; il faut enſuite ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{2yy}{p}$; & mettant pour $2yy$ ſa valeur $2px$, l'on aura $S = 2x$: ce qui fait voir que dans la parabole la ſoutangente S eſt égale au double de la coupée x. Et quand on veut la ſoutangente pour un point déterminé, il n'y a qu'à mettre la valeur déterminée de x qui convient à ce point là dans $S = 2x$, & la ſoutangente ſera déterminée pour ce point là. Il faut faire la même choſe pour les autres courbes Il faut de même pour les autres formules, trouver par les équations des courbes particulieres, les valeurs des differences dy, dx, $\sqrt{dx^2+dy^2}$,

en grandeurs finies qui ne contiennent plus de differences, & les ſubſtituer dans les formules, & après la ſubſtitution, l'on aura les valeurs que repreſentent ces formules.

EXEMPLE II.

552. TOUTES les courbes geometriques peuvent être repreſentées par l'équation generale $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$ dans laquelle x marque les coupées AB, y les ordonnées BC; car dans les équations de toutes les courbes geometriques, ne pouvant y avoir que quatre ſortes de quantités qui en compoſent les termes; les premieres qui ne contiennent de changeante que x ſans y; les ſecondes qui ne contiennent que y; les troiſiémes des x & des y mêlés enſemble, & les quatriémes un terme tout connu ou conſtant; le premier terme de l'équation generale repreſente les premieres; le ſecond, les ſecondes; le troiſiéme, les troiſiémes; & le quatriéme repreſente le terme conſtant de celles qui en ont un; f, g, h, repreſentent les coëficiens; & m, n, r, s, repreſentent les expoſans des changeantes x & y. Cela ſuppoſé, il faut trouver par cette équation generale, la ſoutangente de toutes les courbes geometriques. FIG. XIX.

1°. Il faut prendre les differences des termes de l'équation generale, & l'on aura $mfx^{m-1}dx + ngy^{n-1}dy + rhx^{r-1}y^s dx + shx^r y^{s-1}dy = 0$; d'où l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{-ngy^{n-1} - shx^r y^{s-1}}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$.

2°. Il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$ dans la formule de la ſoutangeante $S = \frac{ydx}{dy}$, & l'on aura $S = \frac{-ngy^n - shx^r y^s}{mfx^{m-1} + rhx^{r-1}y^s}$, qui eſt la valeur de la ſoutangente de toutes les courbes geometriques, ou plutôt une formule pour les trouver, en ſubſtituant dans cette expreſſion generale de la ſoutangente, les valeurs des indéterminées f, g, h, m, n, r, s, priſes des équations de chaque courbe geometrique dont on voudra avoir la ſoutangente.

Avertiſſement.

On n'a mis ce ſecond Exemple, que pour faire voir aux Lecteurs la beauté de l'Analyſe, & l'avantage particulier qu'elle a de faire appercevoir à l'eſprit le nombre infini de toutes les courbes geometriques, ſous une expreſſion auſſi

ſimple qu'eſt l'équation generale qui précede, & de lui faire découvrir par un même calcul, en ſe ſervant de cette équation, des propriétés qu'il voit clairement leur convenir à toutes.

REMARQUES.

I.

553. QUAND la quantite que l'on trouve par le moyen de l'équation d'une courbe particuliere pour la valeur de $\frac{dx}{dy}$, eſt une fraction, & qu'en voulant, par exemple, une ſoutangente déterminée pour un point particulier de la courbe, la ſubſtitution des valeurs déterminées de x & de y pour ce point-là, rend le numerateur & le dénominateur chacun égal à zero; il faut continuer de prendre la difference du numerateur, & enſuite celle du dénominateur, & les diviſer l'une par l'autre, & ſuppoſer la nouvelle fraction égale à $\frac{dx}{dy}$; & après avoir ſubſtitué dans cette nouvelle fraction les valeurs déterminées de x & de y, prendre dans cette équation la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & la ſubſtituer dans la formule $s = \frac{ydx}{dy}$; & l'on aura la valeur de la ſoutangente, qui convient à ce point-là. Si la ſubſtitution des valeurs déterminées de x & de y rendoit encore le numerateur & le dénominateur de la nouvelle fraction égaux chacun à zero, il faudroit continuer de prendre les differences du numerateur & du dénominateur de la nouvelle fraction, & continuer l'operation comme on vient de le dire.

II.

554. La conſideration des tangentes d'une courbe a de grands uſages; on en mettra ſeulement ici quelques-uns. 1°. Chaque partie infiniment petite de la courbe, étant une partie infiniment petite de la tangente à ce point de la courbe, les angles que font entr'elles les tangentes des points infiniment proches de la courbe, ſont ceux des petites parties de la courbe.

2°. Si l'on trace ſoi-même les tangentes d'une courbe qui rentre en elle-même comme d'une ellipſe, en commençant au ſommet, on verra que les ſoutangentes BS, BS, &c. priſes ſur un diametre AB, augmentent à meſure que l'on prend des points qui vont du ſommet A vers le point D, où ſe termine le diametre conjugué, & qu'elles s'augmentent en allant du côté S vers l'origine; qu'au point D du FIGURE XLIII.

diametre conjugué, la ſoutangente *KS* devient infinie, la tangente *DE* ſe detachant là de la ſoutangente à laquelle elle devient parallele en ce point *D*; & qu'enſuite les ſoutangentes *bs* des points *c*, *c* pris depuis le diametre conjugué *D* vers la ſeconde extremité (a) du diametre, paſſent de l'autre côté, & ſe trouvent au côté oppoſé à l'origine, & vont toujours en diminuant; de maniere que ſi l'on fait les premieres poſitives, les ſecondes ſeront négatives; & au point *D* du paſſage des poſitives aux negatives, la ſoutangente devient infinie.

Si l'on commence à mener les tangentes du ſommet *D* du ſecond diametre par tous les points *C*, *C* de la courbe, juſqu'aux points *S*, *S* du premier diametre a*A*, prolongé vers *S*, on verra que les ſoutangentes *BS*, *BS* vont en diminuant juſqu'au ſommet *A* du premier diametre, où la ſoutangente devient zero, & continuant enſuite de mener les tangentes c*S*, c*S* par les points c, c, juſqu'à la ſeconde extremité *d* du ſecond diametre, on verra que les ſoutangentes *BS* vont enſuite en augmentant juſqu'au point *d*, où la ſoutangente devient encore infinie, étant parallele à la ſoutangente.

Si l'on mene hors de l'ellipſe une droite *aαss* parallele au diametre, les ſoutangentes *as*, *as* des points *C*, *C*, pris depuis le ſommet *A*, juſqu'au diametre conjugué *D*, priſes ſur cette parallele depuis le point *a* qui répond à l'origine *A*, ſeront du côté des négatives, & depuis le diametre conjugué *D*, elles ſeront du côté des poſitives, & les premieres iront en augmentant, & les ſecondes en diminuant; & au point *D*, qui eſt le paſſage des négatives aux poſitives, la ſoutangente ſera infinie, parce que la tangente *De* ſe détache en ce point-là de la ſoutangente, & lui devient parallele; & ſi l'on mene les tangentes en commençant au point *D* par tous les points *D*, *C*, *C*, *A*, c, c, *d*, les ſoutangentes *αs* négatives ſur *aαs*, iront en diminuant juſqu'à celle du point *A*, où la ſoutangente ſera zero, après quoi elles deviendront poſitives vers la gauche, & iront en augmentant juſqu'à la ſoutangente du point *d*, qui ſera infinie.

Après s'être rendu cette remarque bien familiere, on aura, 1°, une marque pour connoître quand on a une équation d'une courbe par raport à une droite donnée, ſi elle tourne ſa concavité ou ſa connexité vers cette droite; car en trouvant

trouvant les ſoutangentes de deux ou trois points proches de l'origine, il n'y aura qu'à voir ſi elles augmentent poſitivement ou négativement ; dans le premier cas elle eſt concave vers la droite donnee ; dans le ſecond, elle eſt convexe.

On verra clairement, 2°. que quand une ſuite de grandeurs, comme de ſoutangentes ou autres, eſt d'abord poſitive, & devient enſuite négative, l'expreſſion indéterminee commune à chaque grandeur de cette ſuite, devient au point du paſſage égale à zero ou à l'infini ; elle eſt égale à zero quand les poſitives ou negatives vont d'abord en diminuant & enſuite en augmentant ; elle eſt égale à l'infini, quand elles commencent par augmenter ; & qu'après le paſſage elles vont en diminuant ; ce qu'il faut bien remarquer ; & en ſuppoſant l'expreſſion indéterminée de chaque grandeur de cette ſuite égale à zero ou à l'infini, cela ſert à déterminer la valeur de l'inconnue de cette expreſſion, par exemple de l'ordonnée y, ou de la coupée x aux points des paſſages des grandeurs poſitives aux negatives, ou des négatives aux poſitives.

3°. On vient de remarquer que les tangentes aux ſommets du diametre ſont paralleles aux ordonnées ; par conſéquent ſi l'on conſidere le petit triangle dont du petite partie de la courbe eſt l'hypothenuſe, dx petite partie du diametre eſt un côté, dy petite partie de l'ordonnée eſt le ſecond côté, aux ſommets du diametre, on verra que l'hypothenuſe du ſe détache du petit côté dy & lui devient parallele ; & par conſéquent le petit côté dx entre ces paralleles devient zero par raport à chacune des paralleles qui devient indéterminée ou infinie. De même les tangentes aux ſommets des ſeconds diametres conjugués aux premiers, ſont paralleles aux premiers diametres, c'eſt-à dire, elles ſont paralleles aux coupées x ; & à ces ſommets l'hypothenuſe du ſe détache du petit côté dx & lui devient parallele, & par conſéquent le petit côté dy devient en cet endroit là zero par raport au côté dx & à l'hypothenuſe du, qui ſont devenus paralleles & indéterminés ou infinis.

4°. Cette derniere remarque donne lieu à cette autre, que les ordonnées y du côté concave de la courbe vont en augmentant depuis le ſommet juſqu'au diametre conjugué où eſt la *plus grande* y, & enſuite elles vont en diminuant juſqu'à l'autre extrêmité du diametre ; & au contraire du côté où la

courbe tourne ſa convexité, les y vont en diminuant depuis l'origine juſqu'au point où ſe termine le diametre conjugué où eſt *la moindre* y, & enſuite les y vont en augmentant; ainſi au point de la plus *grande ordonnée* y du côté concave, & de la *moindre* du côté convexe, dans le petit triangle fait des du, dx, dy; dy eſt zero. En prenant auſſi toutes les paralleles aux coupées x, terminées au diametre conjugué, pour les x; on verra que depuis un des ſommets D ou d du diametre conjugué, les x vont en augmentant du côté concave juſqu'au ſommet A du premier diametre, où ſe trouve *la plus grande* x, après quoi les x vont en diminuant juſqu'à la ſeconde extrêmité d du diametre conjugué; & au contraire du côté convexe en concevant une ligne hors de l'ellipſe parallele au diametre conjugué, les x priſes ſur cette parallele vont en diminuant depuis celle qui ſe termine au ſommet D du diametre conjugué juſqu'à la moindre de toutes les x qui ſe termine au ſommet A du premier diametre, après quoi elles vont en augmentant; par conſequent au point de *la plus grande* x du côté concave, & de *la moindre* x du côté convexe dans le petit triangle, le côté dx devient zero. D'où l'on voit que dx & dy ne peuvent pas être dans ces cas-là chacune égales à zero, ni avoir un raport fini.

5°. Les remarques qu'on a faites par raport à l'ellipſe, pour fixer l'imagination, doivent s'appliquer à toutes les courbes où les appliquées vont en augmentant, & enſuite en diminuant du côté concave, & le contraire du côté convexe, & de même les coupées; & elles ſuffiſent pour en faire faire de ſemblables ſur toutes ſortes de courbes.

II.

Des quantités qu'on appelle les plus grandes & les moindres, & les formules pour les trouver.

DE'FINITION.

555. LORSQU'ON a l'équation d'une courbe où les x ſont les coupées, & les y les ordonnées, & qu'on veut ſçavoir le point où ſe trouve la plus grande ou la moindre ordonnée y, comme auſſi celui de la plus grande ou de la moindre coupée x, c'eſt-à-dire la valeur déterminée de x qui convient à ce point de la plus grande ou de la moindre ordonnée, &, ſi l'on veut, celle de cette plus grande ou moindre y; & de même la valeur de y ou de x au point de la plus grande ou moindre x;

cela s'appelle une queſtion ou un problême *des plus grandes & des moindres.*

Comme auſſi ſi l'on a une quantité changeante compoſée de ſeules x ou de ſeules y, & que cette quantité aille en augmentant, & enſuite en diminuant ; ou en diminuant, & enſuite en augmentant, & qu'on veuille ſçavoir de toutes ces quantités changeantes qui ont une même expreſſion, celle qui eſt la plus grande ou la moindre, il faut concevoir cette quantité comme étant l'ordonnée d'une courbe, & la ſuppoſer, ſi elle ne contient que des x, égale à y ; ou, ſi elle ne contient que des y, égale à x ; & concevoir que les x ſont les coupées, & y l'ordonnée égale à la quantité propoſée, & il s'agira de trouver la plus grande ou la moindre y comme dans les courbes ; & ce ſera auſſi *un Problême des plus grandes & des moindres.*

Formules pour trouver les plus grandes & les moindres.

556. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$ eſt la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* y ; & $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$ ſera la formule pour trouver la *plus grande* ou la *moindre* x ; ou ſimplement $dy = 0$, & $dy =$ à l'infini, qu'on marque ainſi $dy = \infty$, ſont les formules pour trouver les *plus grandes* & les *moindres.*

USAGE DES FORMULES.

QUAND on a l'équation d'une courbe où il faut trouver les plus grandes & les moindres, ou une expreſſion d'une quantité changeante réduite à l'équation d'une courbe, en la ſuppoſant égale à une changeante y ; il faut prendre les differences de cette équation, & réduire au premier membre $\frac{dy}{dx}$, & le reſte de l'équation differentielle où il n'y a plus de dy ni de dx au ſecond membre ; & quand on cherche la plus grande ou la moindre y, prendre pour formule $\frac{0}{dx}$; c'eſt-à-dire, ſuppoſer que le numerateur eſt zero, & tirer de l'équation qui en réſulte, en y employant auſſi l'équation même de la courbe propoſée, la valeur ou les valeurs de x ; & l'on aura la valeur déterminée de x au point de la plus grande ou de la moindre y ; & l'on peut auſſi déterminer la valeur de cette plus grande ou moindre y, puiſque x eſt déterminée. Si l'on cherche la plus grande ou la moindre x, il faut ſe ſervir de la formule $\frac{dy}{0}$, c'eſt-à-dire, ſuppoſer le dénomina-

teur égal à zero, & par cette équation déterminer les valeurs de x & de y. Si l'on ne peut pas trouver de valeurs, ni zero, pour la plus grande ou moindre x & y, & qu'on n'en trouve que d'imaginaires, c'eſt une marque que la courbe n'en a pas. On diſtinguera quand la quantité que l'on trouve par la méthode eſt une plus grande ou une moindre, *par la ſeconde Remarque, nom.* 2.

Pour trouver, par exemple, les *plus grandes* & les *moin-* *379. *dres* de la courbe dont l'équation eſt * $\frac{a}{p}yy = \frac{1}{4}aa - xx$; 1°. on prendra les differences de l'équation, & l'on aura $\frac{a}{p}y\,dy = -x\,dx$; ce qui donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{px}{ay}$; & en mettant au lieu de y ſa valeur $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-px}{a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx}}$.

2°. On ſuppoſera, ſuivant la formule $\frac{0}{ax}$, le numerateur $= 0$; ce qui donnera $-px = 0$; & diviſant par $-p$, on aura $x = 0$: c'eſt la valeur de x au point de la plus grande y. En ſubſtituant cette valeur de $x = 0$ dans la propoſée, au lieu de x, on trouvera la plus grande $y = \frac{1}{2}\sqrt{ap}$. Pour trouver la plus grande x, on ſuppoſera, ſuivant la formule $\frac{dy}{0}$, le dénominateur $a\sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{p}{a}xx} = 0$; ce qui donnera $x = \frac{1}{2}a$, qui eſt la valeur de la plus grande x; & la ſubſtituant dans la propoſée, au lieu de x, on trouvera que la valeur de y au point de la plus grande x, eſt $y = \sqrt{\frac{1}{4}ap - \frac{1}{4}ap} = 0$; c'eſt-à-dire, y eſt zero à ce point là.

REMARQUES.

I.

*377. ON remarquera que quand on trouve pluſieurs valeurs de x pour la plus grande ou la moindre y, ordinairement la courbe a pluſieurs y plus grandes ou moindres, ou les unes moindres, & les autres plus grandes; ce qu'il faut auſſi remarquer quand on cherche les plus grandes ou les moindres x. On pourra les connoître par la troiſiéme remarque ſuivante.

II.

*378. On remarquera auſſi que $\frac{0}{ax}$ eſt la même choſe que dy infiniment petite par raport à dx, ou $dy = 0$; & $\frac{dy}{0}$ eſt la même choſe que dy infinie par raport à dx, ou dy égale à l'infini.

III.

*379. Enfin ſi l'on fait attention aux points de la plus grande &

de la moindre y, auſquels la tangente eſt parallele aux x; on verra que y n'y reçoit aucun accroiſſement ni diminution, & qu'ainſi dy eſt zero à ces points : & qu'il en eſt de même de dx, qui devient zero aux points de la plus grande & de la moindre x, auſquels la tangente eſt parallele aux y, x ne recevant à ces points là ni accroiſſement ni diminution, & où par conſequent dy eſt infinie par raport à dx, n'étant plus bornée par la petite baſe du, & en etant détachée en ce point là : Mais que ſi dx & dy devenoient chacune zero, ou avoient un raport fini, il n'y auroit ni *plus grande* ni *moindre*.

III.

Des points d'inflexion & de rebrouſſement des courbes, & des formules pour les trouver.

560. IL y a des courbes qui tournent d'abord leur concavité d'un côté, & qui tournent enſuite leur convexité du même côté comme $ACcf$, $Ccf\varkappa\varphi$. Le point ou la partie infiniment petite Cc (fig. 44), & $f\chi$ (fig. 45), qui ſépare la partie concave de la convexe, & qui eſt commune à l'une & à l'autre, s'appelle *le point d'inflexion* quand la courbe va toujours du même côté; & *le point de rebrouſſement* quand la courbe retourne ou rebrouſſe ſon chemin comme Ccm (fig. 44). Fig. XLIV. & XLV.

Pour trouver ces points des courbes qui en ont, il faut remarquer qu'en prenant les dx conſtantes, c'eſt-à-dire égales, les dy vont en diminuant dans la partie concave, & en augmentant dans la partie convexe, ou bien au contraire : car $dc\,(dy)$ ſurpaſſe ef qui eſt le dy ſuivant, puiſqu'en ſuppoſant $cd = ce$, c'eſt-à-dire les dx conſtantes, dc eſt égale à eg; ainſi dc ſurpaſſe ef. Dans la partie convexe ſuppoſant auſſi les dx conſtantes, $cd = ce$; les dy vont en augmentant, car $dc\,(dy) = eg$ moindre que ef; ou bien ſi l'on prenoit la partie concave en revenant vers l'origine, on verroit que les dy vont en augmentant, & que dans la partie convexe en revenant auſſi vers l'origine, les dy vont en diminuant. Ainſi quand une courbe a une partie concave & l'autre convexe, dans l'une les dy vont en augmentant, & dans l'autre en diminuant. Fig. XLII. Fig. XLIV.

D'où il ſuit que ſi l'on imagine que les dy, ou plutôt des lignes finies qui ayent entr'elles les mêmes raports que les dy, ſont des ordonnées miſes de ſuite ſur la ligne des coupées ABH, leurs extrêmités formeront une nouvelle courbe, Fig. XLIV.

dans laquelle il y aura *une plus grande* ou *une moindre* au point de la nouvelle courbe, par lequel passe l'ordonnée qui va au point d'inflexion ou de rebroussement de la premiere courbe ; ces ordonnées de la nouvelle & de la premiere courbe étant l'une sur l'autre : Il y a plusieurs plus grandes ou moindres, s'il se trouve dans la premiere courbe plusieurs points d'inflexion ou de rebroussement.

Il suit de là que pour trouver le point d'inflexion ou de rebroussement, il faut supposer la difference des dy, qui est
556. ddy, égale à zero, & ensuite à l'infini, * pour avoir la formule qui sert à trouver les points d'inflexion & de rebroussement.

Formules pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement
$ddy = 0$, & ddy *égal à l'infini, qu'on marque ainsi* $ddy = \infty$.

USAGE DE LA FORMULE.

561. POUR trouver le point d'inflexion ou celui de rebroussement d'une courbe dont on a l'équation, il faut d'abord prendre les differences des termes de l'équation proposée, & mettre dans un membre dy seule, & les autres quantités dans le second membre, & ce sera la seconde équation. Il faut ensuite prendre la difference du second membre de la seconde équation, en prenant dx constante, & la supposer égale à zero, puisque la seconde difference du premier membre qui devroit être ddy, est zero ; ce qui donnera une troisiéme équation, laquelle on réduira à n'avoir que la seule changeante finie x, par le moyen de la seconde équation, & se servant aussi de l'équation de la courbe ; & l'on trouvera la valeur de x dans cette derniere équation, qui sera la valeur de la coupée x au point d'inflexion ou de rebroussement ; & l'on trouvera la valeur de y au même point, en substituant la valeur trouvée de x dans l'équation de la courbe.

Par exemple pour trouver le point d'inflexion ou de rebroussement de la courbe dont l'équation est $axx = xxy + aay$; 1°. on prendra les differences de l'équation proposée, & mettant dy au premier membre, on aura la seconde équation $dy = \frac{2axdx - 2xydx}{xx + aa} = \overline{2axdx - 2xydx} \times \overline{xx + aa}^{-1}$. 2°. On prendra la difference du second membre de cette seconde équation, en supposant dx constante ; on la supposera égale à

zero, & l'on aura la 3e équation $\overline{2adx^2 - 2ydx^2 - 2xdxdy} \times \overline{xx+aa}^{-1} - 2xdx \times \overline{2axdx - 2xydx} \times \overline{xx+aa}^{-2} = 0$.

3°. On ſubſtituera dans cette troiſiéme équation la valeur de dy priſe de la ſeconde, & la valeur de y priſe de l'équation de la courbe, & l'on trouvera $2a^3 - 6a^3xx = 0$; d'où l'on tire $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; mettant cette valeur dans l'équation de la courbe à la place de x, on trouve $y = \frac{1}{4}a$; ainſi ſuppoſant la droite des x, & prenant ſur cette droite une longueur $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & élevant une perpendiculaire $y = \frac{1}{4}a$, ſon extrêmité ſe trouvera au point d'inflexion de la courbe.

On auroit abregé le calcul en diſpoſant ainſi l'équation de la courbe, $y = \frac{axx}{xx+aa}$, ou $y = axx \times \overline{xx+aa}^{-1}$. On ne l'a pas fait, pour faire connoître aux Lecteurs qui commencent, la maniere d'operer ſans ſéparer ainſi d'abord les y.

REMARQUE.

SI l'on n'avoit pas trouvé de valeur de x en ſuppoſant la valeur de $ddy = 0$, on auroit ſuppoſé $ddy = \infty$; c'eſt-à-dire, on auroit ſuppoſé = à zero le dénominateur de la fraction $= ddy$, au lieu qu'on en a ſuppoſé le numerateur égal à zero, en ſe ſervant de la formule $ddy = 0$.

La maniere de trouver les points d'inflexion & de rebrouſſement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même point.

62. SI l'on prend dans la partie concave Ccf, les petites parties égales Cc, cf, qui ſont les du, & dans la convexe $\chi\varkappa$, $\varkappa\varphi$, égales aux premieres, & après avoir prolongé la petite partie Cc en i, & $\chi\varkappa$ en ι, on tire des centres c, $\varkappa$, avec les rayons cf, $\varkappa\varphi$, les petits arcs fi, $\varphi\iota$; & du centre B, les petits arcs Cd, ce; $\chi\delta$, $\varkappa\varepsilon$; les petits arcs fi dans la partie concave qui meſurent les petits angles icf, ſont au delà de la courbe par raport au point B; & les petits arcs $\varphi\iota$ dans la partie convexe, ſont en deçà dans la partie convexe; ainſi les prenant poſitifs dans l'une des parties concave ou convexe, ils ſont négatifs dans l'autre; par conſequent ces petits arcs doivent devenir zero ou infinis * au point d'inflexion ou de rebrouſſement; où ils deviennent de poſitifs, négatifs; ou de négatifs, poſitifs. C'eſt pourquoi en ſuppoſant la valeur changeante de ce petit arc fi égale à zero ou à

FIG. XLV.

* 554.

l'infini, on aura dans l'équation que fera trouver cette ſuppoſition la valeur determinée de la changeante BC, Bc, qui eſt l'ordonnée changeante de la courbe propoſée; & après l'avoir trouvée, en traçant du centre B avec la longueur trouvée de la changeante BC, un arc, il coupera la courbe au point d'inflexion ou de rebrouſſement.

FIG. XLV. Pour trouver la formule qui convient à ce cas, on menera la ligne cl, $\varkappa\lambda$, qui faſſe avec la tangente ci, $\varkappa\iota$, qui eſt la petite partie Cc, $\chi\varkappa$ prolongée, l'angle icl, $\iota\varkappa\lambda$, le premier égal à l'angle cBf, le ſecond à l'angle $\varkappa B\varphi$; & par le point n, ν, ou cl, $\varkappa\lambda$ rencontre le petit arc fi, $\varphi\iota$, on tirera np, $\nu\pi$; la premiere parallele à fe, la ſeconde à $\varphi\varepsilon$; & nm, $\nu\mu$; la premiere parallele à ce, la ſeconde à $\varkappa\varepsilon$. Après cela on aura l'angle lce égal à l'angle Ccd; & l'angle $\lambda\varkappa\varepsilon = \chi\varkappa\delta$. Car les angles cle, Ccd, étant les exterieurs, le premier des angles cgl, lcg; le ſecond des angles Bgc qui eſt le même que cgl, & cBf égal par la conſtruction à lcg, ſont égaux; par conſequent les triangles Cdc, cel, rectangles en d & en e, ſont ſemblables. Et comme le triangle cnp eſt ſemblable au triangle cle, il eſt auſſi ſemblable au triangle Cdc, & il lui eſt égal, puiſque les hypotenuſes cn, Cc ſont égales par la ſuppoſition des du conſtantes. De plus le petit triangle mnf, rectangle en m, eſt auſſi ſemblable au triangle cnp; car ôtant des angles droits pnm, cnf, l'angle commun pnf, les deux angles aigus fnm, cnp qui reſteront ſeront égaux. On prouvera de même dans la partie convexe, que les triangles $\chi\varkappa\delta$, $\varkappa\nu\pi$, $\mu\nu\varphi$, ſont ſemblables, & que les deux premiers ſont de plus égaux. Ces choſes ſuppoſées, on trouvera ainſi l'arc fi, $\varphi\iota$.

Nommant la changeante $BC\,(y)$, Cd, ce, $\chi\delta$, $\varkappa\varepsilon\,(dx)$, qui vont en augmentant dans la partie concave, & en diminuant dans la convexe; Cc, cf, $\chi\varkappa$, $\varkappa\varphi\,(du)$, on les ſuppoſe conſtantes, c'eſt à-dire egales; dc, ef, $\delta\varkappa$, $\varepsilon\varphi$ ſeront les dy, qui vont en diminuant dans la partie concave, & en augmentant dans la convexe dans la ſuppoſition des du conſtantes; $pe = nm$, $\pi\varepsilon = \nu\mu$ ſeront les ddx poſitifs dans la partie concave, & négatifs dans la convexe; fm, $\varphi\mu$ ſeront les ddy négatifs dans la partie concave, & poſitifs dans la convexe. Les triangles ſemblables Cdc, cpn, fmn, donnent Cd ou $cp\,(dx)$. Cc ou $cn\,(du) :: fm\,(-ddy)$. $fn = \frac{-dudy}{dx}$; ou bien encore

encore dc ou $pn(dy).\ cn(du) :: nm(+ddx).\ fn = \frac{dudx}{dy}$; on trouvera de même le petit arc $\varphi\nu = \frac{dudy}{dx}$, & encore $\varphi\nu = \frac{-dudx}{dy}$. Les petits secteurs semblables Bce, nci, donneront aussi $Bc(y).\ ce(dx) :: cn(du).\ ni = \frac{dxdu}{y} = \nu\iota$; par conséquent le petit arc $fi = ni + nf = \frac{dudx^2 - ydudy}{ydx}$, ou bien encore $fi = \frac{dudxdy + ydudx}{ydy}$; & $\varphi\iota = \varphi\nu - \nu\iota = \frac{ydudy - dudx^2}{ydx}$; ou bien encore $\varphi\iota = \frac{-dudxdy - ydudx}{ydy}$.

Formules pour trouver le point d'inflexion ou de rebroussement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même centre ou pole.

563. IL faut supposer l'expression du petit arc changeant fi égale à zero ou à l'infini, & l'on aura pour la formule, après avoir multiplié par ydx & divisé par du, $dx^2 - yddy = 0$, & $dx^2 - yddy = \infty$; ou bien encore $dxdy + yddx = 0$ ou $= \infty$. On pourroit aussi prendre la valeur de $\varphi\iota$ pour en faire la formule.

USAGE DES FORMULES.

IL faut trouver pour chaque courbe dont on voudra chercher le point d'inflexion, par le moyen de son équation, la valeur de dx & celle de dx^2, & après avoir trouvé la valeur de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, il faut en prendre la difference qui sera égale à ddu, & la supposer égale à zero, à cause qu'on a supposé du constante, & par conséquent $ddu = 0$; on trouvera par l'équation que donnera cette supposition, la valeur de ddy; il faudra la multiplier par $-y$; & après avoir substitué les valeurs de dx^2 & de $-yddy$ dans la formule $dx^2 - yddy = 0$ ou $= \infty$, il faudra supposer la quantité qu'on trouvera par cette substitution, égale à zero, & ensuite à l'infini, & l'on aura l'équation qui contiendra la valeur déterminée de la changeante $BC(y)$ qui convient au point d'inflexion ou de rebroussement de la courbe proposée. On peut de même se servir de la seconde formule.

Par exemple φhH est un arc de circonference dont le rayon $B\varphi$, $BH = a$; on nommera l'arc $\varphi hH(z)$; $\varphi\kappa\chi fcC$ est une courbe telle que nommant $B\chi$, $B\kappa(y)$, & par conséquent $\chi H(a - y)$, & une droite donnée, b, l'équation de cette courbe soit $bz = yy - 2ay + aa$. Pour trouver le point d'inflexion, qu'on suppose être en χ, on menera le FIG. XLV.

rayon Bxh infiniment proche du rayon $B\chi H$, & on tirera du centre B le petit arc $\chi\delta$, qu'on nommera dx; δx sera dy, & Hh sera dz. Pour trouver la valeur de $\chi\delta\,(dx)$, on aura par le moyen des deux secteurs ou triangles semblables HBh, $\chi B\delta$; $BH\,(a).\ B\chi\,(y)::Hh\,(dz).\ \chi\delta\,(dx)=\frac{ydz}{a}$. En prenant la difference de l'équation de la courbe, on aura $dz=\frac{2ydy-2ady}{b}$; par consequent $dx=\frac{2yydy-2aydy}{ab}$; & $dx^2=\frac{4y^4-8ay^3+4aayy}{aabb}\,dy^2$, & $du=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{dy}{ab}\sqrt{4y^4-8ay^3+4aayy+aabb}$; on en prendra la difference $ddu=0=\frac{ddy}{ab}\sqrt{4y^4-8ay^3+4aayy+aabb}+\frac{8y^3-12ayy+4aay}{\sqrt{4y^4-8ay^3+4aayy+aabb}}\times\frac{dy^2}{ab}$ Après avoir réduit les deux termes au même dénominateur, on la supposera égale à zero, & l'on prendra la valeur de ddy, qu'on multipliera par $-y$ pour avoir la valeur de $-yddy$. On substituera ensuite les valeurs de dx^2 & de $-yddy$ qu'on a trouvées, dans la formule $dx^2-yddy=0$; & après les avoir réduites au même dénominateur, on les supposera égales à zero; ce qui donnera une équation qui n'aura plus de differences, & qui étant divisée par $y-a$, donnera $4y^5-12ay^4+12aay^3-4a^3yy+3aabby-2a^3bb=0$, qui est l'équation qui contient la valeur de BC ou $B\chi\,(y)$ au point d'inflexion de la courbe proposée.

REMARQUES.

I.

564. POUR trouver les formules du point d'inflexion ou de rebroussement dans les courbes dont les ordonnées partent d'un même point, par le moyen des angles infiniment petits qu'on conçoit formés à chaque point de la courbe par les tangentes des points pris deux à deux infiniment proches, ou par deux parties voisines infiniment petites, lesquels angles étant pris pour positifs dans l'une des deux parties concave ou convexe de la courbe, ils sont négatifs dans l'autre; on a pris les petites parties de la courbe; c'est-à-dire les du, égales ou constantes, afin que les petits arcs qui sont les mesures de ces angles infiniment petits, eussent les mêmes rayons, & que l'on vît plus clairement leurs raports.

II.

565. Les Problêmes que l'on résout par les formules qu'on a

données depuis le commencement de cette section, servent quand on a l'équation d'une courbe, à se former une idée de la courbe, & à la tracer à peu près telle qu'elle doit être; car on trouve par les formules des tangentes de quel côté elle est concave ou convexe; par celles des plus grandes & des moindres, on trouve si elle s'eloigne de son axe ou de son diametre, ou si elle s'en approche, & en quels endroits cela arrive; & par les formules des points d'inflexion & de rebroussement, on trouve si de concave elle ne devient point convexe, ou au contraire; comme aussi si elle ne rebrousse point son chemin vers le côté de son origine.

III.

566. Il faut bien remarquer ici que quand on a fait l'une des trois quantités du, dx, dy constante, pour trouver la formule de quelque Problême; il faut en appliquant la formule aux équations particulieres, prendre pour constante la valeur de la difference qu'on a fait constante tirée de l'équation particuliere, & non pas une autre; autrement on ne trouveroit pas la résolution que l'on cherche, qui est fondée sur cette supposition.

IV.

567. On peut déduire des formules de ce second cas, les formules du premier cas dans lequel les ordonnées sont paralleles; car en supposant le rayon changeant BC (y) infini, alors les ordonnées BC, Bc deviennent paralleles; or en supposant y infini, le terme dx^2 de la formule $dx^2 - yddy = 0$, devient zero par raport à l'autre terme $-yddy$; & en divisant par $-y$, on aura $ddy = 0$, ou $= \infty$, pour la formule du premier cas, qui est aussi celle qu'on a trouvée.

V.

Comme les formules des dévelopées se déduisent aisément de ce que l'on a démontré pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement, & qu'elles sont très-utiles à la résolution de plusieurs Problêmes, on va aussi les démontrer.

VI.

Des formules pour trouver les dévelopées des courbes.

568. On a déja vû que les rayons de la dévelopée d'une courbe sont tous perpendiculaires à la courbe * dont elle est la dévelopée, & qu'ils sont les tangentes de la dévelopée; de maniere * 507.

que chaque rayon de la développée eſt exactement la partie de la tangente depuis le point touchant de la développée qui convient à ce rayon, juſqu'au point de la courbe à laquelle ce rayon eſt perpendiculaire. D'où il ſuit que quand on a une courbe pour trouver tous les points de la courbe qui eſt ſa développée, il ne faut que trouver l'expreſſion changeante du rayon de la développée. Or l'on a trouvé des formules generales pour découvrir cette expreſſion du rayon de la développée de toute courbe donnée; on va expliquer la maniere dont on peut trouver ces formules.

569. FIG. XLV. *C cf* eſt une courbe quelconque dont les ordonnées *BC*, qu'on nommera (*y*), partent d'un même point, & qui repréſentera auſſi toutes les courbes dont les ordonnées ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires à leurs coupées, en ſuppoſant *BC* (*y*) infinie. Qu'on prenne une partie *cf* infiniment petite de cette courbe, qu'on nommera *du*; qu'on conçoive auſſi *ce* (*dx*), *ef* (*dy*), & toutes les autres lignes comme on les a expliquées ci deſſus; * & de plus qu'on conçoive *cD*, *fD* qui ſoient toutes deux perpendiculaires à la courbe aux extrêmités *c*, *f* de la petite partie *cf*; ces deux perpendiculaires iront ſe couper à un point *D*, qui ſera un des points de la développée; il faut chercher une formule pour exprimer la longueur *cD* du rayon de la développée, qu'on nommera *z*. Pour la trouver, on remarquera que le ſecteur ou triangle *cDf*, rectangle en *f* par la ſuppoſition, eſt ſemblable au petit ſecteur ou triangle *fci* rectangle en *i*; car l'angle *Dcf* faiſant un angle droit tant avec l'angle *cDf*, qu'avec l'angle *fci*, ces deux derniers ſont égaux. On aura donc cette proportion le petit arc *fi* ($* \frac{dudx^2 - ydudd y}{ydx}$). *ci* (*du*) :: *cf* (*du*). *cD* (*z*) = $\frac{ydudx}{dx^2 - yddy}$; & mettant au lieu de *du* ſa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on aura pour la formule du rayon de la développée qui ſuppoſe *du* conſtante, 1. $z = \frac{ydx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^2 - yddy}$. En ſe ſervant de la ſeconde valeur de l'arc *fi*, qui ſuppoſe de même *du* conſtante, on aura encore *fi* ($* \frac{dudxdy + yduddx}{ydy}$). *ci* (*du*) :: *cf* (*du*). *cD* (*z*) = $\frac{ydudy}{dxdy + yddx}$, qui devient en mettant pour *du* ſa valeur, 2. $z = \frac{ydy\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dxdy + yddx}$.

* 562.

* 562, *vers la fin.*

* 562, *vers la fin.*

570. En ſuppoſant *y* infinie, l'on aura pour les formules du rayon de la développée dans la ſuppoſition des *du* conſtantes dans

les courbes dont les ordonnées y ſont paralleles entr'elles & perpendiculaires aux coupées x, 1. $z = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{-ddy}$; 2. $z = \frac{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}{ddx}$.

571. Si l'on ſuppoſe dx conſtante, c'eſt-à-dire Cd, ce égales, on trouvera d'autres formules de cette maniere. On a déja prouvé * que le petit angle gcl étant ſuppoſé égal à l'angle cBf, le triangle lce eſt ſemblable au triangle Ccd, & égal, à cauſe de $Cd = ce$; ainſi fl eſt $= -ddy$, & nl eſt $= -ddu$, parceque les dx étant conſtantes, les dy & les du vont en diminuant; le petit triangle lfn rectangle en n, eſt ſemblable au triangle lce rectangle en e, ayant l'angle nlf commun; on aura donc $cl\,(du).\,ce\,(dx) :: fl\,(-ddy).\,fn = \frac{-dxddy}{du}$; on aura encore $el\,(dy).\,ce\,(dx) :: nl\,(-ddu).\,fn = \frac{-dxddu}{dy}$. Les deux ſecteurs ou triangles ſemblables par la ſuppoſition cBf, icn, donneront auſſi $Bc\,(y).\,ce\,(dx) :: ci\,(du).\,in = \frac{dudx}{y}$; par conſequent $fi = in + fn = \frac{du^2dx - ydxddy}{ydu}$, & encore $fi = in + fn = \frac{dudxdy - ydxddu}{ydy}$. Les ſecteurs ou triangles ſemblables icf, cDf, donneront $fi\,(\frac{du^2dx - ydxddy}{ydu}).\,ci\,(du) :: cf\,(du).\,cD\,(z) = \frac{ydu^3}{du^2dx - ydxddy}$; & en mettant pour du^3 ſa valeur, on aura la premiere formule, 1. $z = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^3+dxdy^2-ydxddy} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$. Les mêmes triangles donneront encore $fi\,(\frac{dudxdy - ydxddu}{ydy}).\,ci\,(du) :: cf\,(du).\,cD\,(z) = \frac{ydu^2dy}{dudxdy - ydxddu}$, où mettant les valeurs de du, du^2, l'on aura pour la ſeconde formule, 2. $z = \frac{ydx^2dy + ydy^3}{dxdy\sqrt{dx^2+dy^2} - ydxddu}$.

* 562.

572. En ſuppoſant y infinie, on aura les formules pour le rayon de la développée des courbes, dont les ordonnées y ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires aux coupées x, dans la ſuppoſition des dx conſtantes; la 1re $z = \frac{dx^2+dy^2}{-dxddy} \times \sqrt{dx^2+dy^2}$; la 2e $z = \frac{dx^2dy+dy^3}{-dxddu}$.

573. Enfin ſi l'on ſuppoſe dy conſtante, il faut tirer fs parallele à ce, qui rencontre cl en s, & mener sr parallele à fc, & les triangles cCd rectangle en d, csr rectangle en r, ſeront ſemblables & égaux par la ſuppoſition de $dc\,(dy) = rs = ef\,(dy)$; par conſequent $re = sf = ddx$, & $sn = ddu$, l'une & l'autre poſitives, les dx & du augmentant dans la ſuppoſition des dy conſtantes; & de plus les triangles csr, cle, & nsf rectangles en r, en e, & en n, ſont ſemblables à cauſe des paralleles.

On aura donc $cl(du).el(dy) :: sf(ddx).fn = \frac{dyddx}{du}$; on aura encore $ce(dx).el(dy) :: sn(ddu).fn = \frac{dyddu}{dx}$ On ſçait par les cas précedens que $in = \frac{dudx}{y}$; par conſequent $fi = in + nf = \frac{du^2dx+ydydddx}{ydu}$; & encore $fi = in + nf = \frac{dudx^2+ydyddu}{ydx}$. A preſent les triangles ſemblables icf, cDf, donnent $fi\ (\frac{du^2dx+ydydddx}{ydu})\ ci\ (du) :: cf(du).cD(z) = \frac{ydu^3}{du^2dx+ydydddx}$, où mettant les valeurs de du^2, du^3, on aura la premiere formule, 1re $z = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3+dxdy^2+ydydddx}$. Les mêmes triangles ſemblables donnent encore $fi\ (\frac{dudx^2+ydydddu}{ydx})$. $ci(du) :: cf(du).cD(z) = \frac{ydu^2dx}{dudx^2+ydydddu}$, où mettant les valeurs de du, du^2, l'on aura la ſeconde formule, 2e $z = \frac{ydx^3+ydxdy^2}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}+ydydddu}$.

574. En ſuppoſant y infinie, on aura les formules pour le rayon de la dévelopée des courbes dont les y ſont paralleles entre elles, & perpendiculaires aux coupées x, dans la ſuppoſition des dy conſtantes, qui ſont la 1re $z = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}}{dydddx}$; la 2e $z = \frac{dx^3+dxdy^2}{dydddu}$.

Uſage de ces formules.

575. IL faut prendre dans l'équation de chaque courbe dont on voudra trouver le rayon de la dévelopée, les valeurs des differences premieres & ſecondes marquées dans celle des formules dont on aura fait le choix, en ſuppoſant pour avoir les ſecondes differences, celle des trois differences premieres du, dx, dy, pour conſtante, qui a été ſuppoſée conſtante dans la formule qu'on aura choiſie ; & l'on trouvera en ſubſtituant ces valeurs dans cette formule, une quantité délivrée de toutes les differences qui fera connoître le rayon $cD(z)$ de la dévelopée.

576. Pour trouver, par exemple, le rayon $cD(z)$ de la dévelopée de la courbe $ACcf$, qu'on ſuppoſe être une parabole dont l'axe eſt AB, chaque coupée $Ab = x$, chaque ordonnée $bc = y$, le parametre $= p$, & dont l'équation eſt $px = yy$; il faut choiſir laquelle on voudra des ſix formules qu'on a données pour les courbes dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux coupées, par exemple $\frac{dx^2+dy^2}{-dxdyy}\times\sqrt{dx^2+dy^2}$, où dx eſt ſuppoſée conſtante, & trouver enſuite par le moyen de

FIGURE XLII.

l'équation à la parabole $px = yy$, les valeurs en y de dx, dx^2, dy^2, & $-ddy$, en ſuppoſant dx conſtante, & les ſubſtituer dans la formule. On trouvera, en prenant les differences de l'équation de la parabole, $dx = \frac{2ydy}{p}$; & en ſuppoſant dx conſtante, $o = \frac{2dy^2 + 2yddy}{p}$, d'où l'on déduira $-ddy = \frac{dy^2}{y}$; & en quarrant $dx = \frac{2ydy}{p}$, on aura $dx^2 = \frac{4yy}{pp}dy^2$; par conſequent $dx^2 + dy^2 = \frac{4yy+pp}{pp}dy^2$, & $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy}{p}\sqrt{4yy+pp}$. On mettra dans la formule les valeurs de dx, dx^2, $-ddy$, & l'on aura $cD = z = \frac{dx^2+dy^2 \times \sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy} = \frac{\overline{4yy+pp} \times \frac{dy^3}{p^3} \times \sqrt{4yy+pp}}{\frac{2dy^3}{p}}$ $= \frac{4yy+pp}{2pp} \times \sqrt{4yy+pp}$ C'eſt la valeur indéterminée du rayon de la dévelopée, qui convient à chaque point de la parabole. Et ſi l'on veut trouver pour chaque point particulier de la parabole, le point de la dévelopée qui y répond, y étant déterminée pour chacun des points de la parabole, il faudra mettre cette valeur de y dans le rayon qu'on vient de trouver, & il ne contiendra que des connues; mener par ce point de la parabole la perpendiculaire à ce point-là, c'eſt-à-dire à la tangente de la parabole en ce point-là, & lui donner la longueur déterminée du rayon, & ſon extrêmité ſera le point correſpondant de la dévelopée.

77. Si l'on veut trouver la longueur du rayon de la dévelopée pour le ſommet A où $y = o$; il n'y a qu'à ſuppoſer $y = o$ dans la valeur indéterminée du rayon qui convient à chaque point de la parabole, & elle deviendra $\frac{1}{2}p$ pour le rayon du point A qui eſt le ſommet; & comme l'axe AB eſt perpendiculaire au ſommet A de la parabole, en prenant ſur AB une longueur $= \frac{1}{2}p$, l'on aura ſur l'axe le point de la dévelopée qui correſpond au ſommet A.

78. Si l'on veut trouver l'équation de la dévelopée, on menera du point D la perpendiculaire DV à l'axe AB, & la prenant pour une des ordonnées de la dévelopée qui paſſe par tous les points D, on ſuppoſera $DV = t$; on prendra AV, qu'on nommera u, pour la ligne des coupées; & il faudra trouver une équation dont les changeantes ſoient u & t de cette maniere $AP = * \frac{xdx+ydy}{dx}$, où ſubſtituant les valeurs de x, dx, dy, on trouvera $AP = \frac{yy}{p} + \frac{1}{2}p$. $bP = * \frac{ydy}{dx}$; * 550. * 550.

& en ſubſtituant les valeurs de dx, dy, on trouvera $bP = \frac{1}{2}p$.

* 550. $cP = {}^{*}\frac{y}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2}$, & en ſubſtituant les valeurs de dx, dx^2, dy^2, on trouvera $cP = \frac{1}{2}\sqrt{4yy+pp}$; par conſequent $PD = cD - cP = \frac{2yy}{pp}\sqrt{4yy+pp}$. L'on aura enſuite, à cauſe des triangles ſemblables, Pcb, PDV, $cP\,(\frac{1}{2}\sqrt{4yy+pp})\,.\,cb\,(y) :: PD\,(\frac{2yy}{pp}\sqrt{4yy+pp})\,.$ à $DV\,(t) = \frac{4y^3}{pp}$. On aura auſſi $cb\,(y)\,.\,bP\,(\frac{1}{2}p) :: DV\,(t = \frac{4y^3}{pp})\,.\,PV = \frac{2yy}{p}$. Par conſequent $AV\,(u) = AP + PV = \frac{3yy}{p} + \frac{1}{2}p$. Ayant les valeurs de u & de t en y, il eſt facile de trouver l'équation de la dévelopée qui ne contienne pas d'autres changeantes que u & t; & le calcul étant plus court en mettant au lieu de y ſa valeur $y = \sqrt{px}$, on aura $u = 3x + \frac{1}{2}p$, & $u - \frac{1}{2}p = 3x$, (qu'on ſuppoſera pour abreger) $= s$; ainſi $x = \frac{1}{3}s$. Mettant dans $t = \frac{4y^3}{pp}$, la valeur de y en x, on aura $t = \frac{4x}{p}\sqrt{px}$; où ſubſtituant la valeur de x en s, on aura $t = \frac{4s}{3p}\sqrt{\frac{1}{3}ps}$, qui ſe réduit à $\frac{27pt^2}{16} = s^3$, qui eſt l'équation de la dévelopée de la parabole, d'où l'on voit que cette dévelopée eſt la ſeconde parabole cubique, dont le parametre $\frac{27}{16}p$ eſt $\frac{27}{16}$ du parametre p de la parabole donnée; l'axe $s = u - \frac{1}{2}p$ ſe prend ſur l'axe AB, & le ſommet eſt éloigné du ſommet A de $\frac{1}{2}p$.

On trouvera de la même maniere les équations des dévelopées des courbes données.

REMARQUES.

I.

579. QUAND une courbe eſt la dévelopée d'une courbe geometrique, il eſt évident qu'on peut trouver une ligne droite connue égale au rayon de la dévelopée pour chacun des points de la dévelopée; & comme le rayon d'un point de la dévelopée eſt égal à la partie de la courbe dévelopée, qui eſt depuis le point de cette courbe où commence le développement, juſqu'au point du rayon, en y ajoutant dans quelques dévelopées une droite connue, (ce que l'on peut connoître, comme on l'a vû ci-deſſus, par l'équation de la dévelopée, & même par l'expreſſion du rayon de cette dévelopée); il eſt clair que l'on peut trouver la longueur de la dévelopée, ce que l'on appelle *la rectification* de la courbe; c'eſt-à-dire, on peut trouver une droite égale à la longueur de

de la dévelopée & de chacune de ſes parties ; d'où l'on voit par l'exemple précedent, que la ſeconde parabole cubique peut être *rectifiée*.

II.

80. On a déduit les ſix formules du rayon de la dévelopée des courbes dont les ordonnées ſont perpendiculaires aux coupées, des formules des courbes dont les ordonnées partent d'un même point, pour être court ; mais on en a mis ſix pour chacun de ces cas, ſelon les trois ſuppoſitions qu'on peut faire de l'une des trois differences du, dx, dy, conſtante ; parcequ'il y a des cas où le calcul eſt plus facile dans l'une de ces ſuppoſitions que dans les autres ; ce que l'on diſtinguera facilement dans la pratique.

III.

81. On auroit pû faire des formules pour les courbes qui tournent leur convexité vers l'axe ou vers le pole des ordonnées ; mais comme l'on trouve le même rayon avec les formules que l'on a données pour le côté de la concavité, avec cette ſeule difference qu'il eſt négatif, il auroit été inutile de les mettre ici : on remarquera ſeulement que dans les courbes qui ont un point d'inflexion ou de rebrouſſement, c'eſt-à-dire, dont une partie eſt concave vers l'axe ou vers le pole des ordonnées, & l'autre convexe, les rayons de la dévelopée ſont poſitifs dans la partie concave, & négatifs dans l'autre, (ce qui eſt viſible même par les figures 42, 44, 45 ; où deux rayons infiniment proches vont ſe rencontrer au point de la dévelopée D, qui eſt d'un côté dans la partie concave, & du côté oppoſé dans la convexe), & le point d'inflexion ou de rebrouſſement eſt celui où ſe fait le changement de poſitifs en négatifs ; c'eſt pourquoi * il faut que le rayon de la dévelopée ſoit infini ou zero au point d'inflexion ou de rebrouſſement. *554.

IV.

Tous les Problêmes qui ſe reſolvent par les formules qu'on a données depuis le commencement de cette ſection, n'ont beſoin que du ſeul calcul differentiel. La réſolution des ſuivans ſe commence par le calcul differentiel, qui donne l'équation du Problême, & elle s'acheve ordinairement par le calcul integral.

SECTION III.

Où l'on fait découvrir les formules des principaux Problêmes dont la réſolution commence par le calcul differentiel, & s'acheve par le calcul integral.

I. *La formule pour la rectification des courbes.*

582. EN nommant u la courbe ou l'arc de la courbe dont on cherche la longueur, du marquera chaque partie infiniment petite de la courbe; & ſuppoſant dans les courbes dont les ordonnées, qu'on nommera y, ſont paralleles, qu'elles ſont auſſi perpendiculaires aux coupées x; & dans les courbes dont les ordonnées y partent d'un même point qu'en prenant les ordonnées infiniment proches de chaque petite partie du de la courbe, on tire du centre commun avec le rayon y un petit arc de cercle, qu'on nommera dx, juſqu'à l'ordonnée infiniment proche; il eſt évident que chaque petit triangle dont du eſt l'hypotenuſe, dx & dy les côtés, eſt toujours rectangle. Par conſequent *la formule generale de la rectification* des courbes eſt $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Fig. XLII. XLIV. XLV.

USAGE DE LA FORMULE.

583. POUR trouver la longueur d'une courbe ou d'une partie de cette courbe, il faut trouver par l'équation de la courbe la valeur de dy^2 en x, dx, dx^2; ou la valeur de dx^2 en y, dy, dy^2; & ſubſtituer l'une ou l'autre de ces valeurs dans la formule, & alors $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſera changée en une quantité qui n'aura qu'une ſeule inconnue avec ſes differences qui ſera égale à du. Ce ſera l'équation que l'on cherchoit par la formule pour la rectification de la courbe; il ne reſtera plus qu'à en trouver l'integrale; ce que l'on enſeignera dans la Partie ſuivante.

584. Pour trouver, par exemple, la longueur de la 1e parabole cubique, dont l'équation eſt $x^3 = pyy$; on prendra d'abord les differences de l'équation, & l'on aura $3xxdx = 2pydy$, ce qui donne $dy = \frac{3xx}{2py}dx$, & $dy^2 = \frac{2x^4}{4ppyy}dx^2$; où ſubſtituant au lieu de pyy ſa valeur x^3, on aura $dy^2 = \frac{2x}{4p}dx^2$. On ſubſti-

tuera cette valeur de dy^2 dans la formule generale, & l'on aura $du = \frac{dx}{2} \times \frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$. C'eſt l'équation que l'on cherchoit; il ne faut plus que trouver les integrales de chaque membre, qu'on verra dans la troiſiéme Partie être $u = \frac{1}{27\sqrt{p}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8p}{27}$. C'eſt la longueur de telle partie de la 2e parabole cubique qu'on voudra, en déterminant la valeur de la coupée x de cette partie, & la ſubſtituant au lieu de x dans cette équation.

DE'FINITION.

585. L'EXPRESSION $\frac{dx}{2} \times \frac{\sqrt{4p+9x}}{\sqrt{p}}$ de chaque partie infiniment petite d'une courbe particuliere dans cet exemple, de la 2e parabole cubique, tirée de l'équation de cette courbe, & qui ne contient qu'une ſeule des changeantes de cette courbe avec les differences de cette même changeante, s'appelle *l'élement* de cette courbe; la ſomme des élemens de la courbe, qui eſt l'integrale de l'element, fait la courbe entiere: Pour marquer cette ſomme ou cette integrale par l'expreſſion de l'élement, on met au-devant la lettre S. ainſi S. $\frac{dx}{2\sqrt{p}} \times \sqrt{4p+9x}$, marque l'integrale de cet element.

Il faudra entendre la même choſe dans les formules ſuivantes de l'aire des courbes, des ſurfaces courbes, & de la ſolidité des corps formés par la révolution des courbes autour d'une ligne droite.

Element de l'ellipſe.

586. SUPPOSANT que le grand axe Aa ſoit $= 2a$; ſon parametre $= p$; que les coupées KB, Kb, Kb, &c. ſont $= x$, les ordonnées BC, bc, bc, &c. $= y$, & que l'équation de l'ellipſe eſt $\frac{2a}{p} yy = aa - xx$; ce qui donne $2ayy = aap - pxx$; en prenant les differences on trouvera $\frac{2a}{p} ydy = -xdx$; d'où l'on aura Ce, $xe\,(dy) = -\frac{pxdx}{2ay}$, & $dy^2 = \frac{ppxx}{4aayy} dx^2 =$ (en mettant la valeur de $2ayy$) $\frac{pxx}{2aa-2axx} \times dx^2$. Subſtituant cette valeur de dy^2 dans la formule generale $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouvera Cc, $\chi x\,(du) = dx \sqrt{\frac{pxx - 2axx + 2aa}{2aa - 2axx}}$. C'eſt l'élement de l'ellipſe; quand $p = 2a$, $du = \frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$. FIGURE XLVI.

Element de l'hyperbole.

587. EN ſuppoſant les mêmes dénominations pour l'hyperbole par raport à ſon premier axe, $2KA = 2a$, & que l'équation eſt $\frac{2a}{p} yy = xx - aa$; on trouvera de la même maniere que $Cc\,(du) = dx\sqrt{\frac{pxx + 2axx - 2a^3}{2axx - 2a^3}}$; quand $p = 2a$, $du = dx\sqrt{\frac{2xx - aa}{xx - aa}}$. Mais par raport à ſon ſecond axe DKd, qu'on nommera $2b$; ſon parametre π, la coupée Kb priſe ſur le ſecond axe (x); l'ordonnée $bC\,(y)$ parallele au premier axe KA, l'équation ſera $\frac{2b}{\pi} yy = xx + bb$; & l'on trouvera de la même maniere $Cc\,(du) = dx\sqrt{\frac{\pi xx + 2bxx + 2b^3}{2bxx + 2b^3}}$; quand $\pi = 2b = 2a$ dans ce cas, $du = dx\sqrt{\frac{2xx + aa}{xx + aa}}$.

FIGURE XLVII.

Manieres particulieres de trouver l'élement des courbes.

1°. *L'élement d'un arc de cercle.*

588. EN nommant le rayon $CA\,(r)$ du cercle AFE, la coupée $AB\,(x)$, l'ordonnée $BF\,(y = \sqrt{2rx - xx}$*), menant l'ordonnée Gg infiniment proche de la premiere, & Fi parallele à AC, le triangle CBF rectangle en B ſera ſemblable au triangle iFg rectangle en i; car ôtant les deux angles droits BFi, CFg, l'angle commun CFi, les angles aigus reſtans BFC, iFg ſont égaux. On aura donc $BF\,(y = \sqrt{2rx - xx})$. $CF\,(r) :: Fi\,(dx)$. $Fg\,(du) = \frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. C'eſt l'élement d'une demi-circonference AFE, ou de tel arc AF qu'on voudra de la demi-circonference dont $AB\,(x)$ eſt le ſinus verſe: ainſi $u = \text{S.}\frac{rdx}{\sqrt{2rx - xx}} =$ à l'arc AF.

FIGURE XXXV. * 289.

589. Si l'on nomme la coupée $CB\,(x)$ en prenant l'origine au centre C, alors $BF = \sqrt{rr - xx}$*, & les mêmes triangles ſemblables donneront $BF\,(\sqrt{rr - xx})$. $CF\,(r) :: Fi\,(dx)$. $Fg\,(du) = \frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}}$. C'eſt l'élement du quart de circonference, ou de tel arc MF qu'on voudra moindre que le quart de la circonference dont la ligne $CB\,(x)$ eſt le ſinus droit: ainſi $u = \text{S.}\frac{rdx}{\sqrt{rr - xx}} =$ à l'arc MF.

* 289.

FIG. XLI. Si l'on imagine que FH eſt une partie infiniment petite de la demi-circonference $AHFE$, & qu'on tire les cordes AH, AF, EF, EH, on aura le petit triangle FLH, qu'on

peut regarder pendant le calcul comme rectangle en L, puisque l'angle exterieur $ELA = FLH$ ne differe du droit interieur LHA que de l'angle interieur FAH qui eſt ſuppoſé infiniment petit, & n'avoir aucun raport fini avec aucun angle d'une grandeur finie & donnée quelque petit qu'il puiſſe être. Or le petit triangle FLH eſt ſemblable au triangle AHE rectangle en H, car les angles aigus LHF, EAH ont pour meſure, le premier, la moitié de l'arc EF, le ſecond, la moitie de l'arc EFH, qui ne differe du premier que de l'arc infiniment petit FH; ainſi nommant le diametre AE $(2r)$, la corde AH (x), LF ſera dx, EH ſera $\sqrt{4rr - xx}$; & l'on aura $EH(\sqrt{4rr-xx}).\ AE(2r) :: LF(dx).\ HF = \frac{2rdx}{\sqrt{4rr-xx}}$. C'eſt encore l'élement de la demi-circonference AHE, & de tel arc AH qu'on voudra, dont $AH(x)$ ſera la corde; ainſi l'arc $AH(u) = \text{S}.\frac{2rdx}{\sqrt{4rr-xx}}$.

90. Enfin ſi l'on prend l'arc Rr infiniment petit, & que du centre O on mene les deux ſecantes ORN, Orn à la tangente enN, & qu'on tire du centre O avec le rayon On l'arc nq, en nommant le rayon $Oe(r)$, la tangente $eN(x)$, Nn ſera dx; la ſecante ON ſera $= \sqrt{rr+xx}$, ſa difference qN ſera $= \frac{xdx}{\sqrt{rr+xx}}$, & les triangles ſemblables OeN, Nqn, rectangles en e & en q, donneront $ON(\sqrt{rr+xx}).\ Oe(r) :: Nn(dx).\ qn = \frac{rdx}{\sqrt{rr+xx}}$; & les ſecteurs ſemblables ORr, onq donneront $On(\sqrt{rr+xx}).\ Or(r) :: qn(\frac{rdx}{\sqrt{rr+xx}}).\ Rr(du) = \frac{rrdx}{rr+xx}$. C'eſt encore l'élement du quart de circonference, ou de tel arc eR qu'on voudra moindre que le quart de la circonference dont $eN(x)$ ſera la tangente; ainſi $u = \text{S}.\frac{rrdx}{rr+xx}$ = à l'arc eR. Fig. XLI.

2°. *L'élement de la parabole.*

91. SUPPOSANT que ACc eſt une parabole dont l'axe eſt $AB(x)$, l'ordonnée $BC(y)$ le parametre (p), l'équation $yy = px$, la ſoutangente $BT = {}^{*}2x$, & par conſequent la tangente $CT = \sqrt{yy+4xx} =$ (en mettant pour yy ſa valeur px) $\sqrt{px+4xx}$. Les triangles ſemblables Cdc, CBT donneront $BT(2x).\ CT(\sqrt{px+4xx}) :: Cd(dx).\ Cc(du) = \frac{dx}{2x}\sqrt{px+4xx}$ = (en multipliant le numerateur & le dénominateur par *551. Fig. XLII.

$\sqrt{px+4xx}$, & diviſant par x) $= \frac{pdx+4xdx}{2\sqrt{px+4xx}}$. L'une & l'autre expreſſion eſt l'élement d'un arc de parabole dont la coupée eſt x.

3°. *L'élement des paraboles de tous les degrés, & des hyperboles de tous les degrés par raport aux aſymptotes.*

592. L'EQUATION $x^m = 1y$ repreſente les paraboles de tous les degrés quand l'expoſant m eſt un nombre poſitif entier ou rompu, & les hyperboles de tous les degres par raport aux aſymptotes quand l'expoſant m eſt négatif. On prend l'unité pour le parametre, afin d'abreger le calcul. On trouvera* que la ſoutangente eſt $= \frac{1}{m}x$, & que la tangente $= \sqrt{\frac{1}{mm}xx+yy}$ $=$ (en mettant x^{2m} au lieu de yy) $\frac{x}{m}\sqrt{1+mmx^{2m-2}}$. L'on aura donc (à cauſe des triangles ſemblables TBC, Cdc, $BT\ (\frac{1}{m}x)$ $.CT\ (\frac{1}{m}x\sqrt{1+m^2x^{2m-2}}) :: Cd\,(dx).\ Cc\,(du) = dx\sqrt{1+m^2x^{2m-2}}$. C'eſt l'élement de toutes les paraboles & hyperboles; il n'y aura qu'à ſubſtituer au lieu de m l'expoſant particulier de chacune de ces courbes; par exemple pour la ſeconde parabole cubique, $m = \frac{3}{2}$; l'équation $x^m = 1y$ ſera $x^3 = 1yy$, & $du = \frac{1}{2}dx\sqrt{4+9x}$. On peut changer par la multiplication l'expreſſion generale $du = dx\sqrt{1+m^2x^{2m-2}}$ en ces deux autres équivalentes $du = \frac{dx}{x}\sqrt{1xx+m^2x^{2m}}$; $du = \frac{1xxdx+m^2x^{2m}dx}{x\sqrt{1xx+m^2x^{2m}}}$.

* 550.

REMARQUE.

593. QUAND on peut trouver l'integrale de l'élement d'une courbe, cette courbe peut être rectifiée; mais on ne connoît pas encore la rectification de celles qui ont des élemens dont on n'a pas pu trouver les integrales; la circonference & les arcs de circonference, la parabole du premier genre, l'ellipſe & l'hyperbole ſont de la derniere ſorte, auſſi-bien qu'un très-grand nombre de courbes plus compoſées geometriques & méchaniques. Quand on ne peut pas trouver la rectification des courbes plus compoſées que les ſections coniques, on tâche de réduire leur rectification à celle des ſections coniques, de maniere que la rectification de ces dernieres étant ſuppoſée, on a la rectification de ces autres plus compoſées qu'on peut y réduire. C'eſt pour cela qu'on a mis ici les élemens de la rectification des ſections coniques; on en verra l'uſage dans la *troiſiéme Partie*.

II. *Les formules generales pour trouver l'élement de l'aire des courbes.*

94. L'AIRE d'une courbe compriſe par la ſeule courbe entiere quand elle rentre en elle-même comme le cercle, l'ellipſe & les autres ſemblables ; comme auſſi l'aire compriſe par les courbes qui ne rentrent pas en elles-mêmes comme les paraboles, les hyperboles & les autres ſemblables, & par des lignes droites comme ſont leurs coupées & leurs ordonnées ; enfin une partie finie de l'aire d'une courbe comme un ſegment, un ſecteur, &c. chacune de ces aires ou de ces plans curvilignes ou mixtes, c'eſt-à-dire, en partie curviligne, en partie rectiligne, peut être conçue partagée en une infinité de figures rectilignes, dont l'aire ou l'eſpace eſt infiniment petit, par raport à l'eſpace entier. Ces petites figures rectilignes qui rempliſſent l'eſpace entier, peuvent être, ſelon les differentes courbes, de petits rectangles, ou de petits triangles, ou de petits parallelogrammes, ou de petits trapezes, &c. chacune eſt la difference ou *l'élement* de l'aire entiere ; & leur ſomme, qui eſt l'integrale de l'élement, eſt l'aire entiere de la figure. On appelle la meſure de l'aire d'une figure curviligne ou mixte, *la quadrature* de la courbe qui fait le circuit, ou une partie du circuit de la figure. On rapportera à deux cas la connoiſſance de l'aire des courbes, ou la quadrature des courbes. Le premier comprendra les courbes qui ont des ordonnées paralleles, & on les ſuppoſera perpendiculaires aux coupées, afin que les élemens de l'aire ſoient de petits rectangles. Le ſecond comprendra les courbes dont les ordonnées partent d'un même point, & leurs élemens ſeront de petits triangles dont chacun ſera compris entre deux ordonnées infiniment proches, & aura pour baſe une partie infiniment petite de la courbe. Il y a des courbes qui peuvent appartenir aux deux cas, comme le cercle, l'ellipſe & autres ſemblables. Car en concevant dans un demi-cercle & dans une demi-ellipſe les ordonnées infiniment proches perpendiculaires à l'axe, les élemens ſeront des rectangles ; & en concevant du centre dans le cercle & dans l'ellipſe des rayons infiniment proches terminés à la courbe, & encore dans l'ellipſe concevant des lignes tirées d'un des foyers à l'ellipſe, les élemens ſeront de petits triangles. Les ſegmens

FIG. XLII.

d'une courbe comme ACA (fig. 42,) peuvent se rapporter au second cas.

PREMIER CAS.

Formule generale pour trouver l'élement de l'aire des courbes dont les ordonnées sont perpendiculaires aux coupées.

595. EN nommant les coupées $AB(x)$, les ordonnées $BC(y)$, la difference $Bb(dx)$ de la coupée sera la largeur de l'élement $CBbc$ de l'aire; l'ordonnée $BC(y)$ sera la base de ce petit rectangle; & ce petit rectangle $CBbc$ sera ydx; ainsi nommant l'aire entiere ACB, ou cet espace entier (e), l'on aura $de = ydx$. *C'est la formule pour trouver la quadrature des courbes.* Fig. XLII.

USAGE DE LA FORMULE.

596. IL faut, pour trouver l'aire des courbes, prendre par le moyen de l'équation de chacune, la valeur de y en x, & quand il y a dans l'équation dy, la valeur de dy en dx; & substituer ces valeurs dans la formule, qui n'aura, après la substitution, qu'une seule inconnue x & sa difference dx, ce sera l'élement de l'aire; il ne restera plus qu'à prendre l'integrale de cet élement pour avoir la quadrature de la courbe, ou de telle partie qu'on voudra déterminer dont la coupée sera x. On pourroit aussi trouver l'élement de chaque courbe en y & dy au lieu de x & de dx.

L'élement de l'aire de la parabole & sa quadrature.

597. POUR trouver, par exemple, l'aire de la parabole dont l'équation est $yy = px$, on prendra la valeur de y en x, & l'on aura $y = \sqrt{px}$; on substituera cette valeur dans la formule, & l'on aura $de = dx\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$ pour l'élement de l'aire de la parabole. Si l'on veut trouver ici l'integrale de cette difference, on la supposera representée * par $nax^{n-1}dx$, & son integrale qu'on cherche par ax^n; ainsi l'exposant $n = \frac{1}{2}$, $x = x$, $dx = dx$, $p^{\frac{1}{2}} = a$. 1°. Il faut mettre dans l'élement, $x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$ à la place de $x^{\frac{1}{2}}$, ce qui donnera $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$. 2°. Il faut multiplier dx par $\frac{3}{2}$, & l'on aura le diviseur $\frac{3}{2} dx$. 3°. Il faut diviser $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$ par ce diviseur, & l'on aura

* 532.

aura le quotient $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{px} = e$ pour l'integrale que l'on cherche. Subſtituant dans cette integrale $y = \sqrt{px}$ à la place de $\sqrt{px}$, l'integrale ſera $\frac{2}{3}xy = e$. Cette integrale marque qu'en déterminant la coupée x d'un eſpace de parabole, en ſuppoſant, par exemple, $x = b$, & ſon ordonnée $y = c$, cet eſpace $e = \frac{2}{3}bc$; ainſi un eſpace parabolique eſt toujours les deux tiers du rectangle de la coupée de cet eſpace par ſon ordonnée.

L'élement de l'aire de toutes les paraboles & de toutes les hyperboles par raport aux aſymptotes & leur quadrature.

8. L'EQUATION à toutes les paraboles eſt $x^m = y$, quand l'expoſant m eſt un nombre poſitif entier ou rompu, c'eſt auſſi l'équation à toutes les hyperboles quand l'expoſant m eſt négatif. En ſubſtituant la valeur de y dans la formule $de = y\,dx$, on trouve $de = x^m dx$. C'eſt l'élement de l'aire de toutes les paraboles & hyperboles. On trouvera par la méthode de l'article * que l'integrale eſt $e = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$; & en mettant dans cette integrale $y = x^m$ à la place de x^m, l'integrale eſt $\frac{1}{m+1}xy$. Ce qui fait voir que l'eſpace parabolique de telle parabole qu'on voudra déterminer, en ſuppoſant m égale au nombre qu'on voudra, & ſes coordonnées x & y égales à telles grandeurs qu'on voudra, eſt au rectangle des coordonnées de cet eſpace qu'on aura déterminé, comme l'unité eſt au nombre repreſenté par $m+1$. Il en eſt de même de l'eſpace hyperbolique entre les aſymptotes dont on voudra déterminer les coordonnées & l'expoſant. Mais on trouvera des genres d'hyperbole où l'integrale eſt infinie, & d'autres où elle eſt finie; par exemple dans l'hyperbole du 1er genre $1 = xy$, où $m = -1$, l'integrale eſt $e = \frac{1}{-1+1}x^0 = \frac{1}{0}$, c'eſt-à-dire infinie. Mais en ſuppoſant que $m = -\frac{1}{2}$, l'équation ſera $xyy = 1$, & l'integrale ſera $e = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}xy = 2xy$. D'où l'on voit qu'on ne peut pas quarrer l'eſpace contenu entre l'hyperbole ordinaire $xy = 1$, & ſon aſymptote; mais on peut le quarrer dans l'hyperbole $xyy = 1$, &c. * 532.

L'élement de l'air de l'ellipſe.

599. L'EQUATION de l'ellipſe étant $\frac{2a}{p} yy = aa - xx$, qui
Fig. XLVI. donne $y = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}}$, il faut ſubſtituer dans la formule $de = ydx$, cette valeur de y, & l'on aura l'élement de l'aire de l'ellipſe $de = dx\sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}} = BCcb$, & l'eſpace $KBCD\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}}$. Quand l'origine eſt au ſommet de l'axe, & non pas au centre, l'équation eſt $\frac{2a}{p} yy = 2ax - xx$, d'où l'on tire $y = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$. Subſtituant cette valeur de y dans la formule, l'on trouve $de = dx\sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}} = BCcb$ pour l'élement de l'aire de l'ellipſe; & l'eſpace $ABCA\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$.

L'élement de l'aire de l'hyperbole.

600. L'EQUATION par raport au premier axe étant $\frac{2a}{p} yy = xx$
Figure XLVII. $- aa$, d'où l'on déduit $y = \sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$, il faut mettre cette valeur de y dans la formule, & l'on aura $de = dx\sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}} = BCcb$ pour l'élement de l'aire de l'hyperbole; & l'eſpace $ABCA\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{\frac{pxx - paa}{2a}}$. Quand l'hyperbole eſt équilatere, c'eſt-à-dire, quand $p = 2a$, l'élement eſt $de = dx\sqrt{xx - aa}$; & l'eſpace $ABCA\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{xx - aa}$.

L'équation de l'hyperbole en nommant ſon ſecond axe $dD\,(2b)$; la coupée Kb priſe ſur le ſecond axe (x); l'ordonnée bC parallele au premier axe (y); & le parametre du ſecond axe π; l'équation ſera $\frac{2b}{\pi} yy = xx + bb$, & $y = \sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}}$. Subſtituant cette valeur de y dans la formule, l'élement de l'aire de l'hyperbole ſera $de = dx\sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}} = bC c\beta$; & l'eſpace $KbCA\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{\frac{\pi xx + \pi bb}{2b}}$. Dans l'hyperbole équilatere l'on aura $de = dx\sqrt{xx + aa} = bC c\beta$, & l'eſpace $KbCA\,(e) = \text{S.}\, dx\sqrt{xx + aa}$.

L'élement de l'eſpace hyperbolique HMCA *d'une hyperbole équilatere par raport aux aſymptotes.*

601. KM, KG, faiſant l'angle droit MKG, ſont les aſymptotes
Figure XLVII. de l'hyperbole équilatere ACc. KA eſt le demi axe; A eſt le ſommet; AH, CM ſont perpendiculaires ſur KM; l'an-

gle AKH étant demi droit, $AH = KH$, qu'on ſuppoſera $= a$, $= 1$, en prenant $KH\,(a)$ pour l'unité. Soit la coupée $HM = x$; chaque ordonnée $MC = y$; l'équation eſt $ay + xy = aa$; ou bien $xy + 1y = 1$; d'où l'on tire $y = \frac{1}{1+x}$. Subſtituant cette valeur de y dans la formule generale $de = ydx$, on aura $MCcN\,(de) = \frac{1dx}{1+x}$. C'eſt l'élement de l'eſpace hyperbolique $HMCA\,(e) = \text{S.}\,\frac{1dx}{1+x}$.

L'élement de l'aire du cercle.

602. NOMMANT le rayon $CA\,(r)$, $CB\,(x)$, $BF\,(y)$, l'équation eſt $yy = rr - xx$; ainſi $y = \sqrt{rr - xx}$. Subſtituant cette valeur de y dans la formule $de = ydx$, on trouvera $GBFg\,(de) = dx\sqrt{rr - xx}$; ainſi l'eſpace $CBFM\,(e) = \text{S.}\,dx\sqrt{rr - xx}$. Si l'on prend l'origine des coupées x au ſommet A, c'eſt-à-dire, ſuppoſant $AB = x$, l'on aura $\overline{BF}^2\,(yy) = 2rx - xx$. Par conſequent $y = \sqrt{2rx - xx}$, & $GBFg\,(de) = ydx = dx\sqrt{2rx - xx}$; & l'eſpace $AFB\,(e) = \text{S.}\,dx\sqrt{2rx - xx}$. FIGURE XXXV.

SECOND CAS.

Formule generale pour trouver l'élement de l'aire des courbes dont les ordonnées partent d'un point.

603. SUPPOSANT que toutes les ordonnées BC, Bc, qu'on nommera y, partent d'un même point B, & que les deux BC, Bc ſont infiniment proches, & forment le petit triangle CBc qui eſt l'élement de l'aire de la courbe; ſi du centre B avec le rayon BC on tire le petit arc Cd, qu'on nommera dx, & qu'on pourra prendre pour une petite droite perpendiculaire du ſommet C ſur la baſe $Bc\,(y)$ du triangle CBc; il eſt évident que $Cd \times \frac{1}{2}\,Bc = \frac{1}{2}ydx = de$, ſera l'expreſſion du petit triangle CBc; & par conſequent *la formule* pour trouver l'élement de l'aire des courbes du ſecond cas. FIG. XLV.

USAGE DE LA FORMULE.

604. IL faut par le moyen de l'équation d'une courbe du ſecond cas prendre la valeur de y & celle de x, de maniere que ces deux valeurs n'ayent qu'une ſeule & même inconnue avec ſa difference, & ſubſtituer ces valeurs dans la formule $de = \frac{1}{2}ydx$, & l'on aura l'élement de l'aire de la courbe particuliere, dont l'integrale ſera l'aire de la courbe.

L'élement de l'aire du cercle.

605. SI l'on imagine deux rayons infiniment proches, qu'on nommera (r), terminés à un arc infiniment petit de la circonference, lequel on nommera du, & la circonference u, l'on aura un petit triangle formé par ces deux rayons & par le petit arc, qui ſera l'élement de l'aire du cercle, & l'on peut concevoir qu'un des rayons r en eſt la baſe, & le petit arc du la hauteur ; par conſequent ce petit triangle $de = \frac{1}{2} r\,du$, dont l'integrale eſt $e = \frac{1}{2} ru$; c'eſt-à-dire, l'aire du cercle eſt égale au produit du rayon r par la demi-circonference $\frac{1}{2} u$. Si u n'exprime qu'une partie de circonference, $\frac{1}{2} r\,du$ ſera l'élement de l'aire d'un ſecteur dont l'aire $= \frac{1}{2} ru$.

L'élement de l'aire d'un ſegment de cercle.

606. SOIENT menées les deux cordes AH, AF, qu'on nommera (y), de l'extrêmité A du diametre AE, qu'on nommera ($2r$), aux deux extrêmités de l'arc infiniment petit HF (du) & tiré du centre A avec le rayon AH l'arc infiniment petit HL, qu'on nommera dx, & qui peut être regardé comme la hauteur du petit triangle AHF, dont la
FIG. XLI.
baſe eſt AF (y), & $LF = dy$. Or l'on a trouvé* $FH = \frac{2r\,dy}{\sqrt{4rr - yy}}$
* 589.
* 589. (on nomme ici AF (y) qu'on avoit nommé* x) ; ainſi $\overline{FH}^2 = \frac{4rr}{4rr - yy}\,dy^2$; par conſequent $\overline{HL}^2 = \overline{HF}^2 - \overline{FL}^2 = \frac{yy\,dy^2}{4rr - yy}$, d'où l'on déduit $HL = \frac{y\,dy}{\sqrt{4rr - yy}}$; par conſequent le petit triangle $AHF = \frac{1}{2} AF \times HL = \frac{yy\,dy}{2\sqrt{4rr - yy}}$. C'eſt l'élement du ſegment $AHF = \text{S.}\,\frac{yy\,dy}{2\sqrt{4rr - yy}}$.

Differentes expreſſions de l'élement FCH *d'un ſecteur de cercle.*

607. NOMMANT le rayon CA (r), AB (x), BF ($y = \sqrt{2rx - xx}$),
FIG. XLI.
l'arc AF (u) ; on a $FH = du$, & l'élement HCF du ſecteur eſt égal à $FH \times \frac{1}{2} CH = \frac{1}{2} r\,du =$ (en mettant la valeur de
* 588.
$du =$* $\frac{dx}{\sqrt{2r - x}}$) $\frac{r\,dx}{2\sqrt{2rx - xx}}$; ainſi le ſecteur $ACF = \text{S.}\,\frac{r\,dx}{2\sqrt{2rx - xx}}$.
* FIGURE XXXV.
* 589.
Mais ſi l'on prend l'origine des x au centre* C en ſuppoſant $CB = x$; comme $du =$* $\frac{dx}{\sqrt{rr - xx}}$, l'élement $\frac{1}{2} r\,du = FCg = \frac{r\,dx}{2\sqrt{rr - xx}}$; ainſi le ſecteur $MCF = \text{S.}\,\frac{r\,dx}{2\sqrt{rr - xx}}$.

L'élement de l'aire d'un ſecteur d'ellipſe.

608. SOIT le grand axe $Aa = 2a$, ſon parametre $= p$, le ſecond axe $2KD = 2b$, ſon parametre $= \pi$, chaque coupée $Kb = x$, l'ordonnée $bx = y$, & l'équation de l'ellipſe $\frac{2a}{p}yy = aa - xx$; d'où l'on tire $yy = \frac{aap - pxx}{2a}$, & $bx\,(y) = \sqrt{\frac{aap - pxx}{2a}} = \frac{1}{2a} \times \sqrt{2a^3p - 2apxx}$. Pour avoir l'élement du ſecteur aKx dont le ſommet eſt au centre K; c'eſt-à-dire, pour avoir l'aire du ſecteur infiniment petit $xK\chi$, il faut tirer du centre K avec le rayon Kx le petit arc $x\varphi$; & il eſt évident que l'élement ou le petit ſecteur $xK\chi = x\varphi \times \frac{1}{2}K\chi$. Or $K\chi = \sqrt{\overline{Kb}^2 + \overline{bx}^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2ax^2 - pxx + aap}{2a}} = \frac{1}{2a} \times \sqrt{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}$. La difference de $Kx = \chi\varphi = \frac{2axdx - pxdx}{\sqrt{4aax^2 - 2apx^2 + 2a^3p}}$; ſon quarré eſt $\overline{\chi\varphi}^2 = \frac{4aaxx - 4apxx + ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} \times dx^2$. On a auſſi trouvé * $\overline{\chi x}^2$ = $du^2 = dx^2 \times \frac{pxx - 2axx + 2a^3}{2a^3 - 2axx} = dx^2 \times \frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx}$. Par conſequent $\overline{x\varphi}^2 = \overline{\chi x}^2 - \overline{\chi\varphi}^2 = \frac{ppxx - 2apxx + 2a^3p}{2a^3p - 2apxx} \times dx^2 - \frac{4aaxx + 4apxx - ppxx}{4aaxx - 2apxx + 2a^3p} \times dx^2$. Cette quantité ſe réduit à $\overline{x\varphi}^2 = \frac{4a^6pp\,dx^2}{2a^3p - 2apxx \times 4aaxx - 2apxx + 2a^3p}$; d'où l'on déduit $x\varphi = \frac{2a^3pdx}{\sqrt{2a^3p - 2pxx} \times \sqrt{4aaxx - 2apxx + 2a^3p}}$. Par conſequent l'élement $x\varphi \times \frac{1}{2}K\chi = \frac{aapdx}{2\sqrt{2a^3p - 2apxx}}$. C'eſt la quantité où ſe réduit le produit que l'on trouve de la valeur de $x\varphi$ par la valeur de $\frac{1}{2}K\chi$. C'eſt auſſi le petit ſecteur χKx, qui eſt l'élement du ſecteur aKx au centre de l'ellipſe.

* 586.

FIG. XLVI.

L'élement de l'aire d'un ſecteur ou triangle hyperbolique KAC *par raport au premier axe* KA.

609. POUR trouver le petit ſecteur $CKc = Cg \times \frac{1}{2}KC$, qui eſt l'elements du ſecteur ou triangle hyperbolique AKC, ſoit la moitié du premier axe $KA = a$, ſon parametre $= p$, la coupée $KB = x$, l'ordonnée $BC = y$; & l'équation de l'hyperbole par raport à ſon premier axe $\frac{2a}{p}yy = xx - aa$, qui donne $yy = \frac{pxx - aap}{2a}$; ainſi $\overline{KC}^2 = \overline{KB}^2\,(xx) + \overline{BC}^2\,(yy) =$

FIGURE XLVII.

$\frac{2axx+pxx-aap}{2a}$; & $KC=\frac{1}{2a}\sqrt{4aaxx+2apxx-2a^3p}$;

la difference de $KC=cg=\frac{2axdx+pxdx}{\sqrt{4aaxx+2apxx-2a^3p}}$. $\overline{cg}^2$

* 587. $=\frac{4aaxx+4apxx+ppxx}{4aaxx+2apxx-2a^3p}dx^2$. Mais $\overline{Cc}^2=\frac{2apxx+ppxx-2a^3p}{2apxx-2a^3p}dx^2$.

Donc $Cg=\sqrt{\overline{Cc}^2-\overline{cg}^2}=\frac{2a^3pdx}{\sqrt{2apxx-2a^3p\times 4aaxx+2apxx-2a^3p}}$.

Par conſequent $Cg\times\frac{1}{2}KC=\frac{aapdx}{2\sqrt{2apxx-2a^3p}}$. C'eſt l'élement CKc du triangle hyperbolique KAC. Dans l'hyperbole équilatere, où $p=2a$, $CKc=Cg\times\frac{1}{2}KC=\frac{aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$.

Le même élement CKc = Cg × ½ KC *par raport au ſecond axe* DKd.

610. SUPPOSANT la moitié KD du ſecond axe $=b$, ſon parametre $=\pi$, la coupée $Kb=x$, l'ordonnée $bC=y$, & l'équation $\frac{2b}{\pi}yy=xx+bb$, on trouvera $KC=\frac{1}{2b}\sqrt{4bbxx+2b\pi xx+2b^3\pi}$; $\overline{cg}^2=\frac{4bbxx+4b\pi xx+\pi\pi xx}{4bbxx+2b\pi xx+2b^3\pi}dx^2$;

$\overline{Cc}^2=\frac{2b\pi xx+\pi\pi xx+2b^3\pi}{2b\pi xx+2b^3\pi}dx^2$; $Cg=\sqrt{\overline{Cc}^2-\overline{cg}^2}=\frac{2b^3\pi}{\sqrt{2b\pi xx+2b^3\pi\times 4bbxx+2b\pi xx+2b^3\pi}}$; & l'élement $CKc=Cg\times\frac{1}{2}KC=\frac{bb\pi dx}{2\sqrt{2b\pi xx+2b^3\pi}}$. Dans l'hyperbole équilatere, où $\pi=2b=2a$, $CKc=Cg\times\frac{1}{2}KC=\frac{aadx}{2\sqrt{xx+aa}}$.

On peut trouver de la même maniere l'élement d'un ſecteur elliptique & hyperbolique dont le ſommet eſt à l'un des foyers.

On doit faire ici une remarque ſemblable à celle de l'art. 593.

AVERTISSEMENT.

611. QUE l'on imagine qu'une figure plane ABC terminée par une courbe quelconque AC, & par des lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre AB, BC, tourne autour d'une droite comme AB, qu'on nommera *l'axe de révolution*, ou pour abreger, *l'axe* ; il eſt évident que le plan ABC décrira dans une révolution entiere un ſolide, & que la courbe AC

FIGURE XXVII.

décrira en même temps la ſurface courbe qui entoure ce ſolide. L'axe de révolution peut être la tangente au ſommet *Ab*, ou l'ordonnée *BC*, ou la ligne des coupées *AB*, ou telle autre droite qu'on voudra parallele à la ligne des coupées *AB*, ou aux ordonnées *BC*. Le plan qui tourne peut auſſi être le plan *ABC*, ou le plan *AbC* qui eſt toujours terminé par la courbe *AC*, ſoit du côté concave comme *ABC*, ou du côté convexe de la courbe comme *AbC*. Pour une plus grande clarté on conſiderera le ſolide formé par la révolution du plan *ABC*, tournant autour de l'axe *AB*; les Lecteurs appliqueront ce que l'on en dira aux ſolides formés par la révolution du même plan, ou du plan *AbC*, autour du même axe, ou de tel autre qu'on voudra.

12. Si l'on conçoit de toutes les parties infiniment petites *Cc* qu'on nommera *du*, de la courbe *AC* qu'on nommera *u*, des perpendiculaires comme *CB*, *cb* qu'on nommera *y*, à l'axe *AB* dont l'origine eſt en *A*, (quand c'eſt un autre axe qui ne paſſe pas par l'origine *A*, l'origine en eſt au point où tombe la perpendiculaire menée du ſommet *A* à cet axe,) & dont les parties *AB* depuis l'origine ſeront nommées *x*; il eſt évident que chaque petit quadrilatere *BbcC* formé par deux ordonnées infiniment proches *BC*, *bc*, dont l'épaiſſeur eſt *Bb* (*dx*) ou une partie infiniment petite de l'axe, décrira dans la révolution un cercle ou plutôt un petit cylindre, la baſe en ſera le cercle dont l'ordonnée *y* ſera le rayon, & l'épaiſſeur en ſera *dx*. Chacun de ces petits cylindres eſt la difference ou l'élement du ſolide qui en eſt l'integrale, c'eſt-à-dire la ſomme de tous ces petits cylindres, & l'expreſſion generale de ce petit cylindre eſt la *formule* pour trouver l'élement du ſolide. FIG. XLII.

13. Il eſt de même évident que chaque partie infiniment petite *Cc* (*du*) de la courbe *AC*, décrit dans la révolution une petite zone, dont la baſe eſt une circonference, dont *BC* (*y*) eſt le rayon, & dont la largeur eſt la petite partie de la courbe *Cc* (*du*). Chacune de ces petites zones eſt l'élement de la ſurface courbe qui entoure le ſolide formé par la révolution, laquelle ſurface eſt l'integrale de cet élement; & l'expreſſion generale de cette petite zone eſt la *formule* pour trouver l'élement des ſurfaces courbes ainſi formées.

III. *Formules pour trouver l'élément des surfaces courbes & l'élément des solides.*

1°. *Pour les surfaces courbes.*

614. POUR avoir la formule de l'élément des surfaces courbes, FIG. XLII. on supposera que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonference, ainsi $r . c :: BC (y) . \frac{cy}{r} =$ à la circonference qui est la base de la petite zone. Multipliant $\frac{cy}{r}$ par $Cc (du)$ largeur de la petite zone, on aura $\frac{cy}{r} du$, *pour la formule qui fera trouver l'élément des surfaces courbes* ; & comme l'on suppose que les lignes $BC (y)$ paralleles entr'elles, sont perpendiculaires sur l'axe ou sur les x, on peut mettre la valeur de $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ à la place de du, & *la formule sera encore* $\frac{cy}{r} \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

2°. *Pour l'élément des solides.*

615. POUR trouver la formule de l'élément des solides, on FIG. XLII. suppose ra que $\frac{R}{C}$ exprime le raport du quarré du diametre au cercle dont il est le diametre, ainsi $R . C :: \overline{2Bc}^2 (2y \times 2y = 4y^2) . \frac{4Cy^2}{R} =$ au cercle qui est la base du petit cylindre, qui est l'élément du solide, duquel cercle y est le rayon, & $2y$ le diametre. Multipliant cette base par la hauteur $Bb (dx)$ de ce petit cylindre, on aura $\frac{4Cy^2}{R} dx$, *pour la formule qui fera trouver l'élément des solides.*

REMARQUES.

I.

616. EN nommant la circonference d'un cercle c, & le rayon r, $\frac{c}{r}$ est l'expression du raport du rayon à la circonférence ; & comme l'aire du cercle $= \frac{cr}{2}$, *il est clair que le raport du *605. quarré du diametre $2r$ à l'aire du cercle $\frac{cr}{2}$ est $\frac{4rr}{\frac{cr}{2}} = \frac{8r}{c}$; ainsi l'expression qu'on a supposée $\frac{R}{C} = \frac{8r}{c}$, & *la formule* $\frac{4C}{R} yydx$ est $\frac{c}{2r} yydx$.

II.

617. Quand l'axe de révolution n'est pas une des droites qui FIG. XLII. fait une partie du circuit du plan qui tourne autour de cet axe, mais qu'elle le touche ou le coupe seulement en un point, comme dans le cas où le plan Abc tourne autour de l'axe AR, ou

ou de l'axe Rc; ou bien quand c'eſt le plan ARc, qui tourne autour de l'axe AB, ou autour de l'axe bc, il y a alors deux operations à faire; en prenant ici pour exemple le plan Abc qui tourne autour de l'axe AR. 1°. Il faut trouver par la Geometrie ordinaire le ſolide qui eſt un cylindre. 2°. Il faut trouver par la formule précedente $\frac{4Cyy}{R}dx$, l'élement du ſolide formé par la révolution du plan ARc autour de l'axe AR; & après en avoir trouvé l'integrale par les méthodes de la troiſiéme Partie, il faudra ôter ce dernier du premier, & le reſte ſera le ſolide formé par la révolution du plan Abc, autour de l'axe AR. Il y a des cas où il faut ôter le cylindre du ſolide qui eſt l'integrale trouvée par la formule; comme par exemple ſi l'on cherchoit le ſolide formé par la révolution du plan Abc autour d'un axe qui ſeroit au-deſſous de Ab, & parallele à cette droite AB. Ce que les Lecteurs diſtingueront facilement: comme auſſi qu'on doit partager le plan par une ligne droite parallele à l'axe, ou qui lui ſoit perpendiculaire quand il eſt curviligne par tout comme un cercle, une ellipſe, &c. & que l'axe eſt entierement hors de la figure: on pourroit donner ici des formules pour trouver l'élement du ſolide dans ces cas; mais la méthode de cette remarque étant ſuffiſante, il eſt inutile d'en groſſir ce Traité.

III.

Où l'on donne une ſeconde formule pour trouver l'élement des ſolides.

118. POUR faire concevoir clairement cette ſeconde méthode, on prendra pour exemple le ſolide formé par la révolution du plan Abc autour de l'axe AR; on prendra ſur ABb perpendiculaire à l'axe à l'origine A, les AB, Ab qui ſeront les y; & concevant des perpendiculaires BC, bc infiniment proches, des petites parties Cc de la courbe ſur cette perpendiculaire AB à l'axe AR, on nommera x ces paralleles BC à l'axe AR. Il eſt évident que dans la révolution le petit quadrilatere $BbcC$, dont l'épaiſſeur eſt Bb (dy), décrit un cylindre creux, ou une ſurface cylindrique qui a pour baſe la circonference dont AB (y) eſt le rayon, & pour hauteur BC (x), & ce petit cylindre creux eſt l'élement du ſolide décrit par la révolution du plan Abc autour de l'axe AR, lequel ſolide eſt l'integrale ou la ſomme de tous ces petits cylindres creux, FIG. XLII.

dont les exterieurs renferment les interieurs. On trouvera la formule pour avoir cet élement, en ſuppoſant que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonference; & faiſant $r.c :: AB(y).\frac{cy}{r}$, ce 4e terme exprime la circonference qui eſt la baſe de chaque petit cylindre creux; la multipliant par l'épaiſſeur $Bc(dy)$, on aura la petite couronne qui eſt la baſe du petit cylindre; & enfin multipliant cette baſe $\frac{cydy}{r}$ par la hauteur $BC(x)$ du petit cylindre, on aura $\frac{cxy}{r}dy$ *pour la ſeconde formule qui fera trouver l'élement du ſolide.* Ce que l'on vient de dire de ce ſolide doit être appliqué aux autres par raport à leurs axes.

Quand l'axe touche ou coupe la courbe en un point, comme AR, Rc, on n'aura beſoin que de la formule pour trouver l'élement du ſolide, & l'integrale de cet élement ſera le ſolide; mais quand l'axe ne touchera pas la courbe, il y aura un vuide entre l'axe & le ſolide, & alors le ſolide & le vuide feront un cylindre, ou le ſeul vuide fera un cylindre, & l'on trouvera le cylindre par la Geometrie ordinaire, & l'autre ſolide par la formule & par l'integrale de l'élement que fera trouver la formule; & ôtant le moindre du plus grand, on aura le ſolide que l'on cherchoit.

USAGE DES FORMULES.

619. POUR trouver par les formules précedentes l'élement de la ſurface courbe, & l'élement du ſolide formé par la révolution d'un plan borné par des lignes droites & par une courbe ou une partie de courbe, ou par une ſeule courbe comme le cercle, ou l'ellipſe, &c. il faut par le moyen de l'équation de cette courbe, trouver les valeurs des changeantes & des differentielles des formules, de maniere que ces valeurs ne contiennent qu'une même changeante & ſa difference, & ſubſtituer ces valeurs dans les formules, & l'on aura, après la ſubſtitution, l'élement de la ſurface ou du ſolide que l'on cherche. Il ne faudra plus qu'en trouver l'integrale pour avoir la ſurface & le ſolide.

620. Pour trouver, par exemple, la ſurface de la ſphere formée par la révolution de la demi-circonference AME autour de l'axe ACE; on nommera l'axe $AE(2a)$ la circonference $EMFA(u)$, $AB(x)$, $BF(y)$; ce qui donnera $BG = Fi = dx$, $Fg = du$; & l'équation du cercle ſera $yy = 2ax - xx$,

FIGURE XXXV.

& $y = \sqrt{2ax - xx}$; & l'on trouvera * $du = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. On * 588. ſubſtituera les valeurs de y & de du dans la formule $\frac{cy}{r}du$, & l'on aura l'élement de la ſurface de la ſphere $\frac{c}{r}\sqrt{2ax - xx} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{ac}{r}dx$, dont l'integrale eſt $\frac{acx}{r}$. En ſuppoſant $AB(x) = AE(2a)$, que c eſt la circonference u, & que r eſt le rayon $AC(a)$, l'integrale $\frac{acx}{r}$ deviendra $\frac{2aau}{a} = 2au$, c'eſt la ſurface de la ſphere qui eſt égale au produit de la circonference entiere u par le diametre $2a$. Si l'on ne vouloit qu'une portion de cette ſurface, il n'y auroit qu'à déterminer la valeur de x & de y pour cette partie.

21. Pour trouver la ſolidité de la ſphere en ſuppoſant les mêmes dénominations, il n'y a qu'à ſubſtituer dans la formule de l'élement des ſolides $\frac{4C}{R}yydx$, la valeur de $yy = 2ax - xx$, & l'on aura $\frac{4C}{R}dx \times \sqrt{2ax - xx}$ pour l'élement de la ſolidité de la ſphere, dont l'integrale *$\frac{4C}{R} \times \frac{1}{2} \times 2axx - \frac{1}{3}x^3$, * 532. fera connoître la ſolidité de la ſphere en ſuppoſant $\frac{C}{R} = \frac{c}{8r}$ *, * 616. que c eſt égale à la circonference u de la ſphere, r égale au demi-axe a, & que $AB(x) = AE = 2a$, car cette integrale deviendra $\frac{4u}{8a} \times \frac{1}{2} \times 8a^3 - \frac{4u}{8a} \times \frac{1}{3} \times 8a^3 = \frac{2}{3}aau$, qui fait voir que la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit $2au$ de ſa ſurface par $\frac{1}{3}a$ le tiers du rayon. FIGURE XXXV.

Si l'on veut ſe ſervir de la ſeconde formule $\frac{cxydy}{r}$, on menera par le centre C la perpendiculaire CM à l'axe ſur laquelle ſe prendront les y & dy ; & l'on imaginera ſur tous les points de CM des perpendiculaires juſqu'à la circonference, qui ſeront les hauteurs des ſurfaces cylindriques, & qu'on nommera x ; & l'équation du cercle étant $yy = aa - xx$, on aura $y = \sqrt{aa - xx}$, & $dy = \frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}}$. On ſubſtituera ces valeurs de y & de dy dans la formule $\frac{cxydy}{r}$, & l'on aura l'élement de la demi-ſphere $\frac{-cxxdx}{r}$, dont l'integrale eſt * $\frac{c}{3r}x^3$, * 532. dans laquelle ſuppoſant que c eſt la circonference $AMEA$ (u), $r =$ au rayon $CA(a)$, & x auſſi égale au rayon $CA(a)$, l'integrale deviendra $\frac{1}{3}aac$ qui ſera la demi ſphere ; & la multipliant par 2, on aura $\frac{1}{3}aac$ pour la ſolidité de la ſphere. FIGURE XXXV.

IV. *Les formules pour trouver le centre de pesanteur.*

622. ON suppose comme une chose évidente, que le centre de pesanteur d'une ligne, ou, si l'on veut, d'un prisme ou d'un cylindre, dont l'épaisseur est si petite qu'on le peut prendre pour une ligne sensible, est au milieu de la ligne ; que le centre de pesanteur d'un rectangle dont la largeur est infiniment petite, est dans la ligne qui le coupe perpendiculairement par le milieu des deux côtés les plus longs ; que le centre de pesanteur d'un cercle qui a une épaisseur infiniment petite, est dans la perpendiculaire à son plan, laquelle l'enfile par le centre, c'est-à-dire dans l'axe de ce cylindre d'une hauteur infiniment petite ; que le centre d'une circonference qui est comme une zone d'une très-petite largeur, est aussi son centre de pesanteur : car il est clair qu'il y a des pesanteurs égales & des efforts égaux des côtés opposés de tous les centres de pesanteur dont on vient de parler.

Il suit de là que la ligne qui coupe perpendiculairement toutes les ordonnées d'une courbe chacune par le milieu, passe par le centre de pesanteur de la figure plane curviligne que forme cette courbe si elle rentre en elle-même, ou de la figure plane mixte formée par la courbe & par la plus grande ordonnée qui se termine de part & d'autre à la courbe ; qu'elle passe aussi par le centre de pesanteur de tous les points ou de toutes les parties infiniment petites dont le circuit de la courbe est composé, c'est-à-dire par le centre de pesanteur de la courbe, supposant que le dedans en est vuide ; qu'elle passe par le centre de pesanteur du solide formé par la révolution de la figure plane que forme la courbe autour de cette ligne prise pour l'axe, & par le centre de pesanteur de la surface courbe de ce solide ; enfin qu'elle passe par le centre de pesanteur de chacun des élemens de la courbe, de chacun des élemens de la figure plane que forme la courbe, de chacun des élemens du solide formé par la révolution de cette figure plane autour de cette ligne prise pour axe, & de chacun des élemens de la surface courbe de ce solide.

D'où il suit qu'en concevant un plan perpendiculaire à cette ligne qui passe par les centres de pesanteur des élemens d'une courbe, d'une figure plane ou solide, & d'une surface courbe, la partie de cette ligne depuis ce plan per-

perpendiculaire au ſommet ou hors de la figure juſqu'à chaque élement, ſera la diſtance du centre de peſanteur de chaque élement juſqu'à ce plan : Ainſi prenant l'origine de cette ligne des diſtances des centres de peſanteur des élemens, au point où elle eſt coupée par le plan perpendiculaire, qu'on ſuppoſera être ici la même que l'origine des x de la figure, & nommant ces diſtances x; prenant auſſi ces élemens pour les petits poids dont la courbe, ou la figure plane, ou le ſolide, ou la ſurface courbe eſt compoſée, la ſomme des produits des x, chacune par ſon élement *, eſt égale au produit de la diſtance du centre de peſanteur par la ſomme des élemens. Ainſi *la ſomme des produits des* x *multipliées chacune par ſon élement, étant diviſée par la ſomme des élemens, donnera pour quotient la diſtance du centre de peſanteur* de la ſomme des élemens, c'eſt-à-dire, la diſtance depuis l'origine des x. Or la ſomme des élemens d'une courbe, c'eſt la courbe même, & c'eſt la même choſe des figures planes ou ſolides & des ſurfaces courbes. * 338. & 339.

123. Nommant donc x les coupées priſes ſur la perpendiculaire qui diviſe les ordonnées par le milieu, y chacune des ordonnées, u la courbe, $\frac{S.xdu}{S.du=u}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des courbes.* $\frac{S.xydx}{S.ydx}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des figures planes.* $\frac{S.\frac{c}{r}xydu}{S.\frac{c}{r}ydu}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des ſurfaces courbes.* $\frac{S.\frac{4c}{R}xyydx}{S.\frac{4c}{R}yydx}$; ou bien * $\frac{S.\frac{c}{2r}xyydx}{S.\frac{c}{2r}yydx}$ ſera *la formule pour trouver le centre de peſanteur des ſolides.* * 616.

USAGE DES FORMULES.

124. IL faut prendre dans les équations des courbes dont on cherchera le centre de peſanteur, les valeurs des changeantes & des differentielles des formules, & faire en ſorte que ces valeurs ſoient exprimées par une même changeante & par ſa difference, & les ſubſtituer dans les formules, & il ne reſtera plus qu'à prendre les integrales du numerateur & du dénominateur, qu'on a marquées par S. qui ſignifie *ſomme*, & à les diviſer l'une par l'autre; & l'on aura la diſtance du centre de peſanteur.

Par exemple pour trouver le centre de peſanteur d'une demi-ſphere, l'équation du cercle étant $yy = 2ax - xx$, la formule $\frac{S.\frac{c}{2r}xyydx}{S.\frac{c}{2r}yydx}$ deviendra $\frac{S.\frac{c}{2r} \times 2axx - \frac{c}{2r}x^3 \times dx}{S.\frac{c}{2r} \times 2ax - \frac{c}{2r}xx \times dx}$;

532. l'integrale du numerateur eſt $\frac{c}{3r}ax^3 - \frac{c}{8r}x^4$, l'integrale du dénominateur eſt $\frac{c}{2r}axx - \frac{c}{6r}x^3$, & la diſtance du centre de peſanteur eſt $\frac{\frac{c}{3r}ax^3 - \frac{c}{8r}x^4}{\frac{c}{2r}axx - \frac{c}{6r}x^3} = \frac{\frac{1}{3}ax - \frac{1}{8}xx}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}x} = \frac{8ax - 3xx}{12a - 4x}$; & x étant égale au rayon a dans la demi-ſphere, cette diſtance ſera $\frac{5}{8}a$.

IV. SECTION.

Où l'on explique la maniere de trouver les ſuites *qui ſont les integrales des élemens qu'on trouve par les formules de la ſection précedente ; & en même temps l'uſage des méthodes des ſuites du ſecond Problême du ſeptiéme Livre art.* 175, *pour la réſolution des Problêmes de la Geometrie, de l'Aſtronomie, &c. On explique auſſi les logarithmes hyperboliques.*

AVERTISSEMENT.

625. QUAND on peut trouver par les méthodes qu'on donnera dans la troiſiéme Partie, les integrales des élemens de la longueur des courbes, de leur aire, de la ſolidité des corps qui ſe forment par leur révolution, & des ſurfaces courbes de ces corps ; leſquels élemens ſe trouvent par les formules précedentes ; on a la rectification des courbes, leur quadrature, la ſolidité des corps qui ſe forment par leur révolution, & l'aire des ſurfaces courbes de ces corps, & l'on a auſſi la diſtance de leur centre de peſanteur par le moyen de la formule pour trouver cette diſtance : mais il y a beaucoup de ces courbes qui ont des élemens dont on n'a pu trouver les integrales, comme l'élement de la longueur de la circonference ou d'un arc de circonference, les élemens des longueurs de la parabole, de l'ellipſe, de l'hyperbole ; les élemens de leurs aires, excepté celui de la parabole ; les

élemens de leurs ſecteurs, &c. ce qui leur eſt commun avec beaucoup d'autres courbes plus compoſées geometriques, & méchaniques : Alors on peut par le moyen de ces élemens & par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, trouver par le cælcul, *des ſuites* qui expriment ces integrales, & qui en approchent autant près qu'on voudra. On peut encore par les mêmes moyens trouver les valeurs des lignes droites inconnues qui entrent dans ces élemens, & de celles qu'on y peut faire entrer : ce qui donne la réſolution d'un très-grand nombre de Problêmes très-utiles, dont on en va mettre ici quelques-uns qui ſerviront aux Lecteurs à réſoudre les autres ſemblables.

I.

Problêmes où l'on ſe ſert des élemens des longueurs des courbes pour trouver ces longueurs, & les lignes inconnues qui entrent ou peuvent entrer dans ces élemens.

TROUVER la longueur d'un arc exprimée par ſa tangente.

176. EN nommant la tangente $eN(x)$, ou, pour mieux marquer la tangente, la nommant (t), & le rayon $Or(r)$, l'arc $eR(u)$, l'élement de l'arc eſt * $du = \frac{rrdt}{rr+tt}$, qui ſe réduit à $\frac{rrdu+ttdu}{dt}$ * 590. $-rr=0$. Pour trouver $eR(u)$, on ſuppoſera * $u = at + bt^3 + ct^5 + et^7 +$ &c. * 175. & l'on trouvera par les méthodes du Problême 175, $u = t - \frac{1}{3rr}t^3 + \frac{1}{5r^4}t^5 - \frac{1}{7r^6}t^7 +$ &c. & ſi l'on ſuppoſe le rayon $OR=1$, l'on aura $eR(u) = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. FIG. XLII.

La même longueur exprimée par le ſinus droit.

177. EN nommant le ſinus $BF(x)$ de l'arc AF qu'on nommera (u) & le rayon $AC(1)$, CB ſera $\sqrt{1-xx}$; & les triangles ſemblables CBF, Fgi donneront $CB(\sqrt{1-xx}).CF(1)::gi(dx).Fg(du) = \frac{1dx}{\sqrt{1-xx}}$, qui ſe réduit à $1 - \frac{du^2}{dx^2} + \frac{xxdu^2}{dx^2} = 0$. On trouvera la longueur de l'arc $AF(u) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 +$ &c. ou bien $u = x + \frac{1}{2\times3}x^3 + \frac{3\times3}{2\times3\times4\times5}x^5 + \frac{1\times3\times5\times5}{3\times3\times4\times5\times7}x^7$, &c. comme dans l'art. 229. où cette équation ſert d'exemple ; on y marque par y & dy^2 ce qui eſt ici marqué par x & par dx^2 ; & par dx^2 ce qui eſt ici marqué par du^2. FIGURE XXXV.

Si l'on vouloit que le rayon fût exprimé par une lettre r, & non par l'unité, l'on trouveroit l'arc $AF(u) = x + \frac{1}{6rr}x^3 + \frac{3}{40r^4}x^5 + \frac{5}{112r^6}x^7 + \frac{35}{1152r^8}x^9 +$ &c. qu'on peut réduire à cette expreſſion équivalente $u = x + \frac{1}{2\times3rr}x^3 + \frac{3\times3}{2\times3\times4\times5r^4}x^5 + \frac{3\times3\times5\times5}{2\times3\times4\times5\times6\times7r^6}x^7 + \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7}{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9r^8}x^9 +$ &c.

On peut trouver de même l'expreſſion de l'arc AF par le ſinus de complement CB, comme auſſi par le ſinus verſe AB.

La même longueur exprimée par la corde.

628. EN nommant le diametre $AE(1)$, la corde $AH(x)$, d'arc
FIG. XLI. $AH(u)$, les triangles ſemblables* AHE, LHF, donneront
*589. $EH(\sqrt{1-xx}).\ AE(1) :: LF(dx).\ HF(du) = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, qui ſe réduit à $1 - \frac{du^2}{dx^2} + \frac{xxdu^2}{dx^2} = 0$, qui eſt ſemblable à l'équation précedente, & l'on trouvera par conſequent la même ſuite pour la longueur de l'arc $AH(u)$.

Si l'on vouloit que le diametre AE fût exprimé par une lettre D, on trouveroit l'arc $AH(u) = x + \frac{1}{6D^2}x^3 + \frac{3}{40D^4}x^5 + \frac{5}{112D^6}x^7 + \frac{35}{1152D^8}x^9 +$ &c. qu'on peut réduire à cette expreſſion équivalente $AH(u) = x + \frac{1}{2\times3D^2}x^3 + \frac{3\times3}{2\times3\times4\times5D^4}x^5 + \frac{3\times3\times5\times5}{2\times3\times4\times5\times6\times7D^6}x^7 + \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7}{2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9D^8}x^9 +$ &c. & encore à celle-ci $AH(u) = x + \frac{1}{2\times3D^2}.Axx + \frac{3\times3}{4\times5D^2}Bxx + \frac{5\times5}{6\times7D^2}Cxx + \frac{7\times7}{8\times9D^2}Exx +$ &c. dans laquelle A ſignifie tout le premier terme x, qui multiplie le ſecond; B, tout le ſecond terme $\frac{-1}{2\times3D^2}Axx$, par lequel le troiſiéme eſt multiplié; C, tout le troiſiéme; & ainſi des lettres capitales ſuivantes; ce qui ſert à abreger les formules, & à faire connoître la maniere facile de les continuer.

629. *TROUVER la longueur de l'une des lignes inconnues de l'élement, comme du ſinus droit* BF (x); *ou de la corde* AH (x) *exprimée par la longueur de l'arc* AF, *ou de l'arc* AH, *qu'on ſuppoſera connus.*

FIGURE XXXV. & XLI.

IL faut ſe ſervir de la méthode *du retour des ſuites* 234, & l'on trouvera le ſinus droit $BF(x)$, ou la corde $AH(x) = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 - \frac{1}{5040}u^7 + \frac{1}{362880}u^9 -$ &c. u eſt l'arc AF ou AH. Si l'on veut exprimer le rayon par la lettre r, l'on aura $BF(x) = u - \frac{1}{6rr}u^3 + \frac{1}{120r^4}u^5 -$ &c. Si l'on veut

veut exprimer le diametre par D, il n'y aura qu'à mettre D au lieu de r, & l'on aura la valeur de la corde $AH(x)$; l'on pourra encore réduire la formule à cette expreſſion équivalente $BF(x) = u - \frac{Auu}{2\times 3rr} - \frac{Buu}{4\times 5rr} - \frac{Cuu}{6\times 7rr} - \frac{Enn}{8\times 9rr}$ — &c. dans laquelle A ſignifie le premier terme $+ u$; B, tout le ſecond terme $\frac{Auu}{2\times 3rr}$ avec ſon ſigne —; C, tout le troiſiéme terme $\frac{Buu}{4\times 5rr}$ avec ſon ſigne —; & ainſi des autres lettres capitales ſuivantes.

30. *UN arc, qu'on nommera* a, *étant donné de tel nombre de degrés qu'on voudra, & ſa corde* c *étant connue, mais indéterminée pour marquer la corde connue de tel arc qu'on voudra; le diametre étant* D; *trouver la corde* x *d'un autre arc* u, *qui ait avec le premier arc* a *un raport quelconque exprimé par* $\frac{n}{1}$.

1°. IL faut exprimer l'arc donné a par ſa corde c, & l'on aura * $a = c + \frac{1}{2\times 3D^2}c^3 + \frac{3\times 3}{2\times 3\times 4\times 5D^4}c^5 + \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7D^6}c^7$ * 627. + &c. Il faut auſſi exprimer l'arc u que l'on cherche par ſa corde x, & l'on aura $u = x + \frac{1}{2\times 3D^2}x^3 + \frac{3\times 3}{2\times 3\times 4\times 5D^4}x^5 + \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7D^6}x^7$ + &c.

2°. Il faut faire cette proportion donnée, $a.u::1.n$; ce qui donnera, en multipliant les extrêmes & les moyens, & mettant les valeurs de a & de u à leur place, $x + \frac{1}{2\times 3D^2}x^3 + \frac{3\times 3}{2\times 3\times 4\times 5D^4}x^5$ + &c. $= nc + \frac{n}{2\times 3D^2}c^3 + \frac{3\times 3n}{2\times 3\times 4\times 5D^4}c^5 + \frac{3\times 3\times 5\times 5n}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7D^6}c^7$ + &c.

3°. Il faut chercher par la méthode *du retour des ſuites*, *art.* 238, la valeur de la corde x qu'on demande, exprimée par une ſuite qui ne contienne que des c, c^3, &c. & l'on trouvera, en réduiſant à un même dénominateur les grandeurs qui ſont les parties du coëficient du même terme, la corde $x = nc + \frac{n\times 1-nn}{2\times 3D^2}c^3 + \frac{n\times 1-nn\times 9-nn}{2\times 3\times 4\times 5D^4}c^5 + \frac{n\times 1-nn\times 9-nn\times 25-nn}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7D^6}c^7 + \frac{n\times 1-nn\times 9-nn\times 25-nn\times 49-nn}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9D^8}c^9 + \frac{n\times 1-nn\times 9-nn\times 25-nn\times 49-nn\times 81-nn}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11D^{10}}c^{11}$ + &c. C'eſt la formule que l'on cherchoit, & qu'il eſt facile de continuer à l'infini, & qu'on peut encore abreger de cette maniere $x = nc + \frac{1-nn}{2\times 3D^2}Ac^3 + \frac{9-nn}{4\times 5D^2}Bc^5 + \frac{25-nn}{6\times 7D^2}Ec^7$

$+\frac{49-nn}{8\times 9D^2}Fc^9+\frac{81-nn}{10\times 11D^2}Gc^{11}+$ &c. en ſuppoſant que A repréſente le premier terme nc; B, le ſecond terme $+\frac{1-nn}{2\times 3D^2}Ac^3$; & ainſi des lettres capitales ſuivantes.

631. Cette formule ſuffit pour conſtruire les tables des ſinus, car le ſinus d'un arc eſt la moitié de la corde du double de cet arc; ainſi une ſeule corde d'un arc étant connue (plus l'arc dont elle ſera la corde ſera petit, & moins il faudra de termes pour avoir une valeur très approchante des cordes de tout autre arc); on pourra trouver les valeurs des cordes de tous les autres arcs qui auront avec l'arc donné tel raport qu'on voudra; par exemple ſi l'on veut la corde de l'arc qui eſt le tiers du donné, il n'y aura qu'à mettre la corde de l'arc donné dans la formule à la place de c, & $\frac{1}{3}$ à la place de n, & ſuppoſer que x eſt la corde que l'on cherche, & la formule après les ſubſtitutions donnera ſa valeur. Quand l'expoſant du raport de l'arc dont on cherche la corde, avec l'arc dont la corde eſt donnée, eſt un nombre impair, comme $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{7}{1}$, &c. il eſt viſible que la ſuite qui eſt la valeur de x ſera finie. On peut de même trouver une formule pour conſtruire les tables des tangentes, par l'art. 626.

REMARQUES.

CES Exemples ou Problêmes ſuffiſent pour faire voir clairement aux Lecteurs qu'ils peuvent trouver de la même maniere par le moyen de l'élement de la longueur de la parabole, de l'ellipſe, de l'hyperbole & des autres courbes, en ſe ſervant des méthodes *du ſecond Problême du ſeptiéme Livre art* 175, *& des méthodes du retour des ſuites art.* 234, *& les ſuivans*, la longueur de tel arc qu'on voudra de ces courbes, & de plus la valeur des lignes inconnues qui entrent dans l'élement de la longueur de chaque courbe, ou qu'on y peut faire entrer.

II.

Problêmes où l'on ſe ſert des élemens de l'aire des courbes pour trouver ces aires, & les lignes inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans ces élemens.

632. ON ſuppoſe que ACc eſt une hyperbole équilatere entre les aſymptotes KL, KM qui ſont un angle droit en K; que

FIGURE XLVII.

le demi-axe eſt KA, le ſommet A, la perpendiculaire du ſommet $AG = a = KG$; (on remarquera que le produit connu aa, qui eſt égal au produit de chaque coupée par ſon ordonnée correſpondante, comme $KF \times Ff$, s'appelle *la puiſſance de l'hyperbole*); les coupées ſont ſur l'aſymptote KL; les ordonnées CP, fF, iI, lL ſont perpendiculaires aux coupées, & paralleles à l'aſymptote KM. Il faut trouver l'eſpace $fF\,Ii$, qu'on nommera l, du quadrilatere hyperbolique $fF\,Ii$. Soit $KF = b$, $FI = x$, $Ii = y$, l'on aura * $Ii\,(y) = \frac{KG \times GA}{KI}$ * 410. $(\frac{aa}{b+x})$; multipliant par dx, on aura $ydx = \frac{aadx}{b+x}$ pour l'élement du quadrilatere $fF\,Ii\,(l)$; ainſi $l = \text{S.}\,\frac{aadx}{b+x}$, & $dl = \frac{aadx}{b+x}$; d'où l'on déduit $\frac{bdl}{dx} + \frac{xdl}{dx} - aa = 0$. On trouvera *par les méthodes du 2e Probl.* 175, $fF\,Ii\,(l) = aa \times \overline{\frac{1}{b}x - \frac{1}{2bb}xx + \frac{1}{3b^3}x^3 - \frac{1}{4b^4}x^4}$ + &c.

COROLLAIRE.

633. NOMMANT $KP\,(c)$, $PF\,(x)$, $KI\,(e)$, $IL\,(z)$; ſi l'on prend ſur l'aſymptote KL quatre coupées en proportion $KP\,(c)$. $KF\,(c+x) :: KI\,(e)$. $KL\,(e+z,)$ le quadrilatere $CPFf$ ſur $PF\,(x)$, qui eſt la difference des deux premiers termes, ſera égal au quadrilatere $iILl$ ſur $IL\,(z)$, qui eſt la difference des deux derniers termes: car l'on aura $ce + ex = ce + cz$; ce qui donne $ex = cz$, & $\frac{x}{c} = \frac{z}{e}$. Or le quadrilatere $CPFf$ = * $aa \times \overline{\frac{1}{c}x - \frac{1}{2cc}xx + \frac{1}{3c^3}x}$ — &c. & le quadrilatere $iILl$ * 632. $= aa \times \overline{\frac{1}{e}z - \frac{1}{2ee}zz + \frac{1}{3e^3}z^3}$ — &c. Par conſequent chaque terme de la valeur du premier quadrilatere eſt égal au terme correſpondant du ſecond; ils ſont donc égaux.

Avertiſſement.

L'invention des logarithmes hyperboliques, par le moyen deſquels on forme bien plus facilement les logarithmes des tables que par la méthode ordinaire des tables des logarithmes, dépend du Problême précedent & de ſon Corollaire; on va l'expliquer en peu de mots.

Des logarithmes hyperboliques.

PREMIERE SUPPOSITION.

634. ON peut concevoir ſur l'aſymptote KL des coupées KR, KQ, KP, KG, KF, &c. en progreſſion géometrique à l'infini, FIGURE XLVII.

de maniere que le raport qui regne dans la progreſſion ne differe du raport d'égalité que d'une quantité infiniment petite ; le terme K où commence la progreſſion eſt zero ; le premier terme KR eſt une grandeur infiniment petite au-deſſus de zero ; le ſecond terme KQ ſurpaſſe le premier d'une grandeur infiniment petite, & de même le 3e, le 4e, &c. à l'infini ; la coupée KG qui ſe termine à l'ordonnée AG du ſommet A, & qui lui eſt égale, ſe prendra pour l'unité ; & comme l'on peut concevoir tous les nombres poſſibles dans cette progreſſion, tous les nombres moindres que l'unité ſeront depuis K juſqu'à G ; tous les nombres qui ſurpaſſent l'unité pris de ſuite iront depuis l'origine K juſqu'au delà de G à l'infini.

COROLLAIRE I.

635. ON peut imaginer toutes les ordonnées de ces coupées ; & *633. & 634. il eſt clair * que tous les quadrilateres hyperboliques qui ont pour baſes les differences des coupées voiſines, ſeront égaux entr'eux. Par exemple ſi PG, GF ſont deux differences ou deux reſtes des termes voiſins de la progreſſion géometrique, en ôtant les moindres, de ceux qui ſont immédiatement plus grands ; les quadrilateres $CPGA$, $AGFf$ ſeront égaux.

COROLLAIRE II.

636. IL ſuit de là que les ſommes de tous ces petits quadrilateres priſes de ſuite, font une progreſſion arithmetique, dont la difference eſt l'un de ces petits quadrilateres égaux. Par exemple nommant 1 l'un de ces quadrilateres, la ſomme des deux ſera 2, celle des trois ſera 3, & ainſi de ſuite.

SECONDE SUPPOSITION.

637. ON exprimera tous les nombres qui ſeront plus grands que l'unité par l'unité plus la quantité dont ils ſurpaſſent l'unité, & ceux qui ſeront moindres que l'unité ſeront exprimés par l'unité moins la quantité dont l'unité les ſurpaſſe ; ainſi 9, 10, &c. ſeront exprimés par $1+8$, $1+9$, &c. $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ ſeront exprimés par $1-\frac{8}{9}$, $1-\frac{9}{10}$, &c. & en general tout nombre qui ſurpaſſe l'unité ſera exprimé par $1+n$; & ceux qui ſont moindres par $1-n$.

On nommera auſſi *reciproques* les termes de la progreſſion géometrique, entre leſquels l'unité eſt moyenne proportion-

nelle ; ainſi $\frac{1}{3}$ eſt réciproque à 3, car $\frac{1}{3}$. 1 :: 1. 3 ; & en general $\frac{1}{1+n}$ eſt réciproque à $1+n$, car $\frac{1}{1+n}$. 1 :: 1. $1+n$.

COROLLAIRE I.

638. IL ſuit de là & des Corollaires qui précedent, que ſi l'on prend quatre termes de la progreſſion géometrique qui ſoient en proportion, les quatre ſommes des quadrilateres hyperboliques priſes depuis le point G de l'unité, qui auront ces quatre termes moins KG pour baſes, feront une proportion arithmetique. Par exemple ſi l'on prend $KF.KI::KL.Kn$, les quatre ſommes des quadrilateres hyperboliques priſes depuis AG, ſçavoir $AGFf$, $AGIi$, $AGLl$, $AGnm$, feront une proportion arithmetique ; & de même ſi $KR.KQ::KQ.KP$, les quadrilateres hyperboliques ſur GR, GQ, GP feront une proportion arithmetique ; car quatre termes de la progreſſion géometrique, comme KF, KI, KL, Kn, ne ſçauroient faire une proportion géometrique qu'il n'y ait un égal nombre de petits raports égaux à celui qui régne dans la progreſſion entre le premier KF & le ſecond KI, & entre le troiſiéme KL & le quatriéme Kn ; ainſi il y a le même nombre de ces petits raports égaux entre F & I, qu'entre L & n ; il y a donc le même nombre de petits quadrilateres hyperboliques égaux ſur FI & ſur Ln ; par conſéquent l'excès de $AGIi$ ſur $AGFf$ eſt égal à l'excès de $AGnm$ ſur $AGLl$; ce qui fait une proportion arithmetique. Il eſt évident que la même démonſtration convient à quatre termes tels qu'on voudra de la progreſſion géometrique, qui feront une proportion géometrique.

COROLLAIRE II.

639. QUAND deux termes de la progreſſion géometrique ſont réciproques, comme KR (égal par exemple à $\frac{1}{3}$), & KI (égal à 3), les deux quadrilateres hyperboliques ſur GR, GI, qui ſont ſur les differences GR & GI de l'unité à ces deux termes, ſont égaux : car $KR.KG::KG.KI$ par la ſuppoſition ; donc par le Corollaire précedent le quadrilatere ſur GR eſt égal au quadrilatere ſur GI.

TROISIE'ME SUPPOSITION OU DE'FINITION.

640. SI l'on conçoit écrits de ſuite ſur une même ligne, ou ſi l'on veut dans une même colonne, tous les nombres depuis zero

de la progreſſion géometrique dans laquelle régne le raport qui ne différe du raport d'égalité que d'une grandeur infiniment petite, & qui vont en augmentant, de maniere que l'unité ſe trouve placée entre tous les nombres moindres que l'unité & les nombres plus grands, c'eſt-à-dire que l'unité ſoit précedée de tous les premiers mis de ſuite, & ſuivie des autres auſſi mis de ſuite; & que ſur une ligne au-deſſus, ou dans une colonne à côté, l'on conçoive zero écrit vis-à-vis de l'unité; la valeur d'un des petits quadrilateres hyperboliques écrite à côté du nombre immédiatement plus grand que l'unité avec le ſigne +, & encore vis-à-vis du nombre immédiatement moindre que l'unité avec le ſigne —; la ſomme de deux de ces petits quadrilateres écrite vis-à-vis du ſecond nombre plus grand que l'unité avec le ſigne +, & encore vis-à-vis du ſecond nombre moindre qui la précede avec le ſigne —; la ſomme de trois quadrilateres écrite vis-à-vis du troiſiéme nombre qui ſuit l'unité avec +, & encore vis-à-vis du troiſiéme qui la précede avec —; & ainſi de ſuite; la ſeconde ligne ou la ſeconde colonne contiendra une progreſſion arithmetique, dont chaque terme s'appelle *le logarithme hyperbolique* du terme de la progreſſion géometrique qui eſt vis-à-vis, qu'on appellera ſon terme *correſpondant*; zero ſera le logarithme de l'unité, & ſe trouvera entre les logarithmes négatifs qui le précedent, & qui ſont les logarithmes des nombres moindres que l'unité, & entre les poſitifs qui ſont les logarithmes des nombres plus grands que l'unité.

Corollaire où l'on explique l'uſage des logarithmes.

641. L'USAGE des logarithmes eſt pour diminuer la peine du calcul dans les Mathématiques practiques, comme dans la Géometrie practique, l'Aſtronomie, &c. on change par leur moyen les multiplications & les formations des puiſſances en de ſimples additions, & les diviſions & les extractions des racines en de ſimples ſouſtractions; car le quatriéme terme $b+a$ d'une proportion arithmetique dont zero eſt le premier terme o, a; b, $b+a$ étant la ſomme des deux moyens a, b; & le troiſiéme terme a d'une proportion arithmetique dont zero eſt le dernier terme $b+a$, b; a, o étant la différence du premier terme $b+a$ & du ſecond b, c'eſt-à-dire $b+a-b=a$; quand on a une multiplication à faire, c'eſt-à-dire

qu'il faut trouver le quatriéme terme d'une proportion géometrique dont l'unité eſt le premier terme, & les deux nombres à multiplier le ſecond & le troiſiéme terme ; il n'y a qu'à prendre la ſomme des deux logarithmes du ſecond & du troiſiéme terme, & chercher dans la table le logarithme qui eſt égal à cette ſomme ; le nombre qui eſt vis-à-vis ſera le produit que l'on cherche : Et de même quand on aura une diviſion à faire, c'eſt-à-dire qu'il faudra trouver le 3e terme d'une proportion géometrique dont le nombre à diviſer eſt le 1er terme ; le diviſeur le 2e terme ; le quotient que l'on cherche le 3e terme, & zero le 4e terme ; il n'y aura qu'à ôter le logarithme du 2e terme du logarithme du 1er terme, & le logarithme qui ſera égal au reſte, ſera vis-à-vis du 3e terme, qui eſt le quotient que l'on cherche.

642. Les formations des puiſſances n'étant que des multiplications réïterées, & les extractions des racines des diviſions réïterées pour trouver la 2e, la 3e puiſſance, &c. d'un nombre ; il n'y aura qu'à prendre le double, le triple du logarithme de ce nombre, &c. & le chercher dans la colonne des logarithmes, le nombre qui ſe trouvera vis-à-vis ſera la 2e, la 3e puiſſance, &c. du nombre propoſé. De même pour trouver la racine 2e, 3e, &c. d'un nombre, il n'y aura qu'à prendre la moitié, le tiers, &c. du logarithme de ce nombre, & le chercher dans la colonne des logarithmes, & le nombre qui ſera vis-à-vis ſera la racine 2e, 3e, &c. que l'on cherche. Ce Corollaire eſt une ſuite de la notion des logarithmes, & de ce que quatre termes de la progreſſion géometrique correſpondante à la progreſſion arithmetique des logarithmes, faiſant une proportion géometrique, leur quatre logarithmes font une proportion arithmetique.

Les formules pour trouver les logarithmes hyperboliques.

643. POUR trouver le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque plus grand que l'unité, qu'on marquera par $1+n$, il faut imaginer que ce nombre eſt une coupée, par exemple KF ſur l'aſymptote KL, & l'ordonnée correſpondante eſt Ff, que ſa premiere partie 1 eſt KG, & ſa ſeconde partie $n = GF$; & la queſtion ſe réduira à trouver le quadrilatere $AGFf$, qu'on nommera l, c'eſt-à-dire logarithme. L'équation à l'hyperbole équilatere eſt $\frac{KG \times GA}{KF} = fF = \frac{1}{1+n}$. FIGURE XLVII.

La differentielle de $KF = 1 + n$ eſt dn ; ainſi l'élement du quadrilatere l eſt $dl = \frac{1\,dn}{1+n}$, qui ſe réduit à $\frac{dl+n\,dl}{dn} - 1 = 0$, Or on trouvera comme dans *l'article* 227, où eſt ce même exemple, excepté que (l) y eſt nommée x ; dl, dx ; n, y ; & dn, dy ; le logarithme $l = 1n - \frac{1}{2}nn + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 -$ &c. C'eſt *la formule* pour trouver le logarithme d'un nombre qui ſurpaſſe l'unité.

Quand le nombre propoſé ſera moindre que l'unité, on le nommera $1 - n$; & l'on aura l'equation $\frac{dl-n\,dl}{dn} - 1 = 0$; & l'on trouvera par la même méthode le logarithme $l = 1n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + n^4 + \frac{1}{5}n^5 +$ &c. C'eſt *la formule* pour trouver le logarithme d'un nombre moindre que l'unité ; il faudra ſeulement, quand on l'aura trouvé, mettre le ſigne — audevant de la ſomme qui contiendra tel nombre que l'on voudra des termes *de la ſuite* que fera trouver la formule.

USAGE DES FORMULES.

644. IL n'y a qu'à ſubſtituer le nombre dont on cherchera le logarithme à la place de $1 + n$ ou de $1 - n$ dans les formules, ou ſimplement la difference de ce nombre d'avec l'unité à la place de n ; & la ſomme qu'on trouvera ſera le logarithme. Mais comme il faut que les termes de la formule aillent en diminuant, & que les logarithmes d'un nombre moindre que l'unité, & celui de ſon reciproque plus grand que l'unité, ſont égaux ; il vaudra mieux ſe ſervir de la ſeconde formule, & mettre le nombre repréſenté par $\frac{1}{1+n}$ à la place de $1 - n$ dans la ſeconde formule ; c'eſt-à-dire qu'il y faut mettre $-\frac{n}{1+n}$ à la place $-n$; car $\frac{1}{1+n} = 1 - \frac{n}{1+n}$.

La maniere de réduire les logarithmes hyperboliques aux logarithmes ordinaires des tables.

645. DANS les logarithmes des tables, le logarithme du nombre 10 eſt l'unité précedée d'un grand nombre de zeros ; les logarithmes de 100, de 1000, de 10000, &c. ſont 2, 3, 4, &c. precedés du même nombre de zeros. Or en concevant les logarithmes ordinaires des tables écrits dans une 3e colonne à côté des logarithmes hyperboliques correſpondans, il eſt clair que le logarithme hyperbolique de 10, (qu'on trouvera 2, 302585092994045684017991454 68, ſi l'on veut le calculer

calculer jusqu'à trente rangs), est au logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque, par exemple de 30, comme le logarithme des tables qui convient à 10, qui est l'unité précedée de tel nombre de zeros qu'on voudra, est au logarithme du même nombre 30 qu'il faut mettre dans les tables. Ainsi on réduira par cette proportion les logarithmes hyperboliques à ceux des tables.

Quand on a le logarithme l *d'un nombre, trouver ce nombre.*

146. IL faut se servir de la méthode du retour des suites 234 & 235, où l'on a mis ce même Problême pour exemple; c'est-à-dire, il faut par le retour des suites, ayant $l = n - \frac{1}{2}nn + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4$, &c. ou $l = n + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{3}n^3 +$ &c. trouver la valeur de n exprimée par l & par les puissances de l, & y ajouter l'unité pour avoir la valeur du nombre $1 + n$, ou retrancher la suite qu'on trouvera de l'unité pour avoir le nombre $1 - n$; & l'on trouvera $1 + n = 1 + \frac{l}{1} + \frac{1}{2}ll + \frac{1}{2\times3}l^3 + \frac{1}{2\times3\times4}l^4 +$ &c. & $1 - n = 1 - \frac{l}{1} + \frac{1}{2}ll - \frac{1}{2\times3}l^3 + \frac{1}{2\times3\times4}l^4 -$ &c. On trouveroit les mêmes formules par les équations $dl = \frac{dn}{1+n}$, & $dl = \frac{dn}{1-n}$, en réduisant la 1re à $1 + n - \frac{dn}{dl} = 0$, & la 2e à $1 - n - \frac{dn}{dl} = 0$, & y appliquant ensuite la méthode du *second Probl.* 175.

Avertissement.

On ne s'arrêtera pas ici à donner plusieurs moyens de faciliter & d'abreger le calcul de ces logarithmes, étant obligé d'être court; pour dire cependant beaucoup de choses en peu de mots, on s'attache dans ces usages de l'Analyse à faire concevoir clairement aux Lecteurs les méthodes generales qui leur feront résoudre une infinité de Problêmes.

REMARQUE.

147. LEs lignes droites peuvent avoir leurs logarithmes hyperboliques comme les nombres; pour le concevoir clairement il faut mener la droite KST, qui fasse avec l'asymptote KG tel angle qu'on voudra; prendre sur cette ligne la partie déterminée KS telle qu'on voudra, & la nommer a; & nommant l'indéterminée ST (x), $a + x$ représentera telle droite qu'on voudra. Il faut mener SG au point G où se termine l'unité KG, & par chacune des ST (x), mener TF parallele FIGURE XLVII.

à SG; & le quadrilatere $AGFf$ ſera le logarithme hyperbolique de la ligne KT. Si l'on prenoit $Kt(a-x)$, ſon logarithme ſeroit $AGPC$. Or $KS(a).KG(1)::ST(x).GF=\frac{x}{a}$; ce qui donne $KF=1+\frac{x}{a}=\frac{a+x}{a}$, & $Ff=\frac{a}{a+x}$, & la differentielle du logarithme $AGFf(dl)=\frac{a\,dx}{a+x}$, qui ſe réduit à $\frac{adl+x\,dl}{dx}-a=0$; d'où il eſt facile par *le Problême art.* 175, de trouver le logarithme l de la ligne $a+x$. Ce qu'on peut aiſément appliquer à la ligne $Kt(a-x)$; mais la differentielle du logarithme négatif $AGPC$ ſera négative & égale à $\frac{-adx}{a-x}$.

Trouver l'aire d'un ſecteur elliptique aKG *exprimé par la tangente* aT *au ſommet* a *du grand axe* Ka.

684. LE ſecteur GKa, en ſuppoſant les deux tangentes aT, GT, Pl. XLVI. eſt partagé par la moitié par KT; car en concevant les deux ordonnées GM, aM au demi-diametre $K\kappa$, l'on aura pour
*386. l'une & l'autre ordonnée * $KT.K\kappa::K\kappa.KM$; ainſi le point M leur eſt commun, & elles ſont une même droite, & $K\kappa$ partage cette droite aG par la moitié en M, d'où l'on déduit aiſément que $K\kappa$ partage le ſecteur entier aKG en deux moitiés. Pour trouver la premiere moitié $aK\kappa$, on ſuppoſera la tangente $AT=t$, la moitié Ka du premier axe égale à r, la moitié KD du ſecond axe égale à 1. On tirera Kt infiniment proche de KT, & les petits arcs $t\lambda$, $\kappa\varphi$ du centre K avec les rayons Kt, $K\kappa$; & l'on aura les triangles rectangles ſemblables KaT, $t\lambda T$, qui donneront $KT(\sqrt{\overline{Ka}^2+\overline{aT}^2}=\sqrt{rr+tt}).Ka(r)::Tt(dt).t\lambda=\frac{r\,dt}{\sqrt{rr+tt}}$.

En nommant $\kappa b(y)$, l'on aura à cauſe des triangles ſemblables KaT, $Kb\kappa$; $\overline{aT}^2(tt).\overline{\kappa b}^2(yy)::\overline{KA}^2(rr).\overline{Kb}^2=\frac{rryy}{tt}$.
*380. On aura auſſi par la proprieté de l'ellipſe * $\overline{KD}^2(1).\overline{\kappa b}^2(yy)::\overline{Ka}^2(rr).\overline{Ka}^2-\overline{Kb}^2=rr-\frac{rryy}{tt}$; d'où l'on déduit $rryy=rr-\frac{rryy}{tt}$, & $yy=\frac{ttrr}{ttrr+rr}=\frac{tt}{tt+1}$; ainſi $\overline{K\kappa}^2=\overline{Kb}^2+\overline{\kappa b}^2=\frac{rr+tt}{tt+1}$, & $K\kappa=\sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}}$.

Les petits ſecteurs ſemblables $tK\lambda$, $\kappa K\varphi$ donneront $Kt(\sqrt{rr+tt}).t\lambda(\frac{rdt}{\sqrt{rr+tt}})::K\kappa(\sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}}).\kappa\varphi=rdt\times\sqrt{\frac{1}{tt+1\times rr+tt}}$.

Par conſequent le petit ſecteur $\chi K\kappa$, qui eſt l'élement du

secteur aKx, est $K\chi \times \frac{1}{2}x\phi = rdt \times \sqrt{\frac{1}{tt+1 \times rr+tt}} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{rr+tt}{tt+1}} = \frac{\frac{1}{2}rdt}{tt+1}$; ainsi nommant s le secteur aKx, on aura $ds = \frac{\frac{1}{2}rdt}{tt+1}$, qui se réduit à $\frac{tds+ds}{dt} - \frac{1}{2}r = 0$.

On trouvera par cette équation, en employant la méthode *du Problème*, *article* 175, le secteur a$Kx(s) = \frac{1}{2}r \times \overline{1t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 +}$ &c. & le secteur aKG, double de aKx, $= r \times \overline{1t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -}$ &c.

On trouvera par la même méthode précisément la même suite pour un secteur semblable du cercle, & la même suite aussi, en rendant tous les termes positifs, pour un secteur semblable hyperbolique, dont le sommet est au centre de l'hyperbole, en supposant l'hyperbole équilatere, ou, si elle ne l'est pas, en supposant son second axe $= 1$.

Un secteur elliptique AFC *dont le sommet* F *est à un des foyers* F *de l'ellipse, ou à un autre point du premier axe* AKa, *étant regardé comme connu, trouver l'ordonnée* CB *du point* C *qui est l'extrémité de l'arc* AC *de l'ellipse qui fait la base du secteur.*

349. ON suppose la moitié KA du premier axe connue $= q$; la moitié KD du second axe, aussi connue, $= r$; la partie FA du grand axe connue, $= t$; l'ordonnée inconnue $CB = x$; le secteur AFC regardé comme connu, mais pourtant indéterminé, afin qu'il puisse représenter tel secteur qu'on voudra, égal à $\frac{1}{2}y$. Fig. XLVI.

380. Par la proprieté de l'ellipse * $\overline{KD}^2 (rr) . \overline{KA}^2 (qq) :: \overline{KD}^2 - \overline{BC}^2 (rr - xx) . \overline{KB}^2 = \frac{qq}{rr} \times \overline{rr - xx}$; ainsi $KB = \frac{q}{r}\sqrt{\overline{rr - xx}}$; $KA - KB = BA = q - \frac{q}{r}\sqrt{\overline{rr - xx}}$, & $FA - BA = FB = t - q + \frac{q}{r}\sqrt{\overline{rr - xx}}$. Or la difference Bb de $BA = q - \frac{q}{r}\sqrt{\overline{rr - xx}}$, est $+ \frac{qxdx}{r\sqrt{\overline{rr - xx}}}$; la multipliant par l'ordonnée $BC(x)$, on aura $\frac{qxxdx}{r\sqrt{\overline{rr - xx}}} = \frac{2qxxdx}{2r\sqrt{\overline{rr - xx}}}$ pour l'élement $BC\,cb$ du demi-segment BCA. Multipliant aussi FB par $\frac{1}{2}BC$, on aura le triangle $FBC = \frac{trx - qrx + qx\sqrt{\overline{rr - xx}}}{2r}$. Sa differentielle sera donc, étant réduite au même dénomina-

teur, $\frac{rr-qr\times\sqrt{rr-xx}+qrr-2qxx\times dx}{2r\sqrt{rr-xx}}$. Mais le triangle FBC & le demi-ségment BCA faisant ensemble le secteur CFA ($\frac{1}{2}y$), la somme de leurs différentielles doit être égale à la différentielle ou à l'élement du secteur CFA qui est $\frac{1}{2}dy$. On aura donc cette équation $\frac{qr+\overline{t-q}\times\sqrt{rr-xx}}{2\sqrt{rr-xx}}dx=\frac{1}{2}dy$, qui se réduit à $\frac{dx}{dy}\times qr+\overline{t-q}\times\sqrt{rr-xx}-\sqrt{rr-xx}=0$. C'est l'équation par le moyen de laquelle on trouvera, comme dans *l'article* 231, qui contient ce même exemple, la valeur de l'ordonnée $CB\ (x)=\frac{y}{t}-\frac{qy^3}{6rrt^4}+\frac{10qq-9qt}{120r^4t^7}y^5-\frac{280t^3+504qt-225qt}{5040r^6t^{10}}y^7+$ &c. *Ce qu'il falloit trouver.*

On auroit pû trouver l'élement du même secteur en cherchant immédiatement le petit secteur $CFc=Cg\times\frac{1}{2}Fc$; mais le calcul étant bien plus embarrassé, on s'est déterminé à la voye qu'on a suivie, où il est bien plus court & plus facile.

AVERTISSEMENT.

650. LE Problême précedent donne la résolution directe d'un Problême d'Astronomie dont avoit besoin *Kepler*, & qu'il n'a pû trouver que par des voyes indirectes. Après avoir fait voir *dans le chapitre* 59 *de son Astronomie nouvelle touchant les mouvemens de Mars*, que cette planette décrit une ellipse ADa FIG. XLVI. dont le Soleil occupe l'un des foyers F, que le temps entier de son mouvement moyen autour du Soleil, par exemple depuis le point A où elle est plus éloignée du Soleil, jusqu'à son retour à ce point, doit être mesuré par l'aire entiere de l'ellipse qu'on peut concevoir exprimée par le nombre 360, & chaque partie du même temps par l'aire d'un secteur, comme CFA de la même ellipse dont le sommet est au foyer F, & qui sera une des parties de 360, nommant chacun de ces secteurs CFA *l'anomalie moyenne*, il falloit trouver l'angle CFA de ce secteur au foyer F, ce qu'il nomme *l'anomalie veritable*. Le Problême précedent fait trouver cet angle CFA pour tel secteur CFA qu'on voudra assigner; car nommant le secteur $\frac{1}{2}y$, l'on trouve par le Problême précedent la valeur de l'ordonnée $BC\ (x)$ qui est un côté du trian-

gle rectangle FBC, & $BC(x)$ étant connue, on trouve le ſecond côté $FB = t - q + \frac{q}{r}\sqrt{rr - xx}$; & l'on aura par conſequent l'angle CFA *qu'il falloit trouver.*

1. 84. En prolongeant BC juſqu'au point H de la circonference AIa qui a pour diametre le grand axe Aa, l'on aura * $BC.BH :: KD.KI = KA$; ce qui fera auſſi trouver BH & l'angle HFA, que cherchoit auſſi *Kepler.*

REMARQUE.

LES exemples qu'on a mis pour trouver l'aire des courbes par l'élement de cette aire, & pour trouver les lignes inconnues qui entrent ou qu'on peut faire entrer dans cet élement, ſuffiſent pour faire voir clairement qu'on trouvera de la même maniere les aires des autres courbes par leurs élemens, & qu'on trouvera auſſi les lignes inconnues qui entrent dans ces élemens ; ce qu'on doit auſſi entendre des élemens des ſolides & des ſurfaces courbes.

TROISIÈME PARTIE,

Où l'on fait voir l'usage de l'Analyse pour découvrir les regles du calcul integral, & où l'on explique les usages de ce calcul.

PREMIERE SECTION,

Où l'on fait voir l'usage de l'Analyse pour trouver les regles du calcul integral.

PREMIERE DÉFINITION.

652. QUAND on a une differentielle quelconque, la maniere de trouver la grandeur entiere ou l'integrale dont elle est la differentielle, est ce qu'on appelle *le calcul integral.*

PREMIERE PROPOSITION FONDAMENTALE.

653. QUAND une grandeur differentielle est incomplexe, qu'elle ne contient qu'une seule changeante x multipliée ou divisée par une constante, &, si c'est une fraction, que le dénominateur ne contienne que des constantes, on en trouve toujours l'integrale, 1°. en augmentant dans la differentielle donnée l'exposant de la changeante d'une unité, 2°. en divisant ensuite la differentielle par l'exposant de la changeante ainsi augmenté de l'unité & multiplié par la differentielle dx de
532. la changeante x lineaire; car le quotient sera l'integrale.

Ainsi $axdx$ a pour integrale $\frac{a}{2}x^2$: $\frac{a}{b}x^2dx$ a pour integrale $\frac{a}{3b}x^3$: $\frac{4x^3dx}{\sqrt{aa-bb}}$ a pour integrale $\frac{x^4}{\sqrt{aa-bb}}$: $\sqrt[3]{\frac{aa}{bb}} \times x^5\,dx$ a pour integrale $\frac{1}{6}x^6 \times \sqrt[3]{\frac{aa}{bb}}$: $ax^{-1}dx$ a pour integrale $\frac{a}{0} = \infty$; c'est-à-dire, la méthode donne une integrale infinie, ou plutôt elle ne fait rien découvrir; il faut avoir recours à d'autres manieres de trouver l'integrale: en general $nax^{n-1}dx$ a pour integrale ax^n; & $ax^n dx$ a pour integrale $\frac{a}{n+1}x^{n+1}$. Cette proposition est une suite évidente du calcul differen-
532. tiel. Il faut faire ici la même remarque qu'on a faite dans l'art. 533.

Corollaires de la premiere propoſition.

I.

54. QUAND on a une grandeur differentielle complexe qui n'eſt élevée à aucune puiſſance, & que tous les termes n'ont chacun qu'une ſeule changeante élevée dans ce terme à quelque puiſſance que ce puiſſe être, on en peut toujours trouver l'integrale : Par exemple l'integrale de $ax^3dx - bbxxdx + c^3ydy - e^4dx$ eſt $\frac{a}{4}x^4 - \frac{bb}{3}x^3 + \frac{c^3}{2}yy - e^4x$; car chaque terme ſe peut regarder comme s'il étoit ſeul.

S'il y avoit des fractions, & qu'elles n'euſſent au dénominateur que des conſtantes, on en trouveroit de même les integrales ; ainſi $\frac{a}{b}xdx - \frac{cc}{aa-bb}ydy$ a pour integrale $\frac{a}{2b}x^2 - \frac{cc}{2a^2-2b^2}yy$.

II.

55. Quand une differentielle dx eſt multipliée par la puiſſance d'une grandeur complexe entiere, ou qui n'a que des conſtantes au dénominateur, & que l'expoſant de la puiſſance eſt un nombre entier poſitif, & qu'il n'y a qu'une même changeante x, on en peut toujours trouver l'integrale par la premiere propoſition, en élevant la grandeur complexe à cette puiſſance. Si l'on a $dx \times \overline{a + \frac{b}{c}x}^2$, il faut la réduire à $\overline{a^2 + \frac{2abx}{c} + \frac{bbxx}{cc}} \times dx$, & l'on trouvera enſuite que l'integrale eſt $a^2x + \frac{abxx}{c} + \frac{bb}{3cc}x^3$.

III.

56. Mais quand une differentielle dx eſt multipliée par une grandeur complexe élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif au-deſſus de l'unité, on en trouvera l'integrale ſans l'élever à cette puiſſance, & ſi elle y étoit élevée, il faudroit la réduire à ſa racine, & lui donner l'expoſant négatif de la puiſſance : Par exemple $dx \times \overline{a^2 - bx}^{-2}$ a pour l'integrale $-\frac{1}{b} \times \overline{a^2 - bx}^{-1}$. Mais ſi l'on a $dx \times \overline{aa - 2ax + xx}^{-1}$, il faut la réduire à $dx \times \overline{a - x}^{-2}$, dont on trouvera par la 1re propoſition l'integrale $-\overline{a-x}^{-1} = -\frac{1}{a-x}$.

REMARQUE.

57. ON a dit que l'expoſant entier négatif de la grandeur complexe devoit être au-deſſus de l'unité ; car quand c'eſt l'unité l'on trouve zero ; ainſi il faut avoir recours à une

autre méthode, qu'on donnera dans la ſuite, pour trouver l'integrale dans ce cas; l'on doit auſſi remarquer que la grandeur complexe élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt négatif, ne doit avoir que deux termes dont l'un n'ait que des conſtantes, & l'autre la changeante x lineaire; car dans les autres cas on n'en peut pas trouver l'integrale par la ſeule premiere propoſition; il faut d'autres méthodes qu'on donnera dans la ſuite.

COROLLAIRE IV.

658. QUAND une differentielle eſt une grandeur incomplexe qui n'a qu'une changeante élevée à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt un nombre rompu poſitif ou négatif, on en trouve toujours l'integrale comme dans la premiere propoſition : Par exemple $dx\sqrt{ax} = \overline{ax}^{\frac{1}{2}}dx$ a pour integrale $\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+1} : \frac{dx}{\sqrt{ax}} = dx \times \overline{ax}^{-\frac{1}{2}}$ a pour integrale $2a^{-\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{\frac{x}{a}}$; & en general $ax^{\frac{1}{n}}dx$ a pour integrale $\frac{a}{\frac{1}{n}+1}x^{\frac{1}{n}+1} = \frac{na}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}$.

SECONDE DE'FINITION.

659. LORSQU'UNE grandeur complexe ou incomplexe eſt élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt une fraction poſitive ou négative, ou bien une grandeur entiere négative & même poſitive, on dira que cette grandeur eſt *ſous le ſigne*; & quand elle eſt en même temps multipliée par une grandeur entiere, on dira que cette grandeur qui eſt une partie du produit, eſt *hors du ſigne*. Ainſi dans $\frac{1}{2}\overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, $a^2x + bx^2$ eſt ſous le ſigne $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}\overline{a^2dx + 2bxdx}$ eſt hors du ſigne.

COROLLAIRE V.

660. LORSQU'ON a une grandeur complexe ſous le ſigne multipliée par une differentielle hors du ſigne, qui eſt la differentielle de cette grandeur complexe conſiderée hors du ſigne; on en peut toujours trouver l'integrale par la premiere propoſition; comme auſſi quand la differentielle hors du ſigne, telle qu'on l'a dite, eſt multipliée par une grandeur conſtante quelconque;

quelconque ; ainſi l'integrale de $\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{1}{3} \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$: l'integrale de $2xdx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt $\frac{2}{3} \times \overline{aa + xx}^{\frac{3}{2}}$.

REMARQUES.

I.

61. POUR connoître facilement les cas qui ſe rapportent au cinquiéme Corollaire, on peut y employer l'Analyſe, en ſuppoſant la grandeur complexe, qui eſt ſous le ſigne, égale à une ſeule lettre changeante z, & après avoir trouve la valeur de dz, il faudra changer toute l'expreſſion de la grandeur differentielle complexe qui eſt donnée en z & dz, & dans les cas qui ſe rapportent au cinquiéme Corollaire, on trouvera une expreſſion plus ſimple de la differentielle dont l'integrale ſe pourra aiſément trouver par la premiere propoſition ; & après l'avoir trouvée, il faudra y ſubſtituer les grandeurs ſuppoſées égales à z, & l'on aura l'integrale qu'il falloit trouver : Cette méthode que fournit l'Analyſe par ſes expreſſions indéterminées qui ſert à changer les differentielles données en d'autres équivalentes plus ſimples & plus propres à y pouvoir appliquer la regle de la premiere propoſition fondamentale, eſt de grand uſage pour découvrir les integrales les plus compoſées, comme on le verra dans la ſuite.

Par exemple pour trouver l'integrale de $\frac{1}{2} \times \overline{a^2dx + 2bxdx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$, on ſuppoſera $z = \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$; d'où l'on déduira $zz = a^2x + bx^2$, & $2zdz = a^2dx + 2bxdx$. On changera l'expreſſion donnée en z & dz, en ſubſtituant dans la propoſée $2zdz$ à la place de $a^2dx + 2bxdx$, & z à la place de $\overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$; on la changera, dis je, en cette équivalente z^2dz qui eſt très-ſimple ; on trouvera par la 1re propoſition que ſon integrale eſt $\frac{1}{3}z^3$. On ſubſtituera dans cette expreſſion la valeur de z^3, & l'on aura $\frac{1}{3}z^3 = \frac{1}{3} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{3}{2}}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée.

II.

62. Il faut quelquefois préparer les expreſſions differentielles pour les réduire au cas du cinquiéme Corollaire. Cette pré-

paration ſe fait ordinairement en multipliant la partie qui eſt hors du ſigne par la changeante x ou par une de ſes puiſſances, ou par une grandeur qui contient des conſtantes & la changeante x, & diviſant en même temps la partie qui eſt ſous le ſigne par cette même grandeur; ou bien au contraire en diviſant la premiere partie par cette grandeur, & multipliant en même temps la ſeconde par la même grandeur; par cette préparation la differentielle conſerve toujours la même valeur. Cette préparation s'exprime ordinairement en diſant qu'il faut mettre ſous le ſigne une grandeur qui eſt hors du ſigne, & ôter de deſſous le ſigne une grandeur qui y eſt, pour la mettre hors du ſigne, ſans changer la valeur de la grandeur propoſée.

Pour faire mieux concevoir la maniere de faire cette préparation, on la fera remarquer ſur un exemple ſimple & general, comme $x^m \times \overline{ax^n}^p$. Suppoſé qu'on veuille multiplier la partie x^m par x^q, il faut écrire x^{m+q}, & en même temps diviſer la ſeconde partie par x^q pour conſerver la même valeur; mais comme la ſeconde partie eſt ſous le ſigne dont l'expoſant eſt p, il ne ſuffit pas pour en faire la diviſion par x^q d'écrire $\overline{a\,x^{n-q}}^p$, mais il faut diviſer l'expoſant q par l'expoſant p, & l'on aura $x^{\frac{q}{p}}$; & pour diviſer enſuite la ſeconde partie par $x^{\frac{q}{p}}$, il faut écrire $\overline{a\,x^{n-\frac{q}{p}}}^p$, & la grandeur propoſée $x^m \times \overline{a\,x^n}^p$ ſera changée en $x^{m+q} \times \overline{a\,x^{n-\frac{q}{p}}}^p$ qui lui eſt équivalente. La raiſon de la ſeconde operation eſt que la grandeur qui diviſe la ſeconde partie doit être égale à celle qui a multiplié la premiere partie, & $\overline{x^{\frac{q}{p}}}^p = x^q$.

Si l'on vouloit diviſer la ſeconde partie par x^n, c'eſt-à-dire ôter x^n de deſſous le ſigne, & multiplier en même temps la premiere par x^n, il faudroit écrire $x^{m+np} \times \overline{ax^{n-n}}^p = x^{m+np} \times a^p = x^m \times \overline{ax^n}^p$. La raiſon en eſt que dans la ſeconde partie x^n eſt élevée à la puiſſance p; ainſi en diviſant la ſeconde partie par x^n, on la diviſe par x^{np}; il faut donc pour conſerver la même valeur multiplier la premiere par x^{np}.

Quand l'expoſant p du ſigne eſt une fraction, comme

dans $x^4 \times \overline{ax^8}^{\frac{1}{2}}$, & qu'on veut multiplier la premiere partie par x^3, & diviſer la ſeconde par x^3, l'on trouve $x^{4+3} \times \overline{ax^{8-\frac{3}{\frac{1}{2}}}}^{\frac{1}{2}} = x^7 \times \overline{ax^2}^{\frac{1}{2}}$, alors $\frac{q}{p}$ exprime une multiplication au lieu d'une diviſion, puiſque $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 2 \times 3 = 6$.

Quand l'expoſant p du ſigne eſt négatif, comme dans $x^4 \times \overline{ax^3}^{-\frac{1}{2}}$, & qu'on veut multiplier la premiere partie par x^2, & diviſer la ſeconde par x^2, on trouve $x^{4+2} \times \overline{ax^{3-\frac{2}{-\frac{1}{2}}}}^{-\frac{1}{2}} = x^6 \times \overline{ax^{3+4}}^{-\frac{1}{2}} = x^6 \times \overline{ax^7}^{-\frac{1}{2}} = x^4 \times \overline{ax^3}^{-\frac{1}{2}}$, alors $-\frac{q}{p} = -\frac{2}{\frac{1}{2}}$ devient $+\frac{q}{p} = +\frac{2}{\frac{1}{2}} = +4$; ce qui marque que dans ce cas la premiere & la ſeconde partie ſont multipliées par la même grandeur, parce que dans ce cas la grandeur propoſée eſt une fraction. Ces choſes ſuppoſées:

Pour réduire, par exemple, la differentielle $dx \times \overline{a^6 x^3 + 3a^4bx^4 + 3a^2bbx^5 + b^3x^6}^{\frac{1}{2}}$ au cas du cinquiéme Corollaire, je remarque que cette expreſſion eſt égale à celle-ci $dx \times \overline{\overline{a^2x + bx^2}^2 \times \overline{a^2x + bx^2}^1}^{\frac{1}{2}}$; je multiplie la grandeur qui eſt hors du ſigne par $\overline{a^2x + bx^2}^1$, & je diviſe en même temps celle qui eſt ſous le ſigne par la même grandeur, & je trouve $\overline{a^2xdx + bx^2dx} \times \overline{a^2x + bx^2}^{\frac{1}{2}}$ qui ſe rapporte au cinquiéme Corollaire.

De même pour réduire la differentielle $dx \times \overline{aax^2 + x^4}^{\frac{1}{2}}$, il faut multiplier dx par x, & diviſer par x la grandeur qui eſt ſous le ſigne, & elle ſe changera en $xdx \times \overline{aa + x^2}^{\frac{1}{2}}$ qui ſe raporte au 5e Corollaire. Au contraire pour réduire au 5e Corollaire la differentielle $\overline{3ax^3dx + 4x^4dx} \times \overline{ax + x^2}^{\frac{1}{2}}$, il faut diviſer la partie qui eſt hors du ſigne par x, & multiplier celle qui eſt ſous le ſigne par x, & elle ſera changée en ſon équivalente $\overline{3ax^2dx + 4x^3dx \times ax^3 + x^4}^{\frac{1}{2}}$, dont on trouvera

par le cinquiéme Corollaire l'integrale $\frac{2}{3} \times \overline{ax^3 + x^4}^{\frac{3}{2}}$.

On réduira de même au cinquiéme Corollaire la differentielle $\overline{adx + xdx} \times \overline{3a + 2x}^{-\frac{1}{2}}$, en multipliant la premiere partie & diviſant la ſeconde par x, & l'on aura l'équivalente $\overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}$, dont on trouvera l'integrale par le cinquiéme Corollaire ou par la premiere remarque, en ſuppoſant $\overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}} = z$, d'où l'on déduira $z^{-1} = \overline{3axx + 2x^3}^{\frac{1}{2}}$, & $z^{-2} = 3axx + 2x^3$; & $-2z^{-3}dz = 6axdx + 6x^2dx$, & $-\frac{1}{3}z^{-3}dz = axdx + x^2dx$; par conſequent $-\frac{1}{3}z^{-2}dz = \overline{axdx + x^2dx} \times \overline{3axx + 2x^3}^{-\frac{1}{2}}$. Or l'integrale de $-\frac{1}{3}z^{-2}dz$ eſt, par la premiere propoſition ou par le troiſiéme Corollaire, $\frac{1}{3}z^{-1}$; où ſubſtituant la valeur de z^{-1}, on trouvera $\frac{1}{3} \times \overline{3axx + 2x^3}^{\frac{1}{2}}$ pour l'integrale que l'on cherchoit.

On réduira au contraire la differentielle $ax^2dx \times \overline{a^2x^2 + x^4}^{-\frac{1}{2}}$ au cinquiéme Corollaire, en diviſant la premiere partie & multipliant la ſeconde par x, & l'on trouvera l'équivalente $axdx \times \overline{aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$, dont l'integrale eſt $a \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$.

III.

Où l'on explique la marque qui fait diſtinguer les cas où l'integrale qu'on trouve eſt complete; & la regle pour trouver quand elle ne l'eſt pas, la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou retrancher pour avoir l'integrale complete.

663. POUR faire voir aux Lecteurs la raiſon de la regle par laquelle on connoît ſi une integrale eſt complete, & la grandeur conſtante qu'il lui faut ajouter ou en retrancher quand elle ne l'eſt pas, afin de la rendre complete, en même temps qu'on expliquera cette regle; on leur fera remarquer qu'une differentielle complexe ou incomplexe, qui n'a qu'une même changeante x, peut être regardée comme l'élement de l'aire d'une courbe VDE dont x eſt la coupée, ou la partie changeante de la coupée quand elle contient une conſtante &.

FIGURE XLVIII.

une changeante, & dont la quantité multipliée par dx eſt l'ordonnée. Pour avoir l'équation de cette courbe VDE, il faut effacer dx de la differentielle propoſée, & ſuppoſer une changeante y ou z égale à la quantité qui reſte après en avoir effacé dx.

Par exemple on a trouvé * que l'élement de la longueur de la ſeconde parabole cubique AcC, dont l'équation eſt $x^3 = pyy$, étoit $dx \times \frac{1}{2\sqrt{p}} \sqrt{4p+9x} = dx \times \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, qui * 584.

exprime le petit arc cC; on peut regarder cette differentielle comme l'élement de la quadrature de l'aire d'une courbe VDE, dont x eſt la coupée ou la partie changeante de la coupée VAB, & $\frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$, l'ordonnée BE; & l'équation de cette courbe ſera $y = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$; & rendant cette équation commenſurable, on aura $yy = \frac{4p+9x}{4p}$, qui eſt l'équation d'une parabole ſimple VDE, dont la coupée VAB ſe trouvera (en comparant cette équation avec celle de l'art. 427, comme l'on a fait dans l'art. 442) égale à $\frac{4}{9}p + x$, c'eſt à-dire, la partie conſtante $\frac{4}{9}p$ eſt VA, & la partie changeante x eſt AB, & commence au point A. Le parametre $VP = \frac{9}{4p}$.

On remarquera ici que l'on dit que la rectification d'une courbe, ou la meſure de la ſolidité du corps formé par la révolution de cette courbe autour d'une ligne droite donnée, ou la meſure de la ſurface courbe de ce corps, dépend de la quadrature de la courbe qui a la même differentielle pour l'élement de ſon aire; ainſi la rectification de la ſeconde parabole cubique dépend de la quadrature de la parabole ſimple.

Il eſt évident que la differentielle propoſée, par exemple $dx \times \frac{1}{2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}$, qui eſt l'élement de la longueur de la parabole cubique, eſt auſſi l'élement de l'aire de la parabole ſimple $y = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$. L'integrale de cette differentielle, qu'on trouvera par le cinquiéme Corollaire, * ou * 660.

*661. par la premiere remarque * égale à $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}}$, doit exprimer la longueur AcC de la parabole cubique; elle doit auſſi exprimer l'aire $VABEDV$ de la parabole ſimple.

Pour voir à préſent ſi cette integrale exprime exactement la longueur AcC de la parabole cubique, on fera ce raiſonnement; la quantité qu'exprime cette integrale doit être égale à zero à l'origine A où commence la parabole cubique AcC, c'eſt-à-dire, elle doit être égale à zero à l'origine A des x, où $x = 0$. Il faut donc ſuppoſer dans l'integrale trouvée $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}}$, que $x = 0$, & ſi l'integrale devient elle-même zero par cette ſuppoſition, elle ſera exacte; ſi au contraire elle contient encore une grandeur conſtante après cette ſuppoſition, comme en effet on trouve en ſuppoſant $x = 0$, la grandeur conſtante $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p}^{\frac{3}{2}} = +\frac{8}{27}p$, il eſt clair que cette conſtante eſt de trop; ainſi il faut la retrancher, c'eſt-à-dire, l'écrire après l'integrale avec le ſigne —, ſi elle avoit le ſigne +; & avec le ſigne +, ſi elle avoit le ſigne —, afin qu'en la joignant avec un ſigne oppoſé à l'integrale trouvée, elle la rende égale à zero à l'origine des x, où la valeur de l'integrale trouvée doit être égale à zero. L'integrale exacte qui exprime la longueur de la parabole cubique AcC eſt donc $\frac{1}{27 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}p$.

Afin de prévenir une difficulté qui pourroit naître dans l'eſprit des Lecteurs, ſur ce que la même differentielle $dx \times \frac{1}{2 \times p^{\frac{1}{2}}} \times \overline{4p + 9x}^{\frac{1}{2}}$ a une integrale qui eſt trop grande de $\frac{8}{27}p$ pour exprimer la longueur de la parabole cubique; & qu'au contraire elle exprime exactement l'aire entiere $VABEDV$ de la parabole ſimple, on leur fera remarquer que ſi l'on vouloit examiner ſi l'integrale de cette differentielle eſt exacte par raport à l'aire de la parabole ſimple, il faudroit auſſi ne prendre l'aire qu'exprime l'integrale de

cette differentielle qu'à l'origine A des x, c'eſt-à-dire, ne prendre que l'aire $ABED$, & ſuppoſer que l'aire exprimée par l'integrale $\frac{1}{27\times p^{\frac{1}{2}}}\times\overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}}$ commence à l'origine A des x, & qu'elle eſt égale à zero au point A où $x=0$; & en ſuppoſant pour l'aire de la parabole ſimple comme on a fait pour la longueur de la parabole cubique, que $x=0$ dans l'integrale trouvée, on verra que l'integrale contient encore la conſtante $+\frac{8}{27}p$. Ce qui fait voir que l'aire $ABED$ exprimée par cette integrale eſt $\frac{1}{27\times p^{\frac{1}{2}}}\times\overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}p$.

En effet l'aire de la parabole ſimple étant égale aux deux tiers du rectangle de la coupée & de l'ordonnée *, l'aire * 597.

$VAD=\frac{2}{3}\times VA(\frac{4}{9}p)\times AD\left(\frac{1}{2\times p^{\frac{1}{2}}}\times\overline{4p}^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{8}{27}p$; &

l'aire $VABEDA=\frac{2}{3}\times VAB\,(\frac{4}{9}p+x)\times BE\left(\frac{\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}}{\overline{4p}^{\frac{1}{2}}}\right)$

$=\overline{\frac{1}{27\times 2\times p^{\frac{1}{2}}}\times 8p+\frac{1}{27\times 2\times p^{\frac{1}{2}}}\times\frac{2\times 27}{3}x}\times\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}=$

$\frac{1}{27\times p^{\frac{1}{2}}}\times\overline{4p+9x}\times\overline{4p+9x}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{27\times p^{\frac{1}{2}}}\times\overline{4p+9x}^{\frac{3}{2}}$.

D'où l'on voit clairement, 1°. qu'il n'y a que l'eſpace $ABED$ de la parabole ſimple qui commence à l'origine A des x qui ſoit égal à la longueur AcC de la ſeconde parabole cubique; 2°. qu'il faut ſuppoſer $x=0$ dans l'integrale qu'on trouve d'une differentielle propoſée pour avoir l'integrale complete, tant celle qui exprime la grandeur à qui appartient la differentielle propoſée (comme dans notre exemple, la longueur de la ſeconde parabole cubique,) que celle qui exprime l'aire de la courbe qui a la même differentielle propoſée pour l'élement de ſon aire, en ſuppoſant que cette aire commence à l'origine des x.

Comme l'on n'a pris cet exemple que pour faire concevoir clairement la regle, & qu'elle peut s'appliquer de même à tous les autres, on la mettra ici comme generale.

Regle pour connoître quand une integrale qui n'a qu'une même changeante eſt complete ; & quand elle ne l'eſt pas, pour connoître la grandeur conſtante qu'il faut lui ajouter ou en retrancher pour la rendre complete.

664. IL faut ſuppoſer la grandeur changeante x de l'integrale égale à zero ; & ſi l'integrale devient zero, c'eſt une marque qu'elle eſt exacte ; ſi après cette ſuppoſition de $x = 0$, il reſte une conſtante dans l'integrale, il faut la joindre avec un ſigne contraire à l'integrale qu'on a trouvée, & elle ſera l'integrale complete qu'on cherchoit.

On remarquera que dans les integrales des ſecondes differences, ce peut être une difference premiere ſuppoſée conſtante qui ſoit la grandeur qu'il faut ajouter à l'integrale trouvée, ou qu'il en faut ôter.

IV. REMARQUE.

665. QUAND on trouve une integrale négative, il faut la prendre non depuis l'origine, mais du côté oppoſé ; par exemple ſi l'origine des x eſt en A (fig. 49), & que l'équation de la courbe ECG par raport à l'aſymptote ABF ſoit, en nommant $AB(x)$, $BC(y)$; $1 = xxy$; l'élement de l'aire ſera $1 \times x^{-2}dx$, dont l'integrale eſt la quantité négative $-1x^{-1} = -\frac{1}{x}$, ce qui marque que l'aire qu'exprime cette integrale n'eſt pas $DABCE$, mais l'aire $CBFG$ qui commence à l'ordonnée $BC(y)$, & va vers BF qui eſt le côté oppoſé à l'origine A ; car alors les differentielles dx ſont négatives, ce qui marque que ces dx viennent de F vers B, & non pas de A vers B ; & qu'ainſi la ſomme des petits parallelogrames compoſée des ydx dont les $-dx$ ſont les baſes, qui eſt l'integrale, eſt ſur la ligne qui vient de F vers B ; ce qui eſt encore évident en ce que les x augmentant dans l'integrale $-\frac{1}{x}$, l'integrale devient plus petite, ce qui convient à l'aire $CBFG$, & non pas à l'aire $DABCE$, celle-ci devenant plus grande à meſure que les x augmentent.

FIGURE XLIX.

COROLLAIRE VI.

666. ON peut encore réduire quelques differentielles qui contiennent une grandeur complexe incommenſurable, à la propoſition fondamentale ou aux Corollaires qu'on en a déduits,

déduits, en rendant commenſurable la grandeur complexe qui ne l'eſt pas, ſans pourtant introduire de nouvelle incommenſurable. Par exemple pour réduire la differentielle $a^3x^{-1}dx \times \overline{ax-x^2}^{-\frac{1}{2}}$ à la premiere propoſition, on ſuppoſera la grandeur qui eſt ſous le ſigne $ax - x^2 = a^2x^2z^{-2}$; ce qui donnera $x = az^2 \times \overline{a^2+z^2}^{-1}$, $z = a \times x^{\frac{1}{2}} \times \overline{a-x}^{-\frac{1}{2}}$, $dx = 2a^3zdz \times \overline{a^2+z^2}^{-2}$; $\overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}} = a^2z \times \overline{a^2+z^2}^{-1}$; & la differentielle propoſée ſera changée, après avoir fait les ſubſtitutions, en cette équivalente $2a^3z^{-2}dz$, dont on trouvera par le troiſiéme Corollaire, ou par la premiere propoſition, que l'integrale eſt $-2a^3z^{-1}$; & ſubſtituant dans cette integrale la valeur de z^{-1}, on aura l'integrale $-2aax^{-\frac{1}{2}} \times \overline{a-x}^{\frac{1}{2}} = -2aa\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ de la differentielle propoſée $a^3x^{-1}dx \times \overline{ax-x^2}^{-\frac{1}{2}}$.

COROLLAIRE VII.

57. LE cinquiéme Corollaire peut être rendu plus general; quand la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne n'a que deux termes, dont l'un n'eſt qu'une grandeur conſtante. Par exemple $x^{n-}dx \times \overline{a+bx^n}^p$ eſt une expreſſion differentielle, où $x^{n-1}dx$ étant la difference du terme bx^n qui eſt ſous le ſigne, on en trouve l'integrale par la premiere propoſition, 1°. en augmentant l'expoſant p d'une unité, ce qui la fait devenir $x^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$; 2°. en diviſant cette differentielle par le produit de l'expoſant ainſi augmenté $p+1$, multiplié par la differentielle $bnx^{n-1}dx$ du terme bx^n; car le quotient $\frac{x^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{p+1}}{p+1 \times bnx^{n-1}dx} = \frac{1}{p+1 \times bn} \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$ eſt l'integrale de la differentielle propoſée.

On la trouve encore par la 1re remarque, en ſuppoſant $\overline{a+bx^n}^p = z$; ce qui donnera $a+bx^n = z^{\frac{1}{p}}$, $x^n = \frac{z^{\frac{1}{p}}-a}{b}$, $nx^{n-1}dx = \frac{1}{pb} \times z^{\frac{1}{p}-1}dz$; & la differentielle $x^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$

deviendra égale à $\frac{1}{pb^n} \times z^{\frac{1}{p}-1} \times z dz = \frac{1}{pb^n} \times z^{\frac{1}{p}} dz$, dont l'integrale eſt par la premiere propoſition $\frac{1}{\frac{1}{p}+1} \times bn \; z^{\frac{1}{p}+1}$; & en y ſubſtituant la valeur de z en x, on aura l'integrale $\frac{1}{\frac{1}{p}+1} \times bn \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$. Cela ſuppoſé, on peut étendre le cinquiéme Corollaire à tous les cas compris dans cette expreſſion $x^{qn} \times x^{n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^p = x^{qn+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^p$; où l'on voit que x^{n-1} eſt multipliée par x^{qn}, dont l'expoſant qn eſt ſuppoſé un multiple de n, c'eſt-à-dire q eſt ſuppoſé un nombre entier poſitif quelconque, comme 2, 3, 4, &c. car en ſuppoſant $\overline{a+bx^n}^p = z$, on aura $\frac{z^{\frac{1}{p}}-a}{b} = x^n$, $\frac{1}{bnp} z^{\frac{1}{p}-1} dz = x^{n-1} dx$, $\frac{\overline{z^{\frac{1}{p}}-a}^q}{b^q} = x^{qn}$; par conſequent $x^{qn+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{1}{bnp} \times z^{\frac{1}{p}} dz \times \frac{\overline{z^{\frac{1}{p}}-a}^q}{b^q}$. Or q étant un nombre entier, on peut toujours trouver l'integrale de cette differentielle, 1°. en élevant $\overline{z^{\frac{1}{p}}-a}^q$ à la puiſſance du nombre entier repreſenté par q, & multipliant enſuite chaque terme par $\frac{1}{b^{q+1}np} \times z^{\frac{1}{p}} dz$; 2°. en prenant par la premiere propoſition l'integrale de chaque terme; 3°. en réduiſant enſuite l'integrale trouvée par le moyen de z, à l'expreſſion dont la changeante eſt x.

Par exemple ſi la differentielle propoſée eſt $cx^{3n-1} dx \times \sqrt{a+bx^n} = cx^{2n+n-1} dx \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer $q=2$, $p=\frac{1}{2}$; par conſequent $\frac{1}{p}=2$, $z=\overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{b^{q+1}np} \times z^{\frac{1}{p}} dz \times \overline{z^{\frac{1}{p}}-a}^q = \frac{2c}{b^3n} \times z^2 dz \times \overline{z^2-a}^2 = \frac{2c}{b^3n} \times z^6 dz - 2az^4 dz + aaz^2 dz$, dont l'integrale eſt par la premiere propoſition, ou par le ſecond Corollaire, $\frac{2c}{b^3n} \times \frac{1}{3} aaz^3 - \frac{2}{5} az^5 + \frac{1}{7} z^7 =$

$\frac{1}{b^{3n}} \times \frac{2}{3}aa - \frac{4}{5}azz + \frac{2}{7}z^4 \times cz^3$, qui se réduit, en mettant les valeurs de $zz = a + bx^n$, & de $z^4 = aa + 2abx^n + bbx^{2n}$ dans le 2e & le 3e terme, à $\frac{1}{b^{3n}} \times \frac{16aa - 24abx^n + 30bbx^{2n}}{105} \times cz^3$; on laisse, pour abreger, z^3 à la place de $\overline{a+bx^n}^{\frac{3}{2}} = \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}+1}$.

REMARQUES.

I.

568. L'INTEGRALE de toutes les differentielles representées par $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$, où l'on suppose que q est un nombre entier positif, & par conséquent $q+1$ l'est aussi, a autant de termes multipliés par $\overline{a+bx^n}^{p+1}$, qu'il y a d'unités dans le nombre entier $q+1$. Il n'y a qu'à en faire soi-même quelques exemples pour en voir clairement la raison.

II.

569. Si l'expression differentielle étoit $cx^{m-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$, & que $\frac{m}{n}$ fut un nombre entier positif, cette expression seroit la même que $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$; car puisque $\frac{m}{n}$ est un nombre entier, il faut que m soit un multiple de n, qu'on peut supposer representé par $\overline{q+1} \times n$; ainsi $m - 1 = qn + n - 1$. De même si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier positif, l'expression $cx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ est encore la même que $cx^{qn+n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^p$; car $\frac{m+1}{n}$ ne peut pas être un nombre entier, que $m+1$ ne soit un multiple de n, qu'on peut supposer representé par $\overline{q+1} \times n$; ce qui donnera $m = qn + n - 1$.

III.

570. On peut par le Corollaire précedent, faire une table qui contienne les integrales d'une infinité de differentielles qui ont sous le signe une grandeur complexe de deux termes, ce qu'on appelle un binome; on en mettra seulement ici quelques exemples.

1. $cx^{n-1}dx \times \sqrt{a+bx^n}$ a pour integrale . $\frac{2c}{3bn} \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}+1}$
2. $cx^{2n-1}dx \times \sqrt{a+bx^n}$ . . $\frac{-4a+6bx^n}{15nbb} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}+1}$
3. $cx^{3n-1}dx \times \sqrt{a+bx^n}$ $\frac{16aa-24abx^n+30bbx^{2n}}{105nb^3} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}+1}$
4. $cx^{4n-1}dx \times \sqrt{a+bx^n}$ $\frac{-96a^3+144aabx^n-180abbx^{2n}+210b^3x^{3n}}{945nb^4} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}+1}$

On peut continuer ces exemples tant qu'on voudra, comme auſſi ceux qui ſuivent.

1. $cx^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$ a pour integrale . $\frac{2c}{bn} \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$

2. $cx^{2n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$ . . $\frac{-4a+2abx^n}{3nbb} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$

3. $cx^{3n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$. $\frac{16aa-8abx^n+6bbx^{2n}}{15nb^3} \times c \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$

IV. REMARQUE.

671. ON peut de même faire les formules des differentielles binomes, dont le ſigne radical eſt $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, &c. comme auſſi de celles dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif plus grand que l'unité, en remarquant, par exemple, que $cx^{n-1}dx \times \overline{aa+2abx^n+bbx^{2n}}^{-1}$, doit être réduite à $cx^{n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-2}$ & ainſi des autres.

USAGE DES FORMULES PRECEDENTES.

672. CES formules qui contiennent les integrales des differentielles binomes étant ainſi toutes préparées dans une table, ſervent à ceux qui s'appliquent à la réſolution des Problêmes par le calcul integral, pour trouver tout d'un coup par de ſimples ſubſtitutions les integrales des équations differentielles qu'ils trouvent en cherchant à réſoudre les problêmes, & à découvrir d'abord la réſolution de ceux dont les équations peuvent ſe rapporter à ces formules.

AVERTISSEMENT.

LES Lecteurs peuvent s'être formé une idée diſtincte de la maniere de trouver les integrales des differentielles les moins compoſées, & qui ſe peuvent facilement rapporter à la premiere propoſition fondamentale, par le détail où l'on eſt entré dans les Corollaires & les Remarques précedentes. Ils n'auront à préſent nulle peine à entendre la maniere de faire les formules generales des integrales des differentielles compoſées, qu'on va auſſi réduire, pour être court, à des formules générales.

TROISIE'ME DE'FINITION.

673. LORSQUE dans une grandeur complexe les expoſans des puiſſances de la changeante x qui diſtingue les termes, ſont

une progreſſion arithmetique, on l'appelle un *binome* quand il n'y a que deux termes; un *trinome* quand il y en a trois, & ainſi de ſuite. Ainſi $ax^{\circ} + bx^{n} + cx^{2n}$ eſt un trinome; mais $a + bx^{n} + cx^{3n}$ eſt un quadrinome; & il faut ſous-entendre le troiſiéme terme $\circ x^{2n}$ qui eſt zero, comme s'il y avoit $a + bx^{n} + \circ x^{2n} + cx^{3n}$.

74. On rapportera ici toutes les expreſſions des differentielles des grandeurs complexes à ces formules generales. Les binomes ſe rapporteront à $gx^{m}dx\overline{a+bx^{n}}^{p}$, les trinomes à $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}}^{p}$; & ainſi de ſuite; & $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}+cx^{3n}}^{p}$ + &c. repreſentera une grandeur complexe qui a des termes à l'infini. Les grandeurs $g,a,b,c,$&c. repreſenteront les coëficiens des differentielles particulieres; x repreſentera leur changeante; p repreſentera l'expoſant de la puiſſance de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne p, & ce ſera une fraction, ou un nombre entier négatif, car quand c'eſt un nombre entier poſitif l'on n'a pas beſoin des méthodes ſuivantes, la premiere propoſition ſuffit, comme l'on a vû dans le ſecond Corollaire.

75. Il peut auſſi y avoir dans une même differentielle pluſieurs grandeurs complexes multipliées les unes par les autres, comme $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}}^{p} \times \overline{c+ex^{n}+fx^{2n}}^{q}$. Quand dans ce cas l'expoſant de l'une de ces grandeurs complexes eſt l'unité poſitive, il eſt inutile de la marquer; par exemple ſi $p = 1$ la differentielle ſera $gx^{m}dx \times \overline{a+bx^{n}} \times \overline{c+ex^{n}+fx^{2n}}^{q}$. Dans ce même cas ſi les expoſans ſont négatifs dans l'une des grandeurs complexes, ils doivent auſſi être négatifs dans l'autre; & s'ils ſont poſitifs dans l'une, ils doivent auſſi l'être dans l'autre.

76. Les formules précedentes peuvent avoir deux formes ſans changer de valeur; la premiere eſt quand les expoſans n de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, ſont poſitifs; & c'eſt la forme qu'on leur a donnée dans les formules précedentes; la ſeconde eſt quand ces mêmes expoſans n ſont négatifs, & on les rend négatifs en diviſant la grandeur qui eſt ſous le ſigne par la changeante x élevée à la plus haute puiſſance qu'a cette même changeante ſous le ſigne, & multipliant en même temps la changeante x qui eſt hors du ſigne par la

même grandeur ; par exemple $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ peut avoir cette seconde forme $gx^{m+np}dx \times \overline{b+ax^{-n}}^p$. La 2e forme de $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ eſt $gx^{m+2np}dx \times \overline{c+bx^{-n}+ax^{-2n}}^p$; $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+\beta x^{2n}}^p \times \overline{c+ex^n+fx^{2n}+\gamma x^{3n}}^p$ peut avoir cette ſeconde forme $gx^{m+2n+3np}dx \times \overline{\beta+bx^{-n}+ax^{-2n}} \times \overline{\gamma+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n}}^p$, ce qui ſe fait 1°. en diviſant la premiere grandeur complexe $a+bx^n+\beta x^{2n}$ par x^{2n}, & multipliant en même temps $gx^m dx$ par x^{2n} ; 2°. en diviſant enſuite la ſeconde grandeur complexe par $x^{3n\times p}$, & multipliant en même temps gx^m déja devenue gx^{m+2n} par x^{3np} ; il en eſt de même des autres.

Exemples pour faire voir la maniere de réduire les differentielles particulieres aux Formules précedentes.

I.

677. ON réduira la differentielle $\frac{h^5}{x^5}dx \times \sqrt{ix+x^2} = h^5x^{-5}dx \times \overline{ix+x^2}^{\frac{1}{2}}$ à la formule $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, en diviſant la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par $x^{1\times\frac{1}{2}}$, & multipliant en même temps la grandeur qui eſt hors du ſigne par $x^{1\times\frac{1}{2}}$; (car x^1 ſous le ſigne eſt égal à $x^{1\times\frac{1}{2}}$; ainſi il faut multiplier la grandeur qui eſt hors du ſigne par $x^{1\times\frac{1}{2}}$) & l'on aura $h^5 x^{-\frac{9}{2}}dx \times \overline{i+x}^{\frac{1}{2}}$, où l'on voit que g de la formule eſt égale à h^5 ; $m = -\frac{9}{2}$; $a = i$; $b = 1$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$.

Pour réduire la même differentielle $h^5x^{-5}dx \times \overline{ix+x^2}^{\frac{1}{2}}$ à la ſeconde formule $gx^{m+np}dx \times \overline{b+ax^{-n}}^p$, l'on diviſera la grandeur qui eſt ſous le ſigne par $x^{2\times\frac{1}{2}}$, & on multipliera celle qui eſt hors du ſigne par $x^{2\times\frac{1}{2}}$, & l'on aura $h^5x^{-4}dx \times \overline{1+ix^{-1}}^{\frac{1}{2}}$; g de la formule $= h^5$; $m = -4$; $b = 1$; $a = i$; $n = -1$; $p = \frac{1}{2}$.

II.

Pour réduire $\frac{3h-ix^2}{x\sqrt{hx-ix^3+Kx}}dx = x^{-2}dx \times \overline{3h-ix^2} \times \overline{hx-ix^3+Kx^4}^{-\frac{1}{2}}$ à la formule $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+\beta x^{2n}} \times$

$\overline{c+ex^n+fx^{2n}+\gamma x^{3n}}^{p}$, il faut diviſer la grandeur qui eſt ſous le ſigne par $x^{1\times-\frac{1}{2}}$, & multiplier en même temps celle qui eſt hors du ſigne par $x^{1\times-\frac{1}{2}}$ & l'on aura $x^{-\frac{5}{2}}dx\times\overline{3h-ix^2}\times\overline{h+0x^1-ix^2+Kx^3}^{-\frac{1}{2}}$: g de la formule $=1$; $m=-\frac{5}{2}$; $a=3h$; $b=0$; $\beta=-i$; $c=h$; $e=0$; $f=-i$; $\gamma=K$; $p=-\frac{1}{2}$.

Pour réduire la même differentielle à la ſeconde forme de la même formule qui eſt $gx^{m+2n+3np}dx\times\overline{\beta+bx^{-n}+ax^{-2n}}\times\overline{\gamma+fx^{-n}+ex^{-2n}+cx^{-3n}}^{p}$, 1°. il faut diviſer la premiere grandeur complexe $\overline{3h-ix^2}$ par x^2, & multiplier en même temps la grandeur $x^{-2}dx$ par x^2. 2°. Il faut enſuite diviſer la ſeconde grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par x^4 élevée à la puiſſance $-\frac{1}{2}$, & multiplier en même temps la grandeur $x^{-2}dx$ par la même grandeur $x^{4\times-\frac{1}{4}}=x^{-2}$, & l'on aura $x^{-2}dx\times\overline{-i+3hx^{-2}}\times\overline{K-ix^{-1}+0x^{-2}+hx^{-3}}^{-\frac{1}{2}}$: m de la formule $=-2$; $\beta=-i$; $b=0$; $a=3h$; $\gamma=K$; $f=-i$; $e=0$; $c=+h$; $n=1$; $p=-\frac{1}{2}$.

Ces exemples ſuffiſent pour faire connoître la maniere de réduire les differentielles particulieres aux deux expreſſions équivalentes des formules, dans la premiere deſquelles les expoſans n, $2n$, &c. ſont poſitifs, & négatifs dans la ſeconde; on fera ſeulement remarquer qu'on peut auſſi réduire les differentielles incomplexes, comme $dx\sqrt{ax}=dx\times\overline{ax}^{\frac{1}{2}}$, aux complexes, en écrivant $x^0\times dx\times\overline{0+ax^1}^{\frac{1}{2}}$

PROBLÈME I.

78. *TROUVER les integrales des expreſſions generales des différentielles de la troiſiéme définition.*

PREMIERE METHODE.

1°. IL faut réduire en *ſuite* la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, & multiplier chaque terme de cette ſuite infinie par la grandeur qui eſt hors du ſigne.

Prenant pour exemple le binome $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, il faut réduire en *ſuite* la grandeur complexe $\overline{a+bx^n}^p$ par le moyen de la table de la page 410 ; & multiplier enſuite tous les termes par $gx^m dx$, & l'on aura $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = ga^p x^m dx + pga^{p-1} bx^{m+n} dx + p \times \frac{p-1}{2} ga^{p-2} b^2 x^{m+2n} dx + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times ga^{p-3} b^3 x^{m+3n} dx +$ &c.

2°. Il faut prendre par la 1re propoſition l'integrale de chaque terme de la differentielle ainſi réduite en *ſuite* ; ce qui donnera une nouvelle *ſuite*, qui eſt l'integrale de la differentielle propoſée. Dans notre exemple on aura S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{ga^p}{m+1} x^{m+1} + \frac{pga^{p-1}}{m+1+n} bx^{m+1+n} + \frac{p \times \frac{p-1}{2}}{m+1+2n} ga^{p-2} b^2 x^{m+1+2n} + \frac{p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}}{m+1+3n} ga^{p-3} b^3 x^{m+1+3n} +$ &c.

3°. Pour abreger cette expreſſion de l'integrale, il faut la diviſer par la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne p élevée à la puiſſance $p+1$, réduite auparavant en la *ſuite* qui lui convient par le moyen de la table de la page 410 ; le diviſeur ſera dans notre exemple $\overline{a+bx^n}^{p+1} = a^{p+1} + \overline{p+1} \times a^p bx^n + \overline{p+1} \times \frac{p}{2} a^{p-1} b^2 x^{2n} + \overline{p+1} \times \frac{p}{2} \times \frac{p-1}{3} a^{p-2} b^3 x^{3n} +$ &c. & faiſant la diviſion, on trouvera le quotient S. $\frac{gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p}{\overline{a+bx^n}^{p+1}} = \frac{g}{m+1 \times a} x^{m+1} - \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times a^2} gbx^{m+1+n} + \frac{\overline{m+1+pn+n} \times \overline{m+1+pn+2n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times \overline{m+1+2n} \times a^3} \times gb^2 x^{m+1+2n} -$ &c.

4°. L'integrale abregée ſera le quotient qu'on vient de trouver, au devant duquel on aura mis la grandeur complexe (qui eſt ſous le ſigne dans la differentielle propoſée) élevée à la puiſſance $p+1$; dans notre exemple l'integrale ſera S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \overline{\overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{g}{m+1 \times a} x^{m+1} - \frac{\overline{m+1+pn+n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n} \times a^2} \times gbx^{m+1+n}} +$ &c.

REMARQUE.

REMARQUE.

79. ON peut réduire $\overline{a+bx^n}^p$ & $\overline{a+bx^n}^{p+1}$ aux *ſuites* qui leur conviennent, en ſuppoſant que a eſt le premier terme du binome, & bx^n le ſecond terme; & c'eſt ainſi qu'on les a réduites dans les articles premier & troiſieme; ou bien en écrivant $\overline{bx^n+a}^p$, & $\overline{bx^n+a}^{p+1}$, où l'on prend bx^n pour le premier terme, & a pour le ſecond. Si l'on ſe ſert de cette ſeconde maniere dans le premier & le troiſiéme article, on trouvera une autre expreſſion de l'integrale de la differentielle $x^m dx \times \overline{bx^n+a}^p$; c'eſt cette ſeconde expreſſion de la même integrale qu'on donnera dans la méthode ſuivante.

AVERTISSEMENT.

CETTE méthode generale eſt facile à concevoir par l'exemple qu'on a ajouté en l'énonçant; elle réduit la differentielle propoſée à la premiere propoſition, de la même maniere qu'on y réduit les differentielles complexes élevées aux puiſſances dont l'expoſant eſt un nombre entier, comme on l'a enſeigné dans le ſecond Corollaire. * Mais le calcul en eſt ſi long même dans les binomes, & à plus forte raiſon quand la grandeur complexe a beaucoup de termes, qu'on eſt obligé d'avoir recours à d'autres méthodes, dont on mettra ici les principales. * 65 5.

SECONDE MÉTHODE.

Pour les binomes.

80. POUR trouver l'integrale de (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, 1°. il faut faire en ſorte que l'expoſant de la changeante x qui eſt hors du ſigne, ſoit moindre d'une unité que l'expoſant de la plus haute puiſſance de x ſous le ſigne, ſans pourtant que la differentielle change de valeur. Cela ſe fait par le moyen des indéterminées, en multipliant la changeante x^m qui eſt hors du ſigne par x élevée à une puiſſance dont l'expoſant ſoit l'indéterminée q, c'eſt à-dire par x^q, & diviſant en même temps la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne par la même x^q, & l'on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (B) qx^{m+} dx \times$

$\overline{ax^{-\frac{q}{p}}+bx^{n-\frac{q}{p}}}^{p}$: & ſuppoſant enſuite $m+q+1=n-\frac{q}{p}$; car l'on en déduira $q=\frac{np-mp-p}{p+1}$; & cette valeur de q étant miſe à ſa place dans (B), on aura (A) $gx^{m}dx\times\overline{a+bx^{n}}^{p}$ $=$ (C) $gx^{\frac{m+np-p}{p+1}}dx\times\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$, où l'expoſant de x hors du ſigne ne differe que d'une unité de l'expoſant de la plus haute puiſſance de x ſous le ſigne. On remarquera qu'il eſt indifferent de multiplier $x^{m}dx$ par x^{q}, en diviſant en même temps la grandeur qui eſt ſous le ſigne par x^{q}, qui devient $x^{\frac{q}{p}}$ à cauſe du ſigne * ou de diviſer $x^{m}dx$ par x^{q}, en multipliant en même temps la grandeur qui eſt ſous le ſigne par x^{q}, qui devient $x^{\frac{q}{p}}$ *.

* 662.

* 662.

2°. Il faut ſuppoſer une nouvelle changeante z égale à la grandeur qui eſt ſous le ſigne, c'eſt-à-dire, (D) $z=ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}$ $+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}$; ce qui donne (E) $z=x^{\frac{m-n+1}{p+1}}\times\overline{a+bx^{n}}$; (cela ſe fait en ſéparant le multiplicateur commun $x^{\frac{m-n+1}{p+1}}$); ce qui donne auſſi (F) $z^{p+1}=x^{m-n+1}\times\overline{a+bx^{n}}^{p+1}$, & ($\varphi$) $z^{p}=\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$; ce qui donne enfin (G) dz $=\frac{m-n+1}{p+1}ax^{\frac{m-n-p}{p+1}}dx+\frac{m+np+1}{p+1}bx^{\frac{m+np-p}{p+1}}dx$; d'où l'on déduit (H) $x^{\frac{m+np-p}{p+1}}dx=$ (I) $\frac{p+1}{m+np+1}\times\frac{1}{b}dz-\frac{m-n+1}{m+np+1}\times\frac{a}{b}x^{\frac{m-n-p}{p+1}}dx$.

3°. Il faut ſubſtituer dans le ſecond membre de l'équation $A=C$, la valeur (I) de (H) & l'on aura (A) $gx^{m}dx\times$ $\overline{a+bx^{n}}^{p}=$ (L) $\frac{p+1}{m+np+1}\times\frac{g}{b}dz\times\overline{ax^{\frac{n-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{n+n+1}{p+1}}}^{p}$ $-\frac{m-n+1}{m+np+1}\times\frac{ag}{b}x^{\frac{m-n-p}{p+1}}dx\times\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+n+1}{p+1}}}^{p}$; où ſubſtituant encore dans le premier terme de (L) au lieu de $\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+1}{p+1}}}^{p}$, ſa valeur z^{p} priſe de (φ), l'on

aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (M)\frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$ (N) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} x^{\frac{m-n-p}{p+1}} dx \times \overline{a x^{\frac{n-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{n+np+1}{p+1}}}^p$, qui se réduit (en divisant dans le terme (N) ce qui est sous le signe par $x^{\frac{m-n+1}{p+1}}$, & multipliant en même temps ce qui est hors du signe par la même grandeur, c'est-à-dire * par $x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times p$) à (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (M)\frac{p+1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^p dz -$ (P) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} \times x^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$ * 662.

4°. Il faut prendre l'integrale de cette équation, & l'integrale de la partie (M) pouvant être prise par la premiere proposition, l'on aura S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (Q)\frac{1}{m+np+1} \times \frac{g}{b} z^{p+1} -$ (R) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{ag}{b} \times$ S. $x^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Substituant dans (Q) la valeur de z^{p+1} prise de (F), l'on aura S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (T)\frac{1}{m+np+1} \times \frac{1}{b} \times gx^{m+1-n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (R) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{a}{b} \times$ S. $gx^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$.

5°. L'on a déja *le premier terme* (T) de la *suite* qui est l'integrale que l'on cherche, l'on aura par ordre tous les termes suivans à l'infini, les uns après les autres, par de simples substitutions. On aura le second en substituant dans (T) & dans (R), $m-n$ à la place de m, & multipliant par le coëficient de (R) ce qui naîtra de la substitution, & ce second terme sera (V) $-\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{1}{m+np+1-n} \times \frac{a}{bb} \times gx^{m+1-2n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (X) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{aa}{bb} \times$ S. $gx^{m-2n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$

On aura le troisiéme terme en substituant dans (T) & dans (R), $m-2n$ à la place de m, & multipliant ce qui viendra de la substitution par le coëficient de (X), ce 3e terme sera (Y) $-\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-2n} \times \frac{1}{m+np+1-2n} \times \frac{aa}{b^3} \times gx^{m+1-3n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} -$ (Z) $\frac{m-n+1}{m+np+1} \times \frac{m+1-2n}{m+np+1-n} \times \frac{m+1-3n}{m+np+1-2n} \times \frac{a^3}{b^3} \times$ S. $gx^{m-3n} \times \overline{a+bx^n}^p$.

On trouvera de la même maniere tant de termes que l'on voudra de la ſuite infinie qui eſt l'integrale que l'on cherche de $x^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$: Et comme les deux premiers termes (T) & (V) de cette ſuite font aſſez connoître la maniere d'avoir les coëficiens des termes ſuivans, & les expoſans de x dans ces termes, qui font une progreſſion arithmetique ; il eſt facile, ſans aucune ſubſtitution, de continuer tant qu'on voudra la *ſuite* de l'integrale quand on en a les deux ſeuls premiers termes : & comme ils ſont multipliés chacun par $g \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$, il ſuffit d'écrire ce commun multiplicateur une ſeule fois au commencement de la ſuite avec la marque $\times$ de la multiplication.

REMARQUE.

681. POUR rendre l'expreſſion de l'integrale des differentielles binomes plus facile dans l'uſage, il faut, 1°. diviſer le numerateur & le denominateur du premier terme chacun par n ; ceux du ſecond terme chacun par nn ; ceux du 3e par n^3 ; & ainſi de ſuite, (ce qui ne changera point leur valeur ;)' & cela donnera S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = g \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times$

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{m+np+1}{n}} \times \frac{1}{b} x^{m+1-n} - \frac{\frac{m+1-n}{n \times n}}{\frac{m+np+1 \times m+np+1-n}{n \times n}} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n}$$

— &c. Retirant de tous les diviſeurs des numerateurs une n pour la mettre au dénominateur du multiplicateur commun, l'integrale ſera $\frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{\frac{1}{m+np+1}}{n} \times \frac{1}{b} x^{m+1-n}$

$$- \frac{\frac{m+1-n}{n}}{m+np+1 \times \frac{m+np+1-n}{n \times n}} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} - \text{ \&c. } 2°.$$ Il faut à preſent ſuppoſer $\frac{m+1}{n} = r$, ce qui donnera $m+1 = rn$; $\frac{m+1-n}{n} = r-1$; $m+1-n = rn-n$; $\frac{m+1-2n}{n} = r-2$: & ſuppoſer encore $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$, ce qui donnera $\frac{m+np+1-n}{n} = s-1$; $\frac{m+np+1-2n}{n} = s-2$. 3°. Il faut ſubſtituer r, $r-1$, $r-2$, &c s, $s-1$, $s-2$, &c. à la place de leurs valeurs dans la derniere expreſſion de l'integrale, & l'on aura la formule ſuivante.

La formule des integrales de toutes les differentielles binomes qu'on peut réduire à $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$

682. S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s \times b} x^{rn-n} - \frac{r-1}{s \times s-1} \times \frac{a}{bb} \times x^{rn-2n} + \frac{r-1 \times r-2}{s \times s-1 \times s-2} \times \frac{aa}{b^3} x^{rn-3n} - \frac{r-1 \times r-2 \times r-3}{s \times s-1 \times s-2 \times s-3} \times \frac{a^3}{b^3} x^{rn-4n} + \frac{r-1 \times r-2 \times r-3 \times r-4}{s \times s-1 \times s-2 \times s-3 \times s-4} \times \frac{a^4}{b^4} x^{rn-5n}$ — &c. ou bien ſans changer l'expreſſion des expoſans, S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s \times b} x^{m+1-n} - \frac{r-1}{s \times s-1} \times \frac{a}{bb} x^{m+1-2n} + \frac{r-1 \times r-2}{s \times s-1 \times s-2} \times \frac{aa}{b^3} x^{m+1-3n}$ — &c.

REMARQUE II.

683. QUAND le ſecond terme bx^n du binome $\overline{a-bx^n}^p$ eſt negatif, il faut changer les ſignes des termes de la formule dans leſquels b a une dimenſion impaire, c'eſt-à-dire du 1er terme, du 3e, du 5e, &c.

COROLLAIRE I.

684. SI l'on veut avoir par la même ſeconde méthode la formule où les puiſſances de la changeante x qui en diſtinguent les termes, ayent pour expoſans la progreſſion $m+1$, $m+1+n$, $m+1+2n$, &c. c'eſt-à-dire la formule de l'integrale qui convient à $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$, en prenant a pour le premier terme du binome $\overline{a+bx^n}^p$; 1°. il faut multiplier la quantité qui eſt hors du ſigne par x^q, & diviſer celle qui eſt ſous le ſigne par la même grandeur, & l'on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (B) $gx^{m+q} dx \times \overline{ax^{-\frac{q}{p}} + bx^{n-\frac{q}{p}}}^p$. 2°. il faut ſuppoſer $m+q+1 = -\frac{q}{p}$, & non pas à $n - \frac{q}{p}$, & l'on trouvera $q = \frac{-mp-p}{p+1}$. Subſtituant cette valeur de q dans (B), on aura (A) $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p =$ (C) $g x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times$ (D) $\overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$. 3°. Il faut ſuppoſer (E) $z = ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}} = x^{\frac{m+1}{p+1}} \times \overline{a+bx}^p$; ce qui donnera, 1°. (F) $z^{p+1} = x^{m+1} \times \overline{a+bx^n}^{p+1}$. 2°. ($\varphi$) $z^p =$ (D) $\overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$

& 3°. $dz = \frac{m+1}{p+1} ax^{\frac{m-n}{p+1}} dx + \frac{m+1+np+n}{p+1} bx^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$; d'où l'on déduira (C) $x^{\frac{m-p}{p+1}} dx = (G) \frac{p+1}{m+1} \times \frac{1}{a} \times dz - (H) \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$. 4°. Il faut ſubſtituer dans $A = C \times D$, 1°. au lieu de $C \times D$, ſa valeur $\overline{G - H} \times D$; 2°. & ſubſtituer dans $A = G \times D - H \times D$, au lieu de D dans le terme $G \times D$, ſa valeur φ; l'on aura $gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p = \frac{p+1}{m+1} \times \frac{g}{a} z^v dz - \frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{gb}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$, dont le terme $\frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{bg}{a} \times x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx \times \overline{ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+1+np+n}{p+1}}}^p$, eſt égal (en diviſant ce qui eſt ſous le ſigne par $x^{\frac{m+1}{p+1}}$, & multipliant ce qui eſt hors du ſigne par $x^{\frac{m+1}{p+1}} \times p$) à $\frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{bg}{a} \times x^{m+n} dx \times \overline{a + bx^n}^p$.

5°. Il faut prendre l'integrale de cette équation, & l'on aura $S.gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{g}{a} \times z^{p+1} - \frac{m+1+np+n}{p+1} \times \frac{gb}{a} \times S.x^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$; où mettant à la place de z^{p+1} ſa valeur priſe dans (F), l'on aura $S.gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = (I) \frac{1}{m+1} \times \frac{g}{a} \times x^{m+1} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} - K \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{bg}{a} \times S.x^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Le terme (I) eſt le premier de la ſuite qui eſt l'integrale que l'on cherche. On trouvera le ſecond en ſubſtituant dans (I) & dans (K) $m+n$ à la place de m, & multipliant les deux quantités qui en naîtront par le coëficient du terme (K). On trouvera de même le 3e, le 4e, &c. comme

* 680. nomb. 5. ci-deſſus, * & l'integrale ſera $S.gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = g \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} x^{m+1} - \frac{m+1+np+n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{b}{aa} x^{m+1+n} + \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{bb}{a^3} x^{m+1+2n}$ — &c.

685. On peut abreger l'expreſſion de cette integrale, 1°. en diviſant le numerateur & le dénominateur du 1er coëficient

chacun par $-n$; ceux du ſecond coëficient par $-n \times -n$; ceux du troiſiéme par $-n \times -n \times -n$; & ainſi de ſuite. 2°. En retirant au dénominateur du multiplicateur commun des termes de l'integrale une $-n$ du diviſeur de chaque numerateur des coëficiens. 3°. En ſuppoſant $\frac{m+1}{-n} = s$, & $\frac{m+1}{-n} - p = s - p = r$; ce qui donnera $\frac{m+1+n}{-n} = s - 1$, $\frac{m+1+2n}{-n} = s - 2$, &c. & $\frac{m+1+np}{-n} = r$, $\frac{m+1+np+n}{-n} = r - 1$; $\frac{m+1+np+2n}{-n} = r - 2$, &c. 4°. En mettant dans les coëficiens de l'integrale s, $s - 1$, &c. $r - 1$, $r - 2$, &c. à la place de leurs valeurs, on aura

La ſeconde formule de l'integrale de $gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$.

386. S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{sa} x^{m+1} - \frac{\overline{r-1}}{s \times \overline{s-1}} \times \frac{b}{aa} \times x^{m+1+n} + \frac{\overline{r-1} \times \overline{r-2}}{\overline{s \times s-1} \times \overline{s-2}} \times \frac{bb}{a^3} \times x^{m+1+2n}$ — &c.

REMARQUES.

I.

387. QUAND la valeur de r dans la premiere & dans la ſeconde formule eſt un nombre entier poſitif, il eſt évident qu'elles font trouver une integrale finie, qui a autant de termes qu'il y a d'unité dans le nombre entier r.

II.

388. Quand le ſecond terme du binome $\overline{a + bx^n}^p$ a le ſigne —, il faut changer les ſignes de tous les termes dans leſquels b a une dimenſion impaire.

III.

389. Si la differentielle binome étoit $x^m\, dx \times \overline{ax^n + bx^{2n}}^p$, il ſeroit facile de trouver par la même méthode une formule de l'integrale de cette differentielle; on la laiſſe à trouver aux Lecteurs; car ayant enſeigné * à preparer toute differentielle binome de maniere que la changeante x ne ſe trouve qu'au ſecond terme, les deux formules précedentes ſuffiſent pour trouver les integrales de toutes les differentielles binomes. * 677.

IV.

390. On peut trouver par la même méthode deux formules pour l'integrale de la ſeconde forme de la même differen-

tielle, qui eſt $g x^{m+np} dx \times \overline{b+ax^n}^p$, l'une en prenant ax^{-1} pour le premier terme du binome, l'autre en prenant le terme conſtant b pour le premier terme du même binome; mais comme les deux que l'on a données ſont ſuffiſantes, on ne s'y arrêtera pas.

Application des deux formules à un exemple pour en faire voir l'uſage.

691. POUR trouver par la premiere formule l'integrale de la differentielle $h^s x^{-\frac{9}{2}} dx \times \overline{i+x^2}^{\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer $g = h^s$; $a = i$; $b = 1$; $m = -\frac{9}{2}$ $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$: ce qui donnera $r = -\frac{7}{2}$ Et la valeur de r n'étant pas un nombre entier, on ne ſçauroit avoir par la premiere formule l'integrale finie de la differentielle propoſée: c'eſt pourquoi il faut ſe ſervir de la ſeconde formule & ſuppoſer $g = h^s$; $a = i$; $b = 1$; $m = -\frac{9}{2}$; $n = 1$; $p = \frac{1}{2}$; $s = \frac{m+1}{-n} = \frac{7}{2}$; $r = \frac{m+1}{-n} - p = +3$. La valeur de r étant égale au nombre entier poſitif 3, cela fait voir que l'integrale de la differentielle propoſée ſera finie & aura trois termes. Pour avoir cette integrale, il ne faut plus que ſubſtituer dans la ſeconde formule les valeurs de g, a, b, m, n, p, r, s; & l'on aura $-h^s \times \overline{i+x^2}^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{7i} x^{-\frac{7}{2}} - \frac{8}{35 \times ii} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{16}{105 \times i^3} x^{-\frac{1}{2}}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée.

V. REMARQUE.

692. QUAND on ne peut pas trouver par le moyen des deux formules precedentes l'integrale finie d'une differentielle binome propoſée, on peut toujours avoir cette integrale par approximation, en continuant de ſubſtituer dans les termes des formules les valeurs des lettres de ces formules priſes de la differentielle propoſée; & il faudra choiſir celle des deux formules pour l'approximation dont les termes iront le plus en diminuant. On peut auſſi employer les méthodes du Problême de l'art. 175, comme l'on a fait dans la quatriéme Section de la ſeconde Partie.

COROLLAIRE II.

COROLLAIRE II.

Où l'on donne deux formules déduites de la formation des deux précedentes pour trouver les integrales finies des differentielles binomes, dont on ne peut trouver les integrales exactes par les formules qui précedent ; & cela en supposant données les integrales de quelques differentielles binomes dont on ne peut pas trouver les integrales exactes par les formules qui précedent.

93. ON supposera pour abreger $u = g \times \overline{a + bx^n}^{p+1}$; & l'on écrira dans chaque formule non seulement les termes des formules précedentes, qui sont chacun une integrale, mais on écrira aussi en parenthese, pour les distinguer, chacun dans leur rang les autres termes qui ont fait découvrir les precedens, & qui ne sont marqués que par (S.) qui veut dire *somme.*

TROISIE'ME FORMULE.

Premier terme de l'integrale.

94. $\mathrm{S}.gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{1}{m+1+np} \times \frac{1}{b} \times ux^{m+1-n} \Big(- \underset{A}{\frac{m+1-n}{m+1+np}} \times$

Second terme de l'integrale.

$\frac{1}{b} \times \mathrm{S}.gx^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^p \Big) - \underset{B}{\frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{1}{m+1+np-n}} \times \frac{a}{bb} \times ux^{n+1-2n}$

$\Big(+ \frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{m+1-2n}{m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times \mathrm{S}.gx^{m-2n} dx \times \overline{a+bx^n}^p \Big)$

Troisiéme terme de l'integrale.

$+ \frac{}{m+1+np} \times \frac{m+1-n \times m+1-2n \times 1}{m+1+np-n \times m+1+np-n2} \times \frac{aa}{bb} \times ux^{m+1-3n}$

$\Big(- \underset{C}{\frac{m+1-n \times m+1-2n \times m+1-3n}{m+1+np \times m+1+np-n \times m+1+np-2n}} \times \frac{a^3}{b^3} \times \mathrm{S}.gx^{m-3n} dx \times$

$\overline{a+bx^n}^p \Big) -$ &c.

QUATRIE'ME FORMULE.

Premier terme de l'integrale.

95. $\mathrm{S}.gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} \times ux^{m+1} \Big(- \underset{a}{\frac{m+1+np+n}{m+1}} \times \frac{b}{a} \times$

Second terme de l'integrale.

$\mathrm{S}.gx^{m+n} dx \times \overline{a+bx^n}^p - \underset{b}{\frac{m+1+np+n \times 1}{m+1 \times m+1+n}} \times \frac{b}{aa} \times ux^{m+1+n}$

$\Big(+ \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{bb}{aa} \times \mathrm{S}.gx^{m+2n} dx \times \overline{a+bx^n}^p \Big)$

Troisiéme terme de l'integrale.

$+ \frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n \times 1}{m+1 \times m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{bb}{aa} \times ux^{m+1+2n} \Big(- \underset{c}{\frac{m+1+np+n \times}{m+1 \times}}$

$\frac{m+1+np+2n \times m+1+np+3n}{m+1+n \times m+1+2n} \times \frac{b^3}{a^3} \times \mathrm{S}.gx^{m+3n} dx \times \overline{a+bx^n}^p \Big) -$ &c.

AVERTISSEMENT.

ON peut continuer facilement ces deux formules tant qu'on voudra, les termes que l'on a mis suffisent pour cela. On peut aussi en abreger les coëficiens en supposant que r & s ont ici les mêmes valeurs que dans les formules précedentes ; mais on a cru qu'il valoit mieux les laisser tels que la seconde méthode les donne immédiatement, afin que les Lecteurs visent clairement la formation de ces deux formules.

REMARQUE SUR CES FORMULES.

696. SI l'on suppose comme connue ou donnée l'integrale de celle des differentielles qu'on voudra marquées A, B, C, &c. dans la troisiéme formule, & a, b, c, &c. dans la quatriéme, l'on aura pour l'integrale de la differentielle $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ tous les termes 1, 2, 3, &c. qui precedent cette differentielle donnée, en y joignant l'integrale supposée de cette differentielle avec le coëficient qu'elle a dans la formule. Par exemple si l'on regarde comme connue l'integrale S. $gx^{m-2}\,dx \times \overline{a+bx^n}^p$, l'integrale de la differentielle $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$ sera $\frac{1}{m+1+np} \times \frac{1}{b} \times ux^{n+1-n} - \frac{m+1-n \times 1}{m+1+np \times m+1+np-n} \times \frac{a}{bb} \times ux^{n+1-2n} + \frac{m+1-n \times m+1-2n}{m+1+np \times m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times$ S. $gx^{m-2n}\,dx \times \overline{a+bx^n}^p$. Il en est ainsi des autres.

DÉFINITION ET REMARQUE.

697. UNE differentielle qui n'a qu'une même changeante x, comme sont les differentielles A, B, C, &c a, b, c, &c des formules precedentes peut être regardee comme l'element de l'aire ou de la quadrature d'une courbe ; il y en a aussi quelques-unes qui sont les élemens de la rectification de quelque courbe : c'est pourquoi quand l'integrale d'une differentielle proposée contient avec les termes 1, 2, 3, &c. (qui sont des termes complets de l'integrale) l'une des differentielles A, B, C, &c. ou a, b, c, &c. on dit que son integrale est dépendante de la quadrature d'une courbe, ou de la rectification d'une courbe, ou qu'elle s'y réduit ; & que cette quadrature ou rectification étant supposée, on a l'integrale finie de la differentielle proposée. Mais comme les

Sections coniques ſont plus ſimples que les autres courbes, qu'on s'y eſt plus appliqué qu'aux autres, & qu'elles ſont devenues par là plus familieres, c'eſt d'ordinaire à leur quadrature & à leur rectification ſuppoſée comme connue, que l'on réduit les integrales des differentielles qui n'en ont pas d'exactes ou de finies par la premiere & ſeconde formule, & qui n'en peuvent avoir de finies que par ce moyen, c'eſt-à-dire elles ont pour integrale quelques termes d'une integrale exacte, & pour dernier terme elles ont l'expreſſion de la quadrature ou de la rectification de l'une des Sections coniques, de maniere que cette quadrature ſuppoſée, leur integrale eſt finie.

698. La troiſiéme & la quatriéme formule font connoître quelles ſont les differentielles dont les integrales ſe trouvent finies en ſuppoſant la quadrature ou la rectification d'une Section conique, & elles font trouver ces integrales. Pour le concevoir clairement il faut avoir preſent les élemens de la rectification & de la quadrature des Sections coniques dont on a mis la plûpart *dans la ſeconde partie troiſiéme Section depuis l'article* 582 *juſqu'à* 610, ſçavoir (1) $rdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ eſt l'élement de la rectification des arcs qui ne paſſent pas le quart de la circonference; (2) $adx \times \overline{aa-xx}^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant que a eſt le diametre, eſt l'élement des arcs qui ne ſurpaſſent pas la demi-circonference; (3) $rrdx \times \overline{rr+xx}^{-1}$, en ſuppoſant la tangente d'un arc $= x$, eſt l'élement des arcs moindres que le quart de la circonference; (4) $\frac{x^{-1}dx}{2} \times \overline{px+4xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt l'élement d'un arc de parabole. On ne met pas ici ceux qui ne ſe réduiſent pas à l'expreſſion generale qu'on a donnée d'une differentielle binome $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p$.

Les élemens de leur quadrature ſont (5) $dx : \overline{rr-xx}^{\frac{1}{2}}$ du cercle quand x commence au centre; (6) $dx \times \overline{ax-xx}^{\frac{1}{2}}$ quand x commence au ſommet du diametre a; (7) $dx \times \overline{-aa+xx}^{\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole équilatere par raport à ſon 1er axe; (8) $dx \times \overline{aa+xx}^{\frac{1}{2}}$ de la même par raport au ſecond

axe ; (9) $\overline{2a}^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{2apx - pxx}^{\frac{1}{2}}$ de l'ellipſe ; (10) $\overline{2a}^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{-aap + pxx}^{\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole par raport au premier axe ; (11) $\overline{2b}^{-\frac{1}{2}} dx \times \overline{\pi bb + \pi xx}^{\frac{1}{2}}$ de la même par raport au ſecond axe ; (12) $dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$ d'un quadrilatere hyperbolique par raport à l'aſymptote ; (13) $\frac{1}{2} x^2 dx \times \overline{aa - xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſegment de cercle ; (14) $\frac{1}{8} aadx \times \overline{ax - xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur de cercle ; (15) $\frac{1}{2} rrdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ encore d'un ſecteur de cercle ; (16) $\frac{1}{2} rdx \times \overline{1 + xx}^{-1}$ * d'un ſecteur d'ellipſe dont la moitié du ſecond axe eſt l'unité, r la moitié du premier axe, & le ſommet eſt au centre ; (17) $\frac{1}{2} aadx \times \overline{-aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'hyperbole équilatere par raport au premier axe ; (18) $\frac{1}{2} aadx \times \overline{aa + xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur de la même hyperbole par raport au ſecond axe ; (19) $\frac{1}{2} aapdx \times \overline{-2a^3p + 2apxx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'hyperbole par raport au 1er axe ; (20) $\frac{1}{2} bb\pi dx \times \overline{2b^3p + 2b\pi xx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur hyperbolique par raport au ſecond axe ; (21) $\frac{1}{2} aapdx \times \overline{2a^3p - 2apxx}^{-\frac{1}{2}}$ d'un ſecteur d'ellipſe. Si l'on met le ſigne S. de ſomme ou d'integrale devant chacun de ces élemens, cela en marquera l'integrale ſuppoſée.

* 648.

699. On remarquera dans ces élemens de trois ſortes de differentielles ; les premieres, comme la premiere, la ſeconde, &c. ſont toutes réduites à la differentielle generale $x^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$; les ſecondes ſont celles où le premier terme du binome ſous le ſigne contient la changeante x, comme la 4e, la 6e, &c. Il faut préparer ces ſecondes pour les réduire à la differentielle generale ; par exemple on réduira la 6^e^ $dx \times \overline{ax - xx}^{\frac{1}{2}}$ à $x^{\frac{1}{2}} dx \times \overline{a - x}^{\frac{1}{2}}$. Il faut faire la même choſe des autres ſemblables. Les 3es ſont la 3e, la 12e, la 16e, où le ſigne du binome eſt — 1. Pour les comprendre dans la 3e & la 4e formule, il faut ſuppoſer $u = a + bx^n$, $u^{-1} = \overline{a + bx^n}^{-1}$, & $u^{-1+1} = u^0 = \overline{a + bx^n}^{-1+1=0}$; & remarquer que $u^0 = 1$: car dans la

progreſſion geometrique $\dot{\div}\, u^0, u^1, u^2, u^3$, &c. il eſt évident que le premier terme u^0, eſt l'unité, puiſque $\dot{\div}\, 1, u^1, u^2, u^3$, &c. ainſi il faudra pour ces troiſiémes differentielles ſuppoſer dans la troiſiéme & la quatriéme formule $u = 1$. Ces choſes ſuppoſées.

Uſage de la troiſiéme & de la quatriéme formule pour connoître les differentielles dont les integrales deviennent finies en ſuppoſant les quadratures ou les rectifications des ſections coniques, & pour trouver ces integrales.

200. 1°. POUR avoir d'abord la differentielle la plus ſimple dont l'integrale dépend de la rectification ſuppoſée d'un arc de cercle marquée par (1) S. $rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſuppoſer que dans la troiſiéme formule (A) S. $gx^{m-n}dx \times \overline{a + bx^n}^p$ eſt (1) S. $rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$ & mettre au lieu de g, a, b, n, p, leurs valeurs priſes de (1), & ne laiſſer d'indéterminée que m, & l'on aura S. $gx^{m-n}dx \times \overline{a + bx^n}^p$ = S. $rx^{m-2}dx \times \overline{rr - 1x^2}^{-\frac{1}{2}}$ = S. $rx^0dx \times \overline{rr - x^2}^{-\frac{1}{2}}$. Il faut enſuite trouver la valeur de m en ſuppoſant $m - 2 = 0$; ce qui donnera $m = 2$. Il faut mettre dans la differentielle generale $gx^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$, les valeurs de toutes les lettres indéterminées, & l'on aura S. $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$ pour la differentielle la plus ſimple que donne la premiere formule dont l'integrale dépend de la rectification ſuppoſée S. $rx^0dx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour trouver à preſent l'integrale finie de la differentielle $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$, il faut ſubſtituer dans le terme (1) & (A) de la troiſiéme formule, les valeurs des lettres indéterminées priſes de $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$, & l'on trouvera S. $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}rx^1 \times \overline{rr - x^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}rr \times$ S. $rdx \times \overline{rr - xx}^{-\frac{1}{2}}$; c'eſt l'integrale de $rx^2dx \times \overline{r^2 - x^2}^{-\frac{1}{2}}$.

2°. Pour avoir la differentielle plus compoſée d'un degré que la précedente, & dont l'integrale finie dépend de la même rectification ſuppoſée d'un arc de circonference, il

faut ſuppoſer dans la troiſiéme formule (B) S. $gx^{m-2n}dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = $ S. $rx^{\circ}dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$; & faiſant les mêmes operations que dans le premier article, on trouvera que $m = 4$, & que la differentielle, dont l'integrale finie dépend de la même rectification, qui ſuit la plus ſimple, eſt $rx^2dx \times \overline{r^2-x^2}^{-\frac{1}{2}}$; & l'on trouvera que ſon integrale finie (en mettant dans les termes 1, 2, B de la troiſiéme formule, les valeurs des lettres indéterminées priſes de $rx^4dx \times \overline{r^2-x^2}^{-\frac{1}{2}}$) eſt $-\frac{1}{4}rx^3 \times \overline{rr-x^2}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}r^3x^1 \times \overline{rr-x^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}r^4 \times$ S. $rdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$.

3°. On trouvera de même que la differentielle ſuivante eſt $rx^6dx \times \overline{r^2-x^2}^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant dans la troiſiéme formule (C) S. $gx^{m-3n}dx \times \overline{a+bx^n}^{p} = rx^{\circ}dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$, & l'on aura ſon integrale en ſubſtituant dans les termes 1, 2, 3 & C, les valeurs de m & des autres indéterminées priſes dans $rx^6dx \times \overline{r^2-x^2}^{-\frac{1}{2}}$. Mais ſans ſe donner cette peine, il eſt viſible que ſi l'on met dans $gx^mdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ ſucceſſivement 2, 4, 6, & tous les autres nombres pairs, à la place de m, l'on aura toutes les differentielles de ſuite que peut donner la troiſiéme formule, dont les integrales finies dépendent de la rectification ſuppoſée donnée d'un arc de circonference marquée par S. $rdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$; & que l'on aura l'integrale de chacune en prenant autant de termes d'integrale de la troiſiéme formule, que 2 ſe trouve de fois dans le nombre pair qu'on prendra pour m, & qu'il y aura de plus le terme qui les ſuit immédiatement marqué par l'une des lettres A, B, C, &c. avec ſon coëficient; & ſubſtituant dans tous ces termes les valeurs des indéterminées priſes dans $rx^mdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$, où au lieu de m on aura mis ce nombre pair.

En ſe ſervant de la quatriéme formule comme l'on a fait de la troiſiéme dans les art. 1, 2, & 3, l'on trouvera que ſi l'on met ſucceſſivement dans $rx^mdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ à la place

de m, les nombres pairs négatifs $-2, -4, -6$, &c. l'on aura toutes les differentielles que l'on peut trouver par la quatrieme formule, dont les integrales dépendent de la rectification ſuppoſée d'un arc de circonference marquée par S. $rdx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ & que pour avoir l'integrale de chacune, il faut prendre de ſuite dans la quatrieme formule autant de termes marqués 1, 2, 3, &c. qu'il y a de fois -2 dans le nombre pair négatif qu'on voudra mettre à la place de m dans $rx^m dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$, & de plus celui des termes marqué a, b, c, &c. qui les ſuit immédiatement avec ſon coëficient, & y ſubſtituer les valeurs des lettres indéterminées, priſes dans $rx^m dx \times \overline{rr-xx}^{-\frac{1}{2}}$ où l'on aura déterminé m, en mettant à ſa place ce nombre pair négatif.

AVERTISSEMENT.

IL ſuffit ici d'avoir fait clairement concevoir la méthode & la maniere de l'appliquer ; & on laiſſe aux Lecteurs qui voudront ſe la rendre familiere, & acquerir l'habitude de connoître tout d'un coup les differentielles dont les integrales ſont finies, en ſuppoſant les rectifications ou les quadratures des Sections coniques ; on leur laiſſe, dis-je, à trouver les differentielles qui ſe rapportent aux autres rectifications & aux quadratures des Sections coniques qu'on a miſes ci-deſſus *, & à en trouver les integrales finies par la 3e & 4e formule ; ils ne ſçauroient plus y avoir d'autre difficulté que celle du calcul. On va ſeulement l'appliquer aux differentielles dont l'integrale finie dépend de l'integrale ſuppoſée des differentielles de la 3e forte * qui ont -1 pour ſigne de la differentielle binome, comme la (12) $1dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$.

* 698.

* 699.

01. Pour trouver les differentielles qui ſe rapportent à $1x^0 dx \times \overline{1 \pm x}^{-1}$ par le moyen de la troiſiéme formule, 1°. il faut ſuppoſer (A) S. $gx^{m-n} dx \times \overline{a+bx^n}^{p} =$ S. $1x^0 dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, ce qui réduit (A), en laiſſant la ſeule indéterminée m, à S. $1x^{m-1} dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$. Il faut enſuite ſuppoſer $x^{m-1} = x^0$, ou plutôt $m - 1 = 0$, ce qui donne $m = 1$; & mettre dans la differentielle generale $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^{p}$, les valeurs de

toutes les indéterminées qu'on vient de trouver, & elle ſera changée en $1x^1dx \times \overline{1 \pm 1x^1}^{-1}$; c'eſt la differentielle la plus ſimple dont l'integrale dépend de la quadrature de l'eſpace hyperbolique marquée par S. $1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$. Pour en avoir l'integrale il faut ſubſtituer dans les termes 1 & A de la troiſiéme formule les valeurs des indéterminées priſes de $1x^1dx \times$

* 699. $\overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & l'on trouvera, en ſuppoſant $n = 1$ * comme on l'a fait remarquer, $\pm x^1 \pm$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$ pour l'integrale de $1x^1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$.

On trouvera de la même maniere par la ſuppoſition de

* 694. (B) * S. $gx^{m-2n}dx \times \overline{a + bx^n}^{p} =$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, que $1x^2dx \times$ $\overline{1 \pm x^1}^{-1}$ eſt la differentielle qui ſuit la plus ſimple, dont l'integrale ſuppoſe la quadrature S. $1dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & l'on aura ſon integrale $\pm \frac{1}{2} x^2 - x^1 +$ S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, en ſubſtituant dans les termes 1, 2 & B de la troiſiéme formule, les valeurs des indéterminées priſes de $1x^2dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$.

L'on verra clairement en faiſant ſoi-même ces operations, qu'en augmentant de ſuite d'une unité l'expoſant de x hors du ſigne, l'on aura toutes les differentielles que peut donner la troiſiéme formule, dont les integrales finies dépendent de S. $1x^0dx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$; par conſéquent ſi l'on écrit $1x^mdx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$, & qu'on mette ſucceſſivement au lieu de m les nombres naturels 1, 2, 3, &c. l'on aura toutes ces differentielles ; & pour en trouver les integrales, il faudra prendre dans la troiſiéme formule autant de termes 1, 2, 3, &c. que le nombre mis à la place de m contient d'unités, en y ajoutant celui des termes A, B, C, &c. qui les ſuit immédiatement avec ſon coëficient, & y ſubſtituer à la place des indéterminées leurs valeurs priſes de $1x^mdx \times \overline{1 \pm x^1}^{-1}$ où l'on aura déterminé m, en mettant à ſa place le nombre qu'on aura voulu.

On trouvera de même par la quatriéme formule les differentielles dont les integrales finies dépendent de $1x^0dx \times$ $\overline{1 \pm x^1}^{-1}$, il n'y a de difference qu'en ce qu'il faut mettre les

les nombres négatifs $-1, -2, -3$, &c. dans $1x^m dx \times 1 \pm x^1)^{-1}$ à la place de m.

On trouvera de la même maniere quelles ſont les differentielles dont les integrales finies dépendent de l'integrale ſuppoſée* (3) S. $rrdx \times (rr+xx)^{-1}$, & de (16) S. $\frac{1}{2} rdx \times (1+xx)^{-1}$, * 698. & on trouvera enſuite les integrales finies de ces differentielles par la troiſiéme & la quatriéme formule.

APPLICATION DE LA SECONDE METHODE aux differentielles trinomes repréſentées par l'expreſſion generale $gx^m dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$, *pour trouver leurs integrales.*

202. ON ſuppoſera comme aux binomes $gx^m dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p = gx^{m+q} dx \times (ax^{-\frac{q}{p}}+bx^{n-\frac{q}{p}}+cx^{2n-\frac{q}{p}})^p$, & l'on déterminera la valeur de q en ſuppoſant $m+q = -\frac{q}{p}-1$, & non pas en ſuppoſant $m+q = 2n-\frac{q}{p}-1$, ni $m+q = n-\frac{q}{p}-1$, parce qu'on ſe trouveroit embarraſſé dans ces deux dernieres ſuppoſitions : on aura donc $q = \frac{-mp-p}{p+1}$; & ſubſtituant cette valeur de q, on aura $gx^m dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p = gx^{\frac{m-p}{p+1}} dx \times (ax^{\frac{m+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}}+cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}})^p$; on ſuppoſera $z = (ax^{\frac{m+1}{p+1}}+bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}}+cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}})^p$; & continuant l'operation comme dans les binomes, on trouvera d'abord

Premier terme de l'integrale.

S. $gx^m dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p = \frac{1}{m+1} \times \frac{1}{a} gx^{m+1} \times (a+bx^n+cx^{2n})^p +$ &c.

$- \frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{a} \times$ A S. $gx^{m+n} dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p - \frac{m+1+2np+2n}{m+1} \times$ B

$\frac{c}{a} \times$ S. $gx^{m+2n} dx \times (a+bx^n+cx^{2n})^p$, où l'on a déja le premier terme de la ſuite infinie, qui eſt la formule generale de l'integrale des differentielles trinomes ; & de plus l'on a le moyen de trouver par ordre tous les autres par des ſubſtitutions à peu près comme dans les binomes.

Par exemple pour trouver le ſecond terme, il faut ſubſtituer $m+n$ à la place de m dans le premier terme, dans A & dans B & leurs coëficiens, & multiplier les trois quantités,

qui naîtront de ces substitutions par le coëficient de A, &

Second terme de l'integrale.

l'on aura $-\frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{b}{aa} gx^{m+1+n} \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p+1}$

C

$+\frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{bb}{aa} S.\, gx^{m+2n} dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$

D

$+\frac{m+1+np+n}{m+1} \times \frac{m+1+2np+3n}{m+1+n} \times \frac{bc}{aa} \times S.\, gx^{m+3n} dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$.

Pour trouver le troisiéme terme, il faut ne faire qu'un seul terme de B & de C, en réduisant le coëficient de B au dénominateur de C, ce terme sera $-\frac{m+1+2np+2n \times m+1+n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{ac}{aa}$

E

$+\frac{m+1+np+n \times m+1+np+2n}{m+1 \times m+1+n} \times \frac{bb}{aa} \times S.\, gx^{m+2n} dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$

Il faut ensuite substituer dans le premier terme, dans A & dans B, $m+2n$ à la place de m dans les exposans & les coëficiens, & multiplier les trois quantités qui en viendront par le coëficient de E, & l'on aura, en nommant e le coëficient

Troisiéme terme de l'integrale.

de E pour abreger, $e \times \frac{1}{m+1+2n} \times \frac{1}{a} gx^{m+1+2n} \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p+1}$

F

$-e \times \frac{m+1+np+3n}{m+1+2n} \times \frac{b}{a} \times S.\, gx^{m+3n} dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p} - e \times$

G

$\frac{m+1+2np+4n}{m+1+2n} \times \frac{c}{a} \times S.\, gx^{m+4n} dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^{p}$.

On trouvera de suite le 4e terme, le 5e, & autant d'autres qu'on voudra, de la même maniere qu'on a trouvé le 3e, & l'on en fera la premiere formule. On fera par la même méthode une seconde formule pour la seconde forme $gx^{m+2np} dx \times \overline{c+bx^{-n}+ax^{-2n}}^{p}$ des differentielles trinomes où les exposans n sont négatifs : On fera une troisiéme formule pour les differentielles trinomes où les exposans n sont positifs, dans laquelle on écrira après le premier terme, les quantités A & B ; après le second terme, les quantités C & D ; & ainsi de suite. Enfin on en fera une 4e pour les differentielles trinomes où les exposans n sont négatifs, dans laquelle on écrira après le premier terme les quantités a & b ; après le second terme, les quantités c & d ; & ainsi de suite. On peut

aiſément imaginer ces quantités a, b, c, d, &c. de la 4ᵉ formule, quoiqu'on ne les ait pas formées ici, où l'on ſe contente de faire bien concevoir aux Lecteurs les méthodes de faire eux-mêmes les formules, de maniere qu'ils n'y puiſſent plus trouver d'autre difficulté que la peine du calcul.

703. On peut par la même méthode faire des formules pour les differentielles quadrinomes, pour celles qui ont cinq termes, ſix termes, &c.

USAGE DES FORMULES.

704. QUAND dans la réſolution des Problêmes on trouve une differentielle trinome, dont l'integrale donne la réſolution que l'on cherche, il faut réduire cette* differentielle à l'expreſſion des differentielles trinomes, & enſuite ſubſtituer dans la premiere formule de l'integrale de ces differentielles les valeurs de g, a, b, c, m, n, p, priſes de la differentielle propoſée; & ſi l'on trouve une integrale complete & finie, on a ce que l'on cherche: ſi on la trouve infinie, il faut réduire la differentielle propoſée à la ſeconde forme, en rendant négatifs les expoſans n, & ſubſtituer dans la ſeconde formule de l'integrale qu'on aura faite pour cette ſeconde forme, les valeurs des mêmes lettres priſes de la differentielle propoſée réduite à la ſeconde forme; & ſi l'on trouve l'integrale complete & finie, l'on a ce que l'on cherche; mais ſi l'on trouve une integrale infinie, on n'aura l'integrale que par approximation, qu'on pourra continuer tant qu'on voudra, en choiſiſſant celle des deux formules par le moyen de laquelle les termes de l'integrale approchée qu'elle donne de la differentielle propoſée, vont le plus en diminuant. * 677.

REMARQUE.

705. ON a fait voir* que l'on pouvoit par la 3ᵉ & la 4ᵉ formule, qui repréſentent les integrales des differentielles binomes, trouver les integrales finies de celles de ces differentielles qu'on pouvoit réduire à l'integrale ſuppoſée connue de la quadrature ou de la rectification des Sections coniques: ſi l'on forme la 3ᵉ & la 4ᵉ formule de l'integrale des differentielles trinomes, leſquelles formules auront, outre les termes 1, 2, 3, &c. de l'integrale, les quantités marquées A, B, C, &c. dans la troiſiéme, & a, b, c, &c. dans la quatriéme: * 699.

on trouvera auſſi par leur moyen, quelles ſont les differentielles qu'on peut réduire aux quadratures & aux rectifications ſuppoſées connues des Sections coniques, c'eſt-à-dire dont on peut trouver les integrales finies en ſuppoſant ces quadratures ou rectifications, & l'on pourra en même tems trouver ces integrales finies.

Pour le faire concevoir clairement on fera remarquer, 1°. que les differentielles binomes qui contiennent xx, & qui ſont les élemens de la quadrature ou de la rectification des Sections coniques, peuvent facilement devenir trinomes; car en ſuppoſant $e + x$ ou $e - x$ au lieu de x, c'eſt-a-dire en ſuppoſant à l'origine des x une grandeur connue e, & que la changeante x ne commence qu'à l'extremité de la connue e; & ſubſtituant $\overline{e+x}^2$ à la place de x, par exemple dans
* 698. l'élement de l'aire du cercle * (5) $dx \times \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$, & dans celui de l'hyperbole équilatere (8) $dx \times \overline{aa + xx}^{\frac{1}{2}}$, le premier deviendra $dx \times \overline{rr - ee + 2ex - xx}^{\frac{1}{2}}$, & le ſecond $dx \times \overline{aa + ee + 2ex + xx}^{\frac{1}{2}}$, qui deviendront, en ſuppoſant dans le premier $rr - ee = f$, & dans le ſecond $aa + ee = f$, $dx \times \overline{f + 2ex - xx}^{\frac{1}{2}}$, $dx \times \overline{f + 2ex + xx}^{\frac{1}{2}}$. Il en eſt de même des autres. L'on pourroit auſſi ſuppoſer $e - x$ au lieu de x. 2°. Que pour avoir les integrales finies des differentielles binomes qui ſe réduiſent à la rectification où à la quadrature des Sections coniques, il ne faut ſuppoſer qu'une quadrature ou une rectification, mais qu'il en faut ſuppoſer deux pour les differentielles trinomes qu'on y peut réduire; trois pour les differentielles quadrinomes, & ainſi de ſuite. Il ſuffira d'en donner ici un exemple.

Pour trouver les differentielles trinomes dont les integrales finies ſe réduiſent à la quadrature de l'hyperbole $1x^0 dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$; 1°. on ſuppoſera que la quantité A S. $gx^{m+n} dx \times \overline{a + bx^n + cx^{2n}}^p = $ S. $1x^0 dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$, & l'on ſubſtituera dans A les valeurs des lettres g, a, b, c, n, p, priſes de S. $1x^0 dx \times \overline{f + 2ex + 1xx}^{\frac{1}{2}}$, en laiſſant la ſeule in-

déterminée m, & S. $gx^{m+n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ deviendra S. $1x^{m+1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$. 2°. On ſuppoſera $m+1=0$, ce qui déterminera $m=-1$; ainſi $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ deviendra $1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$. 3°. On ſubſtituera les valeurs des mêmes lettres dans (B) S. $gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$, & l'on aura (B) S. $gx^{+1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$.

Il eſt à preſent évident qu'en ſuppoſant la quadrature S. $1x^0dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$ de l'hyperbole comme donnée, & ſuppoſant encore l'integrale S. $1x^1dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$, la differentielle trinome $gx^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p = 1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$ ſera la plus ſimple que donne la formule des differentielles trinomes dont les expoſans n ſont poſitifs, dont l'integrale dépend de la quadrature de l'hyperbole & de l'integrale ſuppoſée S. $1x^1dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$, & l'on aura l'integrale de cette differentielle, en mettant dans le premier terme de la formule, & dans les quantités A & B, & dans leurs coëficiens, les valeurs des lettres g, a, b, c, m, n, p, priſes de $1x^{-1}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$.

On trouvera comme dans les binomes, & en faiſant des operations ſemblables aux précedentes, en ſuppoſant (C) S. $gx^{m+2n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ = S. $1x^0dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$ (qui eſt la même quadrature de l'hyperbole;) que $1x^{-2}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$ eſt la differentielle trinome qui ſuit la plus ſimple qu'on vient de trouver, dont l'integrale finie contiendra deux termes complets, & de plus l'integrale ſuppoſée de l'hyperbole, & encore l'integrale ſuppoſée (D) S. $gx^{m+3n}dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ = S. $1x^2dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$. De maniere qu'en ſuppoſant m égale ſucceſſivement aux nombres négatifs -1, -2, -3, &c. l'on aura les differentielles trinomes pour les expoſans n poſitifs, dont l'integrale finie ſe réduit à la quadrature ſuppoſée de l'hyperbole $dx \times \overline{f+2ex+xx}^{\frac{1}{2}}$,

en ſuppoſant outre cela pour la premiere m de ces differentielles l'integrale donnée S. $1x^{l}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$; pour la ſeconde S. $1x^{2}dx \times \overline{f+2ex+1xx}^{\frac{1}{2}}$; & ainſi de ſuite.

On en trouvera d'autres de la même maniere par le moyen de la formule de l'integrale des differentielles trinomes, dont les expoſans n ſont négatifs.

On peut appliquer la même méthode aux differentielles quadrinomes, &c.

TROISIE'ME METHODE,

Par laquelle on trouve une formule generale de l'integrale des differentielles binomes, trinomes, & des autres plus compoſées.

706. $x^{m}dx \times f+gx^{n}+hx^{2n}+ix^{3n}+$ &c. $\times \overline{a+bx^{n}+cx^{2n}+ex^{3n}+\text{&c.}}^{p}$ eſt l'expreſſion generale de toutes les differentielles complexes qui auront tant de termes qu'on voudra ſous le ſigne quelconque p, & tant d'autres termes qu'on voudra hors du ſigne ; il faut en trouver l'integrale qui ſervira de formules generales pour trouver les integrales des differentielles binomes, trinomes, & des autres plus compoſées.

1°. Il faut ſuppoſer (1) $K=a+bx^{n}+cx^{2n}+ex^{3n}+$ &c. ce qui donnera (2) $dK=nbx^{n-1}dx+2ncx^{2n-1}dx+3nex^{3n-1}dx$ + &c. & changer l'expreſſion de la differentielle en cette autre équivalente $fx^{m}K^{p}dx+gx^{m+n}K^{p}dx+hx^{m+2n}K^{p}dx$ $+ix^{m+3n}K^{p}dx+$ &c. ou bien (3) $\overline{f+gx^{n}+hx^{2n}+ix^{3n}}+$ &c. $\times x^{m}dx \times K^{p}$.

2°. Il faut ſuppoſer que (4) $Ax^{m+1}K^{p+1}+Bx^{m+1+n}K^{p+1}$ $+Cx^{m+1+2n}K^{p+1}+Dx^{m+1+3n}K^{p+1}+$ &c. repréſente l'integrale que l'on cherche ; A, B, C, &c. ſont des indéterminées qui repréſentent les coëficiens qu'il faut trouver ; & il eſt évident par les articles 538 & 540, que les expoſans de la changeante x doivent être en progreſſion arithmetique ; que dans le premier terme A, l'expoſant de x doit ſurpaſſer d'une unité celui de x dans le premier terme de la differentielle ; que dans le ſecond terme B il doit augmenter d'une n, dans le troiſiéme de $2n$, & ainſi de ſuite ; & que l'expoſant de K

doit dans tous les termes être l'expoſant p de la differentielle augmenté d'une unité, c'eſt-à-dire $p+1$.

3°. Il faut prendre la difference de chacun des termes de (4), & l'on aura $\overline{m+1}\,A x^m dx K^{p+1} + \overline{p+1}\,A x^{m+1} K^p dK + \overline{m+1+n}\,B x^{m+n} dx K^{p+1} + \overline{p+1}\,B x^{m+1+n} K^p dK + \overline{m+1+2n}\,C x^{m+2n} dx \times K^{p+1} + \overline{p+1}\,C x^{m+1+2n} K^p dK + \overline{m+1+3n} \times D x^{m+3n} dx K^{p+1} + \overline{p+1}\,D x^{m+1+3n} K^p dK$ + &c. qu'il faut réduire à cette équivalente (5) $\overline{m+1}\,A x^m dx \times K \times K^p + \overline{p+1}\,A x \times x^m K^p dK + \overline{m+1+n}\,B x^n \times x^m dx \times K \times K^p + \overline{p+1}\,B x^{1+n} \times x^m K^p dK + \overline{m+1+2n}\,C x^{2n} dx \times x^m K \times K^p + \overline{p+1}\,C x^{1+2n} \times x^m K^p dK + \overline{m+1+3n} \times D x^{3n} \times x^m dx \times K \times K^p + \overline{p+1}\,D x^{1+3n} \times x^m K^p dK$ + &c. ou, ce qui eſt la même choſe (6) $\overline{m+1}\,A K dx + \overline{p+1}\,A x dK + \overline{m+1+n}\,B x^n dx K + \overline{p+1}\,B x^{1+n} dK + \overline{m+1+2n}\,C x^{2n} dx \times K + \overline{p+1}\,C x^{1+2n} dK + \overline{m+1+3n}\,D x^{3n} K dx + \overline{p+1}\,D x^{1+3n} dK$ + &c. $\times x^m K^p$.

4°. Il faut mettre dans (6) les valeurs de K & de dK priſes de (1) & (2), & les diſpoſer dans l'ordre qu'on voit ici; & ſuppoſer que cette differentielle eſt égale à la propoſée, c'eſt-à-dire que cette differentielle moins la propoſée eſt égale à zero.

$$\left\{\begin{array}{lll}
\overline{m+1}\,AK dx & = \overline{m+1}\,Aa + \overline{m+1}\,Abx^n + \overline{m+1}\,Acx^{2n} + \overline{m+1}\,Aex^{3n} + \&c. \\
+\overline{p+1}\,Ax dK & = +\overline{p+1} \times nAbx^n + \overline{p+1} \times 2nAcx^{2n} + \overline{p+1} \times 3nAex^{3n} + \&c. \\
+\overline{m+1+n}\,Bx^n K dx & = +\overline{m+1+n}\,Bax^n + \overline{m+1+n}\,Bbx^{2n} + \overline{m+1+n}\,Bcx^{3n} + \&c. \\
+\overline{p+1}\,Bx^{n+1} dK & = +\overline{p+1} \times nBbx^{2n} + \overline{p+1} \times 2nBcx^{3n} + \&c. \\
+\overline{m+1+2n}\,Cx^{2n} K dx & = +\overline{m+1+2n}\,Cax^{2n} + \overline{m+1+2n}\,Cbx^{3n} + \&c. \\
+\overline{p+1}\,Cx^{2n+1} dK & = +\overline{p+1} \times nCbx^{3n} + \&c. \\
+\overline{m+1+3n}\,Dx^{3n} K dx & = +\overline{m+1+3n}\,Dax^{3n} + \&c. \\
 & -f \quad -gx^n \quad -hx^{2n} \quad -ix^{3n} - \&c.
\end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p = 0.$$

5°. Il faut ſuppoſer chaque terme égal à zero, & trouver par les équations que donnera cette ſuppoſition les valeurs des indéterminées A, B, C, &c. & l'on aura $A = \frac{f}{\overline{m+1} \times a}$;

$B = \frac{g - \overline{m+1} - \overline{p+1} \times n \times bf}{\overline{m+1+n} \times a}$, &c.

6°. Il faut ſubſtituer ces valeurs des indéterminées dans (4), (pour abreger le calcul on laiſſera les capitales A, B, &c. au lieu de leurs valeurs, excepté dans le premier terme,) & l'on aura.

La formule de l'integrale de la differentielle $x^m dx \times \overline{f + gx^n + hx^{2n} + ix^{3n} + \&c.}^p \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$.

707. $$\overline{x^{m+1} \times a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^{p+1} \times \frac{f}{m+1 \times a} + \frac{g - m+1 - p+1 \times n \times bA}{m+1+n \times a} x^n + \frac{h - m+1 - p+1 \times 2n \times cA - m+1+n - p+1 \times n \times bB}{m+1+2n \times a} x^{2n} + \frac{i - m+1 - p+1 \times 3n \times eA - m+1 - p+1 \times 2n \times cB - m+1+2n - p+1 \times n \times bC}{m+1+3n \times a} x^{3n}$$

+ &c. Le multiplicateur $x^{m+1} \times \overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^p$ + &c. eſt commun à tous les termes.

REMARQUE.

708. ON peut trouver tant de termes qu'on voudra de cette formule: Elle contient les formules des integrales des differentielles binomes, trinomes, &c. Par exemple ſi l'on veut s'en ſervir pour trouver l'integrale de la differentielle binome $x^m dx \times f \times \overline{a + bx^n}^p$, il faut ſuppoſer dans la formule, que les lettres qui ne ſe trouvent pas dans cette differentielle binome, ſont chacune égale à zero, comme $g = 0$, $h = 0$, $i = 0$, $c = 0$, $e = 0$, &c. & l'on aura la formule de l'integrale de l'expreſſion generale de la differentielle binome; il faudra faire la même choſe pour les differentielles trinomes, quadrinomes, &c. Elle fait même trouver les integrales des differentielles qui n'ont qu'un ſeul terme comme $fx^m dx$, en ſuppoſant de même chaque lettre de la formule égale à zero, excepté f & m.

COROLLAIRE I.

709. ON trouvera de la même maniere par la même méthode la formule de l'integrale de la ſeconde forme de la même differentielle, dans laquelle les expoſans n ſont négatifs; mais il faudra marquer l'expoſant de la plus haute puiſſance de x dans la grandeur complexe élevée à la puiſſance dont l'expoſant

l'exposant est l'unité par une indéterminée, & de même celui de la plus haute puissance de x dans la grandeur complexe élevée à la puissance p. Nommant, par exemple, l'exposant de x dans la première (rn) & dans la seconde (snp); la seconde forme de la différentielle sera $x^{m+rn+snp}\,dx \times \overline{i - hx^{-n} + gx^{-2n} + fx^{-3n} + \&c.}^{I} \times \overline{e + cx^{-n} + bx^{-2n} + ax^{-3n}}^{p} + \&c.$ la lettre indéterminée r marque le nombre entier positif qui multiplie l'exposant n du dernier terme de la suite $f + gx^n + hx^{2n} + ix^{3n} + \&c.$ Si ix^{3n} étoit le dernier terme, r seroit égal à 3; si le dernier terme contenoit x^{7n}, r seroit égal à 7. De même si ex^{3n} étoit le dernier terme de $\overline{a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n}}^{p}$, s dans snp seroit égal à 3, &c.

COROLLAIRE II.

10. ON trouvera de la même maniére l'intégrale de la différentielle $x^m dx \times \overline{f + gx^n + hx^{2n}}^{I} + \&c. \times \overline{a + bx^n + cx^{2n}}^{p} + \&c. \times \overline{\alpha + \beta x^n + \varkappa x^{2n}}^{q} + \&c.$ Il faudra supposer, 1°. $K = a + bx^n + cx^{2n} + \&c.$ & $l = \alpha + \beta x^n + \varkappa x^{2n} + \&c.$ ce qui changera la différentielle proposée en $x^m dx \times K^p l^q \times \overline{f + gx^n + hx^{2n}} + \&c.$ 2°. que l'intégrale que l'on cherche est representée par l'intégrale indéterminée $x^{m+1} K^{p+1} l^{q+1} \times A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c.$ 3°. Il faudra prendre la différentielle de chaque terme*, & mettre tous les termes correspondans les uns sous les autres, de façon qu'ils ne fassent ensemble qu'une même suite, & écrire au-dessous les termes correspondans de la différentielle proposée avec les signes négatifs pour marquer qu'on suppose la différentielle indéterminée égale à la proposée. 4°. Il faudra supposer chaque terme de cette différentielle égal à zero, & trouver par les équations que donnera cette supposition les valeurs des indéterminées A, B, &c. & les substituer à leur place dans l'intégrale indéterminée, qui deviendra par-là l'intégrale de la différentielle proposée.

* 537.

USAGE DES FORMULES DES INTEGRALES.

11. QUAND on aura formé soi-même les formules des intégrales des expressions générales des différentielles, il ne faudra plus dans la résolution des Problêmes que réduire les

différentielles qu'on trouvera à l'expreſſion générale des dif-
* 677. férentielles *, & ſubſtituer dans la formule de l'intégrale les valeurs des lettres des expoſans & des coéficiens, priſes de la différentielle dont on cherche l'intégrale, en ſuppoſant égales à zero les lettres de la formule qui ne ſont pas dans cette différentielle ; & ſi l'on arrive à un terme dont le coéficient ſoit zero, ou que l'un de ſes multiplicateurs ſoit o, & que la même choſe ſe trouve dans les termes ſuivans, tous les termes qu'on aura trouvé qui précéderont celui qui eſt zero, ſeront l'intégrale exacte de la différentielle propoſée. Si l'on ne peut ainſi trouver l'intégrale finie de la différentielle propoſée par le moyen de la formule de la différentielle générale dont les expoſans n ſont poſitifs, il faudra ſe ſervir de la formule de la différentielle générale dont les expoſans n ſont négatifs ; & ſi l'on ne trouve pas d'intégrale finie par l'une & l'autre formule, la méthode ne peut la donner que par approximation, en ſubſtituant dans autant de termes qu'on voudra de celle des formules qui ſera trouver les termes qui iront le plus en diminuant par raport à la différentielle propoſée, les valeurs des lettres des expoſans & des coéficiens priſes de la différentielle propoſée dont on cherche l'intégrale.

AVERTISSEMENT.

712. ON ſçait par le calcul différentiel * quels doivent être les
* 541. expoſans de la changeante x dans tous les termes qu'on doit ſuppoſer pour former l'intégrale indéterminée (4) qui doivent aller en progreſſion arithmétique ; ainſi l'on n'a beſoin pour trouver l'intégrale que de trouver les coéficiens des termes ; & c'eſt à cela que ſervent les indéterminées A, B, C, &c. qui les repréſentent, & qui ſervent à les faire trouver. Cependant on peut employer la 3e méthode non-ſeulement à trouver ces coéficiens, mais auſſi à découvrir les expoſans que doit avoir la changeante x dans tous les termes de l'intégrale que l'on cherche ; & comme ils ſont en progreſſion arithmétique, il ſuffit de trouver les deux premiers. Pour cela il faut trouver l'intégrale par parties, c'eſt-à-dire, en trouver les termes les uns après les autres. Cette méthode étant utile pour découvrir les intégrales de pluſieurs différentielles particuliéres, & même de celles qui

ne ſont finies que par la ſuppoſition des quadratures ou rectifications des courbes, on a cru la devoir expliquer ici, & pour abreger le calcul on l'appliquera ſeulement à trouver l'intégrale des différentielles binomes $x^m dx \times \overline{a + bx^n}^p$.

Autre maniére de ſe ſervir de la troiſiéme méthode, en trouvant l'intégrale par parties.

Intégrale indéterminée $A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c. \times x^{m+1} K^{p+1}$.

Différentielle de l'intégrale indéterminée.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\,Aa + \overline{m+1}\,A\,b\,x^n \\ \quad + \overline{p+1}\,Anbx^n \\ \quad + \overline{m+1+n}\,Bax^n + \overline{m+1+n}\,Bbx^{2n} \\ \quad\quad + \overline{p+1}\,Bnbx^{2n} \end{array}\right\} \times dx x^m K^p$$

$$-1$$

713. On ſuppoſera, 1°. que le premier terme eſt $A \times x^{m+1} K^{p+1}$, (A eſt une indéterminée qui marque le coéficient du premier terme, & qui ſervira à le faire trouver ;) car il eſt évident par les régles du calcul différentiel *, que les expoſans de la changeante x & de la grandeur complexe repréſentée par K, doivent augmenter d'une unité chacun dans l'intégrale. Il faut prendre la différentielle de $Ax^{m+1} K^{p+1}$, & l'on aura, en écrivant les termes de l'intégrale à part à meſure qu'on les découvrira, & en écrivant auſſi les termes correſpondans de leurs différentielles les uns ſous les autres ; on aura, dis-je, les deux premiers termes de la différentielle de l'intégrale indéterminée. * 536, 537, 538.

2°. Mais le ſecond terme de la différentielle fait voir qu'il faut ſuppoſer pour ſecond terme de l'intégrale indéterminée $Bx^{m+1+n} K^{p+1}$; car on a beſoin de l'indéterminée B pour marquer le coéficient du ſecond terme, & il eſt évident qu'il faut ſuppoſer que l'expoſant de la changeante x doit avoir pour expoſant $m + 1 + n$, afin que la différentielle du ſecond terme donne au moins un terme correſpondant au ſecond terme de la différentielle du premier terme, autrement on ne pourroit pas avoir une équation pour déterminer B. Il faut à préſent prendre la différentielle du

ſecond terme, & l'ajouter à la différentielle du premier.

3°. Le troiſiéme terme de la différentielle des deux termes de l'intégrale indéterminée fait voir que le troiſiéme terme de cette intégrale doit être $Cx^{m+1+2n}K^{p+1}$, & la différentielle de ce troiſiéme terme fera connoître que le quatriéme terme doit être $Dx^{m+1+3n}K^{p+1}$, & ainſi de ſuite. Mais quand on a les deux premiers, la progreſſion arithmétique des expoſans eſt donnée, & il eſt inutile de chercher les autres.

4°. Après avoir pris autant de termes qu'on en voudra de l'intégrale indéterminée, & mis en ordre les termes de leurs différentielles, il faut ſuppoſer que la *ſuite* de cette différentielle eſt égale à la différentielle propoſée, c'eſt à-dire, il faut écrire les termes correſpondans de la différentielle propoſée, avec les ſignes négatifs, ſous ceux de la différentielle indéterminée qu'on vient de trouver; ſuppoſer que chaque terme de la *ſuite* que forment toutes ces différentielles, eſt égale à zero; déterminer par les équations que donnera cette ſuppoſition les valeurs de A, B, C, &c. & les ſubſtituer à leur place dans l'intégrale indéterminée, & l'on trouvera par la ſubſtitution la même intégrale qu'on a déja trouvée.

SECONDE PROPOSITION FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL.

714. LA quantité différentielle $ydx + xdy$ a pour ſon intégrale
* 523. xy*; la différence $yzdx + xzdy + xydz$, a pour intégrale xyz†.
† 523. De même $\overline{m+1}\,x^{n+1}y^m dy + \overline{n+1}\,x^n y^{m+1}dx$, a pour intégrale $y^{m+1}x^{n+1}$. De même la différentielle $\frac{ydx-xdy}{yy} = y^{-1}dx$
* 526. $- xy^{-2}dy$, a pour intégrale $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ *. De même $\frac{\frac{an}{b}x^{n-1}ydx - \frac{am}{b}x^n dy}{y^{m+1}} = \frac{an}{b}x^{n-1}y^{-m}dx - \frac{am}{b}x^n y^{-m-1}dy$, a pour intégrale $\frac{a}{b}x^n y^{-m} = \frac{ax^n}{by^m}$.

Il faut ſe rendre familiéres ces ſortes de différentielles & leurs intégrales où il y a pluſieurs changeantes, & ſur-tout celles où l'une des changeantes eſt au dénominateur; ou bien, ce qui eſt la même choſe, la puiſſance de l'une des changeantes à un expoſant négatif. On les a expliquées dans les articles 523, 524, 525, 526 & 527.

TROISIE'ME PROPOSITION FONDAMENTALE.

715. QUAND une quantité différentielle eſt égale à zero, ſon intégrale, quand on la peut trouver, doit être ſuppoſée égale à une grandeur conſtante, qu'il faudra prendre homogéne aux termes de l'intégrale.

Cette grandeur conſtante eſt ordinairement arbitraire, mais il eſt ſouvent de l'induſtrie de celui qui reſout un Problême où ſe trouve une telle différence, de prendre une grandeur arbitraire qui donne la réſolution la plus ſimple.

Soit, par exemple, la différence $\frac{2xydy-yydx}{xx}=0$, dont on trouve par la ſeconde propoſition fondamentale, que l'intégrale eſt $\frac{yy}{x}=yyx^{-1}$; il faut la ſuppoſer égale à une grandeur conſtante a, & l'on aura $\frac{yy}{x}=a$, ou bien $yy=ax$ pour l'intégrale complete.

REMARQUES.

I.

716. QUAND une différentielle qui contient deux changeantes, eſt une équation, & qu'on n'en peut pas trouver l'intégrale, il arrive quelquefois qu'en la multipliant par un même multiplicateur, ou la diviſant par un même diviſeur, on la réduit à la ſeconde ou à la troiſiéme propoſition fondamentale, c'eſt à-dire, on en peut trouver l'intégrale par ces propoſitions.

Par exemple on ne ſçauroit trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x}=\frac{2dy}{y}$, mais en la réduiſant à cette expreſſion $2xdy-ydx=0$, & la multipliant par $\frac{y}{xx}$, elle deviendra $\frac{2xydy-yydx}{xx}=0$, dont l'intégrale ſe trouve par la ſeconde propoſition fondamentale $\frac{yy}{x}$; & la rendant égale à une conſtante homogéne, on aura pour l'intégrale complete $\frac{yy}{x}=a$, ou bien $yy=ax$.

On trouvera de même l'intégrale de $nxdy-ydx=0$, en la multipliant par $\frac{y^{n-1}}{xx}$; car elle deviendra $\frac{nxy^{n-1}dy-y^ndx}{xx}=0$, dont l'intégrale eſt par la ſeconde propoſition fondamentale $\frac{y^n}{x}$, qui deviendra complete en la rendant par la 3e propoſition fondam. égale à une grandeur homogéne a^{n-1}, car l'on aura $\frac{y^n}{x}=a^{n-1}$, ou bien $y^n=a^{n-1}x$.

On réduira de même la différentielle $y^3dy = aaydx - aaxdy$ à la ſeconde propoſition fondamentale, en la diviſant par yy; car elle deviendra $ydy = \frac{aaydx - aaxdy}{yy}$, dont on trouvera que l'intégrale eſt $\frac{1}{2}yy = \frac{aax}{y}$, ou bien $y^3 = 2aax$.

En diviſant de même la différentielle $3xxydx + 3x^3dy = 2axydy - ayydx$ par xx, elle deviendra $3ydx + 3xdy = \frac{2axydy - ayydx}{xx}$, dont on trouvera par la ſeconde propoſition fondamentale, que l'intégrale eſt $3xy = \frac{ayy}{x}$, ou bien $3xx = ay$.

On réduira auſſi à la ſeconde propoſition fondamentale la différentielle $2axdy + xxdy = aydx + xydx$, en ſuppoſant $zz = 2ax + xx$, ce qui donnera $zdz = adx + xdx$; & ſubſtituant zz & zdz au lieu de leurs valeurs, l'équation deviendra $zdy = ydz$, ou bien $zdy - ydz = 0$; la diviſant par zz, l'on aura $\frac{zdy - ydz}{zz} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{y}{z}$, qu'on rendra complete en la ſuppoſant égale à une grandeur conſtante homogéne $\frac{a}{b}$; & remettant la valeur de z, l'intégrale ſera $by = a \times \sqrt{2ax + xx}$.

Enfin on réduira la différentielle $\frac{2axdy + 2xxdy - aydx - 2xydx}{2axy + 2xxy} = 0$ à la ſeconde propoſition fondamentale, en ſuppoſant $ax + xx = z$, ce qui donnera $dz = adx + 2xdx$; & ſubſtituant z au lieu de $ax + xx$, & dz au lieu de $adx + 2xdx$, l'équation deviendra $\frac{2zdy - ydz}{2zy} = 0$; la multipliant par $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}}$, l'on aura $\frac{2zdy - ydz}{2z^{1+\frac{1}{2}}} = 0$, dont l'intégrale eſt $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}}$, qu'il faut rendre égale à une conſtante $\frac{a}{b}$; & remettant la valeur de $z^{\frac{1}{2}}$, l'intégrale ſera $\frac{y}{\sqrt{ax + xx}} = \frac{a}{b}$. On remarquera dans les deux derniers exemples la maniére de réduire l'expreſſion compoſée de la différentielle à une plus ſimple, en ſuppoſant une ſeule changeante égale à une grandeur complexe.

II.

717. Quand les différentielles dans leſquelles les changeantes x & y, & leurs différences dx & dy ſont mêlées enſemble, ſont aſſez ſimples, ou quand étant compoſées on les peut aiſément réduire aux plus ſimples, comme dans les deux derniers exemples, on connoît d'abord ſi l'on en peut trou-

ver les intégrales par la ſeconde propoſition fondamentale ou ſi l'on ne le peut pas. Mais il s'en trouve beaucoup qui quoique ſimples ne ſont pas ſoumiſes à la ſeconde propoſition fondamentale, ou qui ſont ſi compoſées qu'on ne peut pas les réduire à des expreſſions ſimples dont on puiſſe trouver les intégrales par la ſeconde propoſition ſondamentale. Dans ces cas il faut ſéparer les changeantes x & y & leurs differences de maniére que dans les termes où ſont les x & les dx il n'y ait pas d'y ni de dy, & que ce ſoit la même choſe des y & dy; & enſuite on en cherche les intégrales par les méthodes qu'on a données pour trouver les intégrales des différentielles qui n'ont qu'une même changeante, ou bien l'on s'aſſure qu'on ne peut pas les trouver exactes, & qu'on ne peut les avoir que par approximation, ou tout au plus que ſi on les veut avoir finies dans pluſieurs cas, il faut ſuppoſer les rectifications ou les quadratures de quelques courbes.

Cette ſéparation des changeantes ſe fait, 1°. par les calculs ordinaires de l'Analyſe, par exemple en diviſant dans la différentielle $xdy = ydx$ chaque membre par xy, l'on aura $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, où les changeantes ſont ſéparées, & les cas où cela ſe peut faire ne ſont aucune difficulté. Cela ſe fait, 2°. en ſuppoſant les changeantes de la différentielle égales à d'autres changeantes autrement diſpoſées; & ſubſtituant dans la différentielle propoſée les ſecondes changeantes à la place des premiéres, on ſépare en pluſieurs cas les changeantes l'une de l'autre.

Par exemple pour ſéparer les changeantes de $adx = ydy - xdy$, on ſuppoſera $y - x = z$, d'où l'on aura $y = z + x$, & $dy = dz + dx$; & ſubſtituant z à la place de $y - x$, & $dz + dx$ à la place de dy, la différentielle deviendra $adx = zdz + zdx$, ou $adx - zdx = zdz$; & diviſant par $a - z$, l'on aura $dx = \frac{zdz}{a-z}$, où les changeantes ſont ſéparées.

Pour ſéparer auſſi les changeantes de l'équation $\sqrt{y} \times \overline{xdx + ydy} = \sqrt{a} \times \overline{xdy - ydx}$, on ſuppoſera $y = \frac{tz}{a}$ & $x = \frac{t}{a} \times \sqrt{aa - zz}$. Ce qui donnera $\sqrt{y} = \sqrt{\frac{tz}{a}}$; $dy = \frac{zdt + tdz}{a}$; $dx = \frac{dt}{a} \times \sqrt{aa - zz} - \frac{tzdz}{a\sqrt{aa - zz}}$. On ſubſtituera à la place de $\sqrt{y}$, y, dy, x, dx leurs valeurs; & l'on changera par ces ſubſtitutions l'équation propoſée en cette autre équivalente $atdt\sqrt{t} \times \sqrt{z} \times$

$\sqrt{aa - zz} = aattdz$, ou bien $atdt\sqrt{t} \times \sqrt{aaz - z^3} = aattdz$, qui se réduit à $\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{adz}{\sqrt{aaz - z^3}}$, qu'on peut auſſi exprimer par $\frac{dt}{\sqrt{at}} = \sqrt{\frac{adz}{az^3 - z^3}}$, dans laquelle les changeantes ſont ſéparées.

Mais l'on n'a pas de régles générales pour trouver comment il faut ſuppoſer les changeantes nouvelles qu'il faut ſubſtituer à la place des changeantes de la différentielle, afin de ſéparer certainement les changeantes.

718. Dans les cas où l'on ne peut pas faire cette ſéparation exacte des changeantes d'une équation différentielle où elles ſont mêlées, on peut toujours avoir l'intégrale par approximation; car on peut par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, trouver la valeur de y qui ne contienne que des x & des dx; & par conſéquent la valeur de dy auſſi en x & dx; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation différentielle, elle ne contiendra plus que la ſeule changeante x & dx, & l'on en pourra trouver l'intégrale au moins par approximation.

III.

Sur les intégrales des différences ſecondes, troiſiémes, &c.

719. TOUTES les méthodes qu'on a données juſqu'ici pour trouver les intégrales des *premiéres différences*, ſervent auſſi à trouver les intégrales des *différences ſecondes, troiſiémes, &c.* en remarquant que les différences premiéres ſont les intégrales des différences ſecondes, que ces derniéres le ſont des troiſiémes différences, & ainſi de ſuite; car il eſt évident que dx eſt l'intégrale de ddx, que $\frac{1}{2}dx^2$ eſt l'intégrale de $dxddx$, & ainſi des autres; ainſi l'intégrale de la différence ſeconde $dxdy = \frac{adxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dans laquelle on ſuppoſe dy conſtante, c'eſt-à-dire que dy n'a point de ſeconde différence, eſt $xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$. On remarquera auſſi qu'il faut quelquefois ajouter à l'intégrale qu'on trouve d'une ſeconde différence, ou en retrancher une grandeur différentielle conſtante du premier genre, c'eſt-à-dire une premiére différence qui n'ait pas de ſeconde différence, ou dont la ſeconde différence eſt zero; & de même pour les troiſiémes différences. La régle
* 664. que l'on a donnée* pour trouver cette grandeur conſtante dans les intégrales des premiéres différences, ſert auſſi pour les intégrales des différences ſecondes, troiſiémes, &c.

SECTION

SECTION II.

Où l'on enſeigne à trouver les intégrales finies des différentielles qui n'ont qu'une changeante dont on ne peut trouver les intégrales exactes, en ſuppoſant la rectification ou la quadrature des courbes.

AVERTISSEMENT.

220. QUAND on ne peut pas trouver par les méthodes de la ſection précédente les intégrales exactes des différentielles qui n'ont qu'une changeante, on peut toujours en trouver les valeurs approchées tant près que l'on voudra, en ſubſtituant dans autant de termes que l'on voudra des formules auſquelles ſe réduiſent les intégrales de ces différentielles, les valeurs des lettres de ces formules priſes des différentielles dont on cherche les intégrales; on peut encore trouver ces valeurs approchées des intégrales par les méthodes du ſecond Problême du ſeptiéme Livre, art. 175, comme on l'a fait voir dans la derniére ſection de la ſeconde Partie. Mais comme l'on eſt plus content de ſe repréſenter une grandeur incommenſurable, (par exemple la racine incommenſurable qui eſt une des valeurs de l'inconnue dans une équation irréductible du troiſiéme degré) par une ligne finie, ou par une figure finie, que par une approximation telle que l'on voudra; les Géométres de notre temps ont auſſi voulu, pour contenter tout le monde, repréſenter une intégrale que les méthodes ne donnent que par approximation, la repréſenter, dis-je, par un arc de courbe fini & regardé comme connu, ou par l'aire d'une courbe ſuppoſée comme connue. Il a fallu pour cela trouver des méthodes pour réduire les intégrales des différentielles dont les Régles que l'on a données ne font pas trouver les intégrales exactes, aux rectifications ou aux quadratures des courbes les plus ſimples, comme ſont les ſections coniques quand cela ſe peut. On a déja donné de ces méthodes dans la ſection précédente, * on en va donner d'autres dans les Problêmes ſuivans, en faiſant remarquer qu'on ſuppoſera, dans l'expreſſion générale d'une différentielle, la grandeur complexe de tant de ter- * 694, 695.

mes qu'on voudra qui eſt ſous le ſigne p, comme $a + bx^n + cx^{2n} +$ &c. égale à une ſeule lettre K, ainſi $dK = nbx^{n-1}dx + 2ncx^{2n-1}dx +$ &c. S'il y a une ſeconde grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra ſous le ſigne q multipliée par la premiére, on ſuppoſera cette ſeconde $a + bx^n + cx^{2n} +$ &c. $= l$, ce qui donnera $dl = nbx^{n-1}dx + 2ncx^{2n-1}dx +$ &c.

PROBLÊME I.

721. *LA lettre* r *dans l'expreſſion générale de la différentielle* $x^{m+rn}dxK^p$, *repréſentant tout nombre entier poſitif ou négatif, en y comprenant l'unité & zero, &* m, n, p *repréſentant tous les expoſans que peuvent avoir* x *&* K, *cette différentielle peut repréſenter une* ſuite *infinie de différentielles; l'intégrale d'une ſeule de ces différentielles étant ſuppoſée connue lorſque* K^p *eſt un binome; deux lorſque* K^p *eſt un trinome; trois quand* K^p *eſt un quatrinome, & ainſi de ſuite; trouver les intégrales de chacune des autres différentielles de cette* ſuite *infinie.*

CETTE ſuite infinie de différentielles eſt $\int x^{m-3n}dxK^p$, $\alpha x^{m-2n}dxK^p$, $\beta x^{m-1n}dxK^p$, $ax^m dxK^p$; $bx^{m+1n}dxK^p$, $cx^{m+2n}dxK^p$, $dx^{m+3n}dxK^p$, &c.

POUR LES BINOMES.

L'INTEGRALE d'une ſeule de ces différentielles comme $ax^m dxK^p$, étant ſuppoſée connue, & nommée $a \times A$ (c'eſt-à-dire A eſt l'intégrale, & (a) ſon coéficient,) il faut trouver les intégrales de toutes les autres quand elles ſont binomes. Pour les trouver il faut aller de ſuite, & trouver l'intégrale du terme $bx^{m+1n}dxK^p$, qui ſuit à droite celle qu'on vient de ſuppoſer connue, & avec l'intégrale de ce terme on trouvera celle du ſuivant $cx^{m+2n}dxK^p$, & ainſi à l'infini, & enſuite par le retour on trouvera les intégrales des termes qui vont de la droite à la gauche.

On remarquera que, quand une différentielle propoſée n'a pas par les régles de la premiére ſection une intégrale exacte, l'intégrale de cette différentielle n'eſt que ſuppoſée; mais que quand on a beſoin dans une réſolution d'une intégrale quelconque, par exemple ſi l'on a beſoin de l'intégrale $x^{m+1}K^{p+1}$, ou $x^{m+n+}K^{p+1}$, ou de telle autre qu'on voudra; cette intégrale & ſa différentielle qu'on peut toujours

trouver par le calcul différentiel, ne ſont pas ſuppoſées, elles ſont exactement connues.

RESOLUTION.

722. POUR trouver l'intégrale de $b x^{m+n} dx K^p$, en ſuppoſant connue l'intégrale $a \times A$ de $a x^n dx K^p$, l'on employera l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$, & on en prendra la différentielle

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\, a + \overline{m+1}\, b x^n \\ \quad + \overline{p+1}\, n b x^n \\ \quad - a \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p.$$

2°. On en ôtera la différentielle donnée

3°. On ôtera auſſi l'intégrale ſuppoſée $a \times A$ de l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$. La différence $x^{m+1} K^{p+1} - a \times A$ ſera l'intégrale de la différentielle entiere

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\, a + \overline{m+1}\, b x^n \\ \quad + \overline{p+1}\, n b x^n \\ \quad - a \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p.$$

4°. On ſuppoſera le premier terme de la différentielle égal à zero, c'eſt-à-dire $\overline{m+1}\, a = a$.

5°. On mettra cette valeur de (a) dans l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1} - a A$, & l'on aura $x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\, a A$ pour l'intégrale de la différentielle $\overline{m+1} + \overline{p+1}\, n \times b x^{m+n} dx K^p$, le premier terme étant zero.

6°. On diviſera cette intégrale & ſa différentielle par le coéficient de la différentielle, & on multipliera les quotiens par b, & l'on aura $\dfrac{b x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\, b a A}{\overline{m+1} + \overline{p+1}\, n \times b}$ pour l'intégrale de la différentielle propoſée $b x^{m+n} dx K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Si l'on ſuppoſe à préſent connue l'intégrale qu'on vient de trouver, & qu'on la nomme pour abreger $b \times B$, on trouvera par ſon moyen l'intégrale de la différentielle ſuivante $c x^{m+2n} dx K^p$, en ſe ſervant de l'intégrale $x^{m+n+1} K^{p+1}$; car ſa différentielle ſera

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+n+1}\, a x^n + \overline{m+n+1}\, b x^{2n} \\ \quad + \overline{p+1}\, n b x^{2n} \\ \quad - b x^n \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p;$$

d'où l'on ôtera la différentielle propoſée

Et $x^{m+n+1} K^{p+1} - b \times B$ ſera l'intégrale de cette différentielle totale.

Suppoſant $\overline{m+n+1}\ a = b$, & ſubſtituant cette valeur de b dans l'intégrale, l'on aura $x^{m+n+1} K^{p+1} - \overline{m+n+1}\ a \times B$ pour l'intégrale de la différentielle $\overline{m+n+1} + \overline{p+1}\ n \times b x^{m+2n} dx K^p$. Diviſant cette différentielle & ſon intégrale par le coéficient de cette différentielle, & multipliant les quotiens par c, l'on aura $\frac{c x^{m+n+1} K^{p+1} - \overline{m+n+1}\ a \times c B}{\overline{m+n+1} + \overline{p+1}\ n \times b}$ pour l'intégrale de $c x^{m+2n} dx K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

AVERTISSEMENT.

723. ON trouvera de la même maniére l'intégrale de la différentielle ſuivante $d x^{m+3n} dx K^p$ par le moyen de l'intégrale qu'on vient de découvrir ; & ainſi de ſuite à l'infini. Voici à préſent la maniére de retourner de la droite vers la gauche : on le peut faire de l'intégrale ſuppoſée de telle différentielle qu'on voudra de la *ſuite* infinie à celle qui la précéde immédiatement vers la gauche ; mais pour être court on n'en mettra que deux exemples.

724. Pour trouver l'intégrale de $a x^m dx K^p$, en ſuppoſant connue l'intégrale qu'on nommera $b \times B$ de la differentielle $b x^{m+n} dx K^p$, on ſe ſervira de l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$, dont la différentielle eſt $\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\ a + \overline{m+1}\ b x^n \\ \quad + \overline{p+1}\ n b x^n \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p$; on ôtera la différentielle donnée du 2d terme $\left.\begin{array}{l} \\ - \ b x^n \end{array}\right\}$

En ôtant l'intégrale ſuppoſée bB de l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$, l'on aura $x^{m+1} K^{p+1} - bB$ pour l'intégrale de cette différentielle totale. On ſuppoſera ſon ſecond terme, & non pas le premier, égal à zero ; ce qui donnera $b = \overline{m+1} + \overline{p+1}\ n \times b$. On ſubſtituera cette valeur de b dans l'intégrale précédente, & l'on aura $x^{m+1} K^{p1+} - \overline{m+1} - \overline{p+1}\ n \times bB$ pour l'intégrale de $\overline{m+1}\ a x^m dx K^p$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $\overline{m+1}\ a$, & l'on multipliera les deux quotiens par (a), & l'on aura $\frac{a x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1} - \overline{p+1}\ n \times b a B}{\overline{m+1}\ a}$

pour l'intégrale de $ax^m dx K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Suppoſant, pour abreger, l'intégrale de la différentielle $ax^m dx K^p$ qu'on vient de découvrir, repréſentée par aA, pour trouver l'intégrale de la différentielle $\beta x^{m-n} dx K^p$, on ſe ſervira de l'intégrale $x^{m-n+1} K^{p+1}$, dont la différentielle eſt $\left.\begin{array}{l} \overline{m-n+1}\, ax^{-n} + \overline{m-n+1}\, b \\ + \cdot\ \overline{p+1}\, nb \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p.$

on ôtera la différentielle donnée du 2d terme $\left.\begin{array}{l} \\ - \quad a \end{array}\right\}$

L'intégrale de cette différentielle totale ſera $x^{m-n+1} K^{p+1} - aA$. On ſuppoſera le ſecond terme égal à zero ; ce qui donnera $a = \overline{m-n+1} + \overline{p+1}\, n \times b$. Subſtituant cette valeur dans l'intégrale, on aura $x^{m-n+1} K^{p+1} - \overline{m-n+1} - \overline{p+1}\, n \times bA$ pour l'intégrale de $\overline{m-n+1}\, ax^{m-n} dx K^p$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $\overline{m-n+1}\, a$, & on multipliera les quotiens par β, & l'on aura

$$\frac{\beta x^{m-n+1} K^{p+1} - \overline{m-n+1} - \overline{p+1}\, n \times b\beta A}{\overline{m-n+1}\, a}$$

pour l'intégrale de la différentielle $\beta x^{m-n} dx K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

On trouvera de même par ordre les intégrales de toutes les différentielles qui vont de droite à gauche dans la *ſuite* infinie.

POUR LES TRINOMES.

25. LEs deux intégrales qu'on nommera $a \times A$, $b \times B$ des deux différentielles trinomes $ax^m dx K^p$, $bx^{m+n} dx K^p$, étant ſuppoſées connues ; pour trouver l'intégrale de la différentielle ſuivante $cx^{m+2n} dx K^p$ de la *ſuite* infinie, 1°. il faut ſe ſervir de l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$, & en prendre la différentielle qui eſt $\left.\begin{array}{l} \overline{m+1} \times a + \overline{m+1} \times bx^n + \overline{m+1} \times cx^{2n} \\ + \overline{p+1} \times nbx^n + \overline{p+1} \times 2ncx^{2n} \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^p.$

en ôter les deux différentielles données $\left.\begin{array}{l} \\ - \ a \quad - \ bx^n \end{array}\right\}$

L'intégrale de cette différentielle totale eſt $x^{m+1}K^{p+1} - aA - bB$.

2°. Il faut ſuppoſer les deux premiers termes de la différentielle totale chacun égal à zero, ce qui donnera $a = \overline{m+1} \times a$, & $b = \overline{m+1} + \overline{p+1} \times n \times b$, & ſubſtituer ces valeurs dans l'intégrale précédente, & l'on aura $x^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1} \times aA - \overline{m+1} - \overline{p+1} \times n \times bB$ pour l'intégrale de $\overline{m+1} + \overline{p+1} \times 2n \times cx^{m+2n}dxK^p$, les deux premiers termes étant zero.

3°. Il faut diviſer par le coéficient de cette différentielle, cette même différentielle & ſon intégrale, & multiplier les deux quotiens par c, & l'on aura

$$\frac{cx^{m+1}K^{p+1} - \overline{m+1}\,acA - \overline{m+1} - \overline{p+1}\,n \times bcB}{\overline{m+1} + \overline{p+1}\,2n \times c}$$

pour l'intégrale de la différentielle $cx^{m+2n}dxK^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

AVERTISSEMENT.

726. ON peut de la même maniére avec l'intégrale qu'on vient de découvrir, & avec l'intégrale bB, trouver l'intégrale de la différentielle trinome ſuivante $dx^{m+3n}dxK^p$, & ainſi de ſuite à l'infini; & retourner de la droite à la gauche comme dans les binomes. On peut de même appliquer la même méthode aux différentielles quadrinomes; mais il faudra ſuppoſer connues les intégrales de trois différentielles, & en ſuppoſer quatre pour les différentielles de cinq termes, & ainſi de ſuite à l'infini.

PROBLÈME II.

727. *DANS l'expreſſion générale* $x^m dx K^{p+s}$, *l'indéterminée* s *repréſentant tous les nombres entiers poſitifs & négatifs en y comprenant l'unité & zero, &* m *repréſentant tous les expoſans que peut avoir la changeante* x *hors du ſigne, &* p *tout expoſant du ſigne de la grandeur complexe marquée par* K, *cette différentielle peut exprimer une ſuite infinie de différentielles dans leſquelles* m *repréſente tous les expoſans poſſibles des puiſſances de la changeante* x *hors du ſigne, &* p *tous les expoſans poſſibles des puiſſances de la grandeur complexe* K; s *marque* 0, 1, 2, 3, 4, *&c.* 0, — 1, — 2, — 3, *&c. l'intégrale d'une ſeule différentielle de cette* ſuite

étant supposée connue quand K *est binome ; deux quand* K *est trinome, & ainsi de suite ; trouver les intégrales de toutes les différentielles de la suite infinie.*

CETTE *suite* infinie de différentielles peut être ainsi représentée $\delta x^m dx K^{p-3}$, $\chi x^m dx K^{p-2}$, $\beta x^m dx K^{p-1}$, $a x^m dx K^p$, $b x^m dx K^{p+1}$, $c x^m dx K^{p+2}$, $d x^m dx K^{p+3}$, &c. on remarquera que, pour abreger, m représente tous les exposans possibles de x^{m+rm} hors du signe, comme au Problême précédent.

POUR LES BINOMES.

ON trouvera de suite, l'une après l'autre, l'intégrale de chacune de ces différentielles, depuis celle dont on suppose l'intégrale connue, comme dans le Problême précédent ; mais la méthode étant un peu plus simple en allant de la droite vers la gauche, on la mettra la premiére, & ensuite on donnera la methode pour aller de la gauche à la droite.

Pour trouver par exemple l'intégrale de $\beta x^m dx K^{p-1}$, en supposant connue l'intégrale de $a x^m dx K^p$, qu'on nommera aA, 1°. il faut préparer la différentielle donnée $a x^m dx K^p$, en la multipliant par la valeur de $K = a + bx^n$, & la divisant en même tems par K, ce qui n'en changera point la valeur, & l'on aura $\overline{aa + abx^n} \times dx \times x^m K^{p-1}$, dont l'intégrale sera toujours aA. 2°. Il faut se servir de l'intégrale $x^{m+1} K^p$, & en prendre la différentielle qui est

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\, a + \overline{m+1}\, bx^n \\ \quad + \quad pn\, bx^n \end{array}\right\} \times dx \times x^m K^{p-1}.$$

Il faut lui ajouter la différentielle préparée

$$\left.\begin{array}{l} + a\,a + \quad a\,bx^n \end{array}\right\}$$

L'intégrale de cette différentielle totale sera $aA + x^{m+1} K^p$.

3°. Il faut supposer le second terme de la différentielle totale égal à zero, ce qui donnera $a = -m - 1 - pn$; substituer cette valeur de (a) dans l'intégrale & dans le premier terme de la différentielle totale, & l'on aura $x^{m+1} K^p - \overline{m - 1 - pn} \times A$ pour l'intégrale de $-pn\,a\,x^m dx K^{p-1}$; puisque le second terme = 0.

4°. Il faut diviser cette intégrale & sa différentielle par le coéficient $-pn\,a$ de la différentielle, & multiplier les

quotiens par β, & l'on aura $\frac{\beta x^{m+1} K^p - \overline{m+1} - pn \times \beta A}{-pna}$ pour l'intégrale de $\beta x^m dx K^{p-1}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

On trouvera de la même maniére avec l'intégrale de $\beta x^m dx K^{p-1} = \overline{\beta a + \beta b x^n} \times x^m dx K^{p-2}$ qu'on vient de découvrir, & qu'on peut ſuppoſer $= \beta B$, l'intégrale de la différentielle $\chi x^m dx K^{p-2}$, & ainſi de ſuite à l'infini en allant de la droite à la gauche.

728. Pour aller de la gauche vers la droite, il faut multiplier non la différentielle ſuppoſée, mais la différentielle même dont on cherche l'intégrale par la valeur de $K = a + bx^n$, & la diviſer en même tems par K, & de plus trouver d'abord l'intégrale d'un des termes de la différentielle préparée, & par le moyen de cette intégrale trouver l'intégrale de l'autre terme, & la ſomme de ces deux intégrales ſera l'intégrale de la différentielle propoſée.

Par exemple pour trouver l'intégrale de la différentielle $b x^m dx K^{p+1}$, en ſuppoſant connue l'intégrale de $a x^m dx K^p$ qu'on nommera aA; 1°. il faut préparer $b x^m dx K^{p+1}$ en la réduiſant à $b\overline{a + bx^n} \times x^m dx K^p$; ſe ſervir de l'intégrale $x^{m+1} K^{p+1}$, dont on prendra la différentielle qui eſt

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\, a + \overline{m+1}\, bx^n \\ \qquad + \overline{p+1}\, nbx^n \end{array}\right\} \times x^m dx K^p.$$

Il faut lui ajouter la différentielle donnée $+ a$

L'intégrale de cette différentielle totale ſera $x^{m+1} K^{p+1} + aA$.

2°. Il faut ſuppoſer le premier terme de la différentielle totale $= 0$, ce qui donnera $a = -\overline{m+1}\, A$; ſubſtituer cette valeur de (a) dans l'intégrale, & l'on aura $x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\, aA$ pour l'intégrale du 2d terme $\overline{m+1 + p+1}\, n \times bx^{m+n} dx K^p$, le premier terme étant $= 0$. Il faut diviſer cette intégrale & ſa différentielle par le coéficient de la différentielle, & multiplier les quotiens par bb, & l'on aura $\frac{b x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\, baA}{\overline{m+1 + p+1}\, n}$ pour l'intégrale du ſecond terme $bb x^{m+n} dx K^p$ de la différentielle dont on cherche l'intégrale.

3°. Pour

3°. Pour trouver l'integrale du premier terme $b a x^m dx K^p$ de la même differentielle, il faut ſe ſervir de la même integrale $x^{m+1} K^{p+1}$, en prendre la differentielle qui eſt

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\ a + \overline{m+1}\ b x^n \\ \quad + \overline{p+1}\ n b x^n \end{array}\right\} \times x^m dx K^p$$

lui ajouter le ſecond terme de la differentielle propoſée $+ \quad b b x^n$

L'integrale de cette differentielle totale ſera $x^{m+1} K^{p+1} + \frac{b x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\ b a A}{\overline{m+1} + \overline{p+1}\ n}$. Il faut ſuppoſer le ſecond terme de cette differentielle totale $= o$, ce qui donnera $b = -\frac{}{\overline{m+1} - \overline{p+1}\ n}$; ſubſtituer cette valeur de b dans l'integrale précedente, & l'on aura $x^{m+1} K^{p+1} \frac{-\overline{m+1} - \overline{p+1}\ n \times x^{m+1} K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\ n}$

$$+ \frac{\overline{m+1}\ a \times + \overline{m+1} + \overline{p+1}\ n \times A}{m+1+\overline{p+1}\ n} = \frac{\overline{m+1}\ a \times m+1+\overline{p+1}\ n \times A}{m+1+\overline{p+1}\ n}$$

$= \overline{m+1}\ a \times A$ pour l'integrale du 1er terme $\overline{m+1}\ a x^m dx K^p$ de la differentielle totale précedente, ſon ſecond terme étant $= o$.

Il faut diviſer cette integrale & ſa differentielle par le coëficient de la même differentielle, & multiplier les quotiens par ba, & l'on aura baA pour l'integrale du premier terme $b a x^m dx K^p$ de la differentielle propoſée.

4°. Il faut ajouter les deux integrales des deux termes de la differentielle propoſée, & l'on aura $baA + \frac{b x^{m+1} K^{p+1} - \overline{m+1}\ baA}{\overline{m+1} + \overline{p+1}\ n}$

$= \frac{\overline{p+1}\ nbaA + b x^{m+1} K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\ n}$ pour l'integrale de la differentielle propoſée $b x^m dx K^{p+1} = \overline{ba + b b x^n} \times x^m dx K^p$, *Ce qu'il falloit trouver.*

29. Pour s'aſſurer que ces méthodes de la droite à la gauche & de la gauche à la droite ſe rapportent, il n'y a qu'à chercher, par la premiere, l'integrale de $a x^m dx K^p$ qu'on a ſuppoſée égale à aA par l'integrale $\frac{\overline{p+1}\ n baA + b x^{m+1} K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\ n}$,

qu'on vient de découvrir par la derniere, de la differentielle $bx^m dx K^{p+1} = \overline{ba + bbx^n} \times x^m dx K^p$, & l'on retrouvera aA; car employant l'integrale $x^{m+1} K^{p+1}$ dont la differentielle est $\left.\begin{matrix} \overline{m+1}\ a + \overline{m+1}\ bx^n \\ + \overline{p+1}\ nbx^n \end{matrix}\right\} \times x^m dx K^p$, lui ajoutant la differentielle $\left.\begin{matrix} + ba + bb\ x^n \end{matrix}\right\}$ L'integrale de cette differentielle totale ſera $x^{m+1} K^{p+1} + \frac{\overline{p+1}\ nbaA + bx^{m+1} K^{p+1}}{m+1+\overline{p+1}\ n}$. Suppoſant le ſecond terme de la differentielle totale $= 0$, l'on aura $b = -m-1 - \overline{p-1}\ n$. Subſtituant cette valeur de b dans l'integrale précedente & dans le premier terme de ſa differentielle, l'on trouvera après avoir abregé, $-\overline{p+1}\ naA$ pour l'integrale du premier terme de la differentielle, qui ſe réduira à $-\overline{p+1}\ nax^m dx K^p$, car le ſecond terme $= 0$. Diviſant cette integrale & ſa differentielle par $-\overline{p+1}\ na$, & multipliant les quotiens par a, l'on trouvera aA pour l'integrale de $ax^m dx K^p$. *Ce qu'il falloit trouver.*

730. Il eſt évident que l'integrale d'une ſeule differentielle, laquelle on voudra, de la ſuite infinie du ſecond Problême où l'expoſant p augmente ou diminue par ordre d'une unité, étant donnée, quand K eſt un binome; on peut trouver par ces deux méthodes les integrales de toutes les autres.

POUR LES TRINOMES.

731. LES integrales, qu'on nommera aA, fF des deux differentielles $ax^m dx K^p$, $fx^{m+n} dx K^p$ (dans leſquelles K doit avoir le même expoſant p) étant ſuppoſées connues, on peut trouver l'integrale de laquelle on voudra des quatre differentielles $x^m dx K^{p-1}$, $x^{m+n} dx K^{p-1}$, $x^{m+2n} dx K^{p-1}$, $x^{m+3n} dx K^{p-1}$, dans leſquelles l'expoſant $p-1$ de la grandeur trinome K eſt le même, & d'une unité moindre que l'expoſant p des deux differentielles données dont les integrales aA, fF ſont ſuppoſées connues.

Pour cela, 1°. il faut préparer les deux differentielles données, les multipliant chacune par la valeur de $K = a + bx^n + cx^{2n}$, & les diviſant en même temps par K, & elles devien-

dront $\overline{a\,a + abx^n + acx^{2n}} \times x^m dx K^{p-1}$, $\overline{fax^n + fbx^{2n} + fcx^{3n}} \times x^m dx K^{p-1}$, sans changer de valeur.

2°. Il faut se servir des deux integrales $gx^{m+1}K^p$, $hx^{m+n+1}K^p$, en prendre les differentielles qui sont

$$\left.\begin{array}{l} \overline{m+1}\,g\,a + \overline{m+1}\,g\,b\,x^n + m+1\,g\,c\,x^{2n} \\ \quad + p\,n\,g\,b\,x^n + 2\,p\,n\,g\,c\,x^{2n} \\ + \overline{m+n+1}\,h\,a\,x^n + \overline{m+n+1}\,h\,b\,x^{2n} + \overline{m+n+1}\,h\,c\,x^{3n} \\ \quad + p\,n\,h\,b\,x^{2n} + 2\,p\,n\,h\,c\,x^{3n} \end{array}\right\} \times x^m dx K^{p-1},$$

Il faut leur ajouter les deux differentielles préparées.

$$\left.\begin{array}{l} + a\,a + a\,b\,x^n + a\,c\,x^{2n} \\ \quad + f\,a\,x^n + f\,b\,x^{2n} + f\,c\,x^{3n} \end{array}\right\}$$

L'integrale de cette differentielle totale est par la supposition $a\,A + f\,F + g\,x^{m+1}K^p + h\,x^{m+n+1}K^p$.

3°. Pour trouver à present l'integrale de laquelle on voudra des quatre differentielles $x^m dx K^{p-1}$, $x^{m+n} dx K^{p-1}$, $x^{m+2n} dx K^{1-p}$, $x^{m+3n} dx K^{p-1}$, qui sont comme les inconnues qui distinguent les quatre termes de la differentielle totale ; il faut supposer les trois autres termes égaux chacun à zero, & non pas le terme où est la differentielle dont on veut trouver l'integrale.

Par exemple pour trouver l'integrale de la differentielle $x^{m+n} dx K^{p-1}$, il faut supposer le premier terme, le troisiéme & le quatriéme de la differentielle totale chacun égal à zero, ce qui réduira la differentielle totale au seul second terme : L'équation du premier terme donnera $a = -\overline{m-1}\,g$, celle du quatriéme donnera $f = -\overline{m-n-1-2pn} \times h$. Substituant ces valeurs de a & de f dans la troisiéme, on trouvera $h = \frac{2gc}{b}$.

Il faut substituer ces valeurs de a, f, h dans le second terme de la differentielle totale qui est demeuré seul, & dans l'integrale de la differentielle totale, & par ces substitutions on aura $-\overline{m-1}\,g\,A - \overline{m-n-1-2pn} \times \frac{2gc}{b} F + g x^{m+1} K^p + \frac{2gc}{b} x^{m+n+1} K^p$ pour l'integrale de cette differentielle $\frac{fn2hb - 4fn2ac}{b} x^{m+n} dx K^{p-1}$. Enfin il faut diviser cette integrale & sa differentielle par le coëficient de la differentielle, & l'on

aura $\frac{bgx^{m+1}K^p + 2gcx^{m+n+1}K^p - m-1\,bgA - m-n-1 - 2pn \times 2gcF}{pngbb - 4pngac}$

pour l'integrale de la differentielle $x^{m+n}dxK^{p-1}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUES.

I.

732. L'ON peut trouver de la même maniere les integrales de $x^m dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{p-1}$, & $x^{m+3n}dxK^{p-1}$; & l'on trouvera par la même méthode avec les integrales de $x^m dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, les integrales de $x^m dxK^{p-2}$, $x^{m+n}dxK^{p-2}$; & avec celles-ci, les integrales de $x^m dxK^{p-3}$, $x^{m+n}dxK^{p-3}$, & ainſi de ſuite à l'infini. On trouvera auſſi les integrales des differentielles où l'expoſant p augmente de ſuite d'une unité, comme de $x^m dxK^{p+1}$, $x^m dxK^{p+2}$, &c. en ſuppoſant pour la premiere les integrales connues de $x^m dxK^p$, $x^{m+n}dxK^p$, & trouvant par leur moyen celles de $x^m dxK^{p+1}$, $x^{m+n}dxK^{p+1}$, & enſuite, par celles-ci, on trouvera les integrales de $x^m dxK^{p+2}$, &c. comme dans les binomes.

II.

733. Quand on a trouvé par ce ſecond Problême les integrales des quatre differentielles $x^m dxK^{p-1}$, $x^{m+n}dxK^{p-1}$, $x^{m+2n}dxK^{p-1}$, $x^{m+3n}dxK^{p-1}$, on peut trouver par le premier Problême toutes les autres differentielles de la *ſuite* infinie, où l'expoſant $p-1$ demeurant le même, les expoſans de x vont en augmentant de ſuite, ou en diminuant d'une n, ce qu'il faut auſſi entendre de chaque autre *ſuite* où l'expoſant $p-2$, ou $p-3$, ou $p+1$, ou $p+2$, &c. demeure le même, n'y ayant de changement que dans les expoſans n de la changeante x hors du ſigne qui augmentent ou diminuent de ſuite de $1n$.

III.

734. La differentielle generale peut être compoſée de pluſieurs grandeurs complexes ſous differens ſignes, multipliées les unes par les autres, par exemple $x^{m+rn}dxK^{p+s}l^{q+t}$, où $K = a + bx^n + cx^{2n}$, &c. $l = e + fx^n + gx^{2n}$ + &c. & de plus r, s, t repréſentent chacune de ſuite tous les nombres entiers poſitifs & négatifs y comprenant zero & l'unité. Or pourvû

qu'on ait les integrales données d'autant de differentielles de suite compriſes dans cette expreſſion generale, qu'il y a des termes moins deux dans les deux grandeurs complexes, c'eſt-à-dire, deux, quand les deux grandeurs complexes ſont chacune un binome ; trois, quand l'une eſt binome & l'autre trinome ; quatre, quand les deux ſont trinomes, & ainſi de ſuite ; on pourra toujours par le premier & le ſecond Problême trouver les integrales de toutes les autres differentielles compriſes dans la differentielle generale, c'eſt-à-dire dans leſquelles m, n, p, q, ont les mêmes valeurs, & qui ne different entr'elles que par les nombres entiers poſitifs ou négatifs que peuvent repréſenter r, s, t.

SUPPOSITION OU DEMANDE.

35. ON a déja dit qu'une differentielle quelconque $dx \times x^m \times \overline{a + bx^n + cx^{2n}}^p +$ &c. où il n'y a qu'une changeante, pouvoit être regardée comme l'élement de l'aire d'une courbe dont la coupée eſt la changeante x, l'ordonnée eſt $x^m \times \overline{a + bx^n}^p +$ &c. & la differentielle eſt le produit de l'ordonnée par la difference dx de la coupée. Quand les élemens de l'aire de deux courbes ſont égaux, les aires de ces courbes ſont égales.

DE'FINITION.

36. LE changement d'une differentielle en une autre dont l'integrale ſera égale à l'integrale de la premiere, s'appellera *la transformation* des differentielles comme auſſi des courbes & la ſeconde ſe nommera la *transformée* de la premiere.

PROBLÊME III.

SUR LA TRANSFORMATION DES DIFFERENTIELLES ET DES COURBES.

37. *UNE differentielle étant donnée, la transformer en telle autre qu'on voudra qui ſoit l'élement de l'aire d'une courbe égale à l'aire de la premiere.*

RESOLUTION.

IL n'y a qu'à prendre une nouvelle changeante u en tel raport que l'on voudra avec la changeante x qui eſt la coupée dans la differentielle donnée, & ſuppoſer qu'elle eſt la

coupée de la courbe transformée ; trouver la valeur de la premiere coupée x, & de la premiere ordonnée, exprimées par la nouvelle changeante u de la ſeconde coupée ; prendre la difference de cette nouvelle coupée u, & faire une proportion dont la differentielle du de la nouvelle coupée ſoit le premier terme, la difference dx de la premiere coupée x & ſon ordonnée exprimées par la nouvelle changeante u, le ſecond & le troiſiéme terme, & le quatrieme terme ſera l'ordonnée de la transformée ; car le produit des extrêmes ſera l'élement de l'aire de la transformée, & le produit des moyens eſt l'élement de la propoſée.

On a par exemple la differentielle $\frac{ax^{n-1}dx}{a+bx^n}$, qu'il faut regarder comme l'élement de l'aire d'une courbe dont x eſt la coupée, & $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^n}$ l'ordonnée. On la transformera en une autre courbe dont l'aire ſoit égale à la premiere, & dont la coupée ſoit u, en ſuppoſant que $x^n = u$ eſt le raport de la premiere coupée à la ſeconde ; ce qui donnera $x = u^{\frac{1}{n}}$; $x^{n-1} = u^{1-\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du$; & $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^n} = \frac{au^{1-\frac{1}{n}}}{a+bu}$. On fera enſuite cette proportion $du.\ dx\ \left(\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du\right) :: \frac{ax^{n-1}}{a+bx^n}\ \left(\frac{au^{1-\frac{1}{n}}}{a+bu}\right) \cdot \frac{a}{n\times a+bu}$; ce quatriéme terme ſera l'ordonnée de la transformée, puiſque l'élement de cette derniere, qui eſt le produit des extrêmes, eſt égal à celui de la premiere, qui eſt le produit des moyens ; & $\frac{a}{n\times a+bu}du$ ſera l'élement de l'aire de la transformée ; & l'aire S. $\frac{a}{n\times a+bu}du$ de la transformée ſera égale à l'aire S. $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^n}dx$ de la propoſée.

738. On peut auſſi (ce qui abrege ſouvent le calcul) faire la proportion en mettant pour premier terme la difference du de la nouvelle coupée exprimée par la changeante x ; pour ſecond & troiſiéme terme, la differentielle dx, & l'ordonnée $\frac{ax^{n-1}}{a+bx^n}$, & le quatriéme terme qui en viendra ſera l'ordon-

née de la transformée, qu'il faudra exprimer enſuite par la changeante u.

Dans notre exemple, où $u = x^n$, la proportion ſera $du = nx^{n-1}dx . dx :: \frac{a x^{n-1}}{a+bx^n} \cdot \frac{a}{n \times a+bx^n}$. Subſtituant u à la place de x^n, l'ordonnée de la transformée ſera $\frac{a}{n \times a+bu}$, & la differentielle transformée ſera $\frac{a}{n \times a+bu} du$.

Mais $\frac{a}{n \times a+bu} du = \frac{1}{n} \times \frac{a}{a+bu} du$ (en ſuppoſant que (a) eſt le quarré de l'hyperbole équilatere, c'eſt-à-dire que $a = AG \times KG$ (fig. 47;) que $b = 1$; $a = KF$; $u = FI$,) eſt l'élement * du quadrilatere hyperbolique $FIif$ multiplié par $\frac{1}{n}$, & $\frac{1}{n} \times$ S. $\frac{a}{a+bu} du$ eſt ce quadrilatere même ſuppoſé connu. Ainſi l'integrale de la differentielle priſe pour exemple $\frac{a x^{n-1}}{a+bx^n} dx$, eſt égale à l'eſpace hyperbolique entre les aſymptotes $FIif$ de l'hyperbole équilatere multiplié par $\frac{1}{n}$.

FIGURE XLVII. * 691.

L'on peut enſuite faire une table où ſoient toutes marquées les integrales des differentielles $\frac{b x^{2n-1}}{a+bx^n} dx$; $\frac{c x^{3n-1}}{a+bx^n} dx$, &c. qu'on trouvera facilement par le premier Problême *, ou par les formules des articles 694 & 695, en ſuppoſant connue la quadrature de l'aire hyperbolique S. $\frac{a}{a+bu} du$.

* 721, 722. & les ſuiv.

COROLLAIRE.

397. ON peut par le moyen de ce troiſiéme Problême faire en ſorte que les expoſans de la nouvelle changeante u dans les termes de la grandeur complexe de la differentielle transformée, ſoient en telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, & qu'ils y ſoient même négatifs.

Par exemple on peut raporter les differentielles particulieres à ces expreſſions generales; 1re. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}^p$ + &c. 2e. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}$ + &c. $\times \overline{e+fx^n+gx^{2n}}^p$ + &c. 3e. $x^m dx \times \overline{a+bx^n+cx^{2n}}$ + &c. $\times \overline{e+fx^n+gx^{2n}}^p \times \overline{h+ix^n+Kx^{2n}}^q$ + &c. Pour faire en ſorte que dans les

termes des grandeurs complexes des transformées les expoſans de u ſoient en une telle progreſſion arithmetique que l'on voudra, que l'on pourra marquer par l, $2l$, $3l$, &c. en donnant à l telle grandeur que l'on voudra, il n'y a qu'à ſuppoſer $x^n = u^l$, u marque la nouvelle coupée; cela donnera $u = x^{\frac{n}{l}}$, & $du = \frac{n}{l} x^{\frac{n}{l}-1} dx$; on fera enſuite la proportion dont $du(\frac{n}{l} x^{\frac{n}{l}-1} dx)$ ſera le premier terme, dx le ſecond; l'ordonnée $x^m \times \overline{a + bx^n}^p$ + &c. le troiſiéme terme; le quatriéme terme ſera $\frac{l}{n} x^{m-\frac{n}{l}+1} \times \overline{a+bx^n}^p$ + &c. on ſubſtituera dans le quatriéme terme la valeur de x en u, & l'on aura $\frac{l}{n} u^{\frac{lm+l-n}{n}} \times \overline{a+bu^l+cu^{2l}}^p$ + &c. pour l'ordonnée de la transformée, & $\frac{l}{n} u^{\frac{lm+l-n}{n}} du \times \overline{a+bu^l+cu^{2l}}^p$ + &c. pour la differentielle transformée. On trouvera de même les differentielles transformées de la ſeconde & troiſiéme differentielle, en mettant u à la place de x, & $\frac{lm+l-n}{n}$ à la place de m, & l à la place de n.

Pour rendre négatifs les expoſans n des termes des grandeurs complexes de trois differentielles generales, il n'y a qu'à ſuppoſer $\frac{1}{x} = x^{-1} = u$, ce qui donnera $du = -x^{-2}dx$; $x^m = u^{-m} = \frac{1}{u^m}$; $x^n = u^{-n}$; & en faiſant la proportion, dont le premier terme ſera $du = -x^{-2}dx$; le ſecond, dx; le troiſieme, l'ordonnée de chacune des trois differentielles; le quatriéme terme ſera l'ordonnée de la transformée, dans laquelle mettant la valeur de x en u, on trouvera $-u^{-m-2} \times \overline{a+bu^{-n}+cu^{-2n}}^p$ + &c. & la differentielle transformée ſera $-u^{-m-2} du \times \overline{a+bu^{-n}}^p$ + &c. Il n'y a qu'à mettre dans la ſeconde & la troiſiéme differentielle generale $-m-2$ à la place de m, & $-n$ à la place de n; & l'on aura les transformées.

Sans changer la valeur des transformées, on peut rendre poſitifs les expoſans négatifs $-n$ qui ſont ſous le ſigne, en ſuppoſant que l'indéterminée r marque le nombre qui multiplie n dans le dernier terme de la grandeur complexe, ſçavoir 1 dans les grandeurs binomes, 2 dans les trinomes, 3 dans les quatrinomes, &c. & l'on aura $-\frac{1}{u^{m+rnp+2}} du \times \overline{au^{rn}+bu^{rn-n}+cu^{rn-2n}}^p$ + &c. pour la transformée de la premiere

première différentielle générale ; $-\frac{1}{u^{m+rnp+sn+z}}du \times \overline{au^{sn}+bu^{sn-n}+cu^{sn-2n}}+$ &c. $\times \overline{eu^{rn}+fu^{rn-n}+gu^{rn-2n}}^{p}$ + &c. pour la transformée de la seconde différentielle générale ; $-\frac{1}{u^{m+rnp+snq+z}}du \times \overline{au^{rn}+bu^{rn-n}+cu^{rn-2n}}^{p}$ + &c. $\times \overline{eu^{sn}+fu^{sn-n}+gu^{sn-2n}}^{q}$ + &c. pour la transformée de la troisiéme différentielle générale ; *s* dans la seconde & troisiéme différentielle marque le nombre entier qui multiplie l'exposant *u* de la plus haute puissance de *u* dans la seconde grandeur complexe qui est sous le signe 1 dans la seconde, & sous le signe *q* dans la troisiéme différentielle.

40. On remarquera que quand on rend ainsi les exposans *n* négatifs, l'on trouve une ordonnée négative, ce qui marque que l'aire de la courbe transformée est du côté des ordonnées négatives ; & si la coupée de la proposée & celle de la transformée sont une même ligne, & que l'aire de la premiére soit sur la coupée depuis son origine, l'aire de la transformée égale à l'aire de la premiére, sera sur le prolongement de la coupée de la premiére courbe.

REMARQUES.

I.

Où l'on explique l'usage des trois Problêmes qui précédent.

41. CES trois Problêmes servent à réduire l'intégrale d'une différentielle qui n'a qu'une même changeante, qu'on ne peut pas trouver exacte par les méthodes de la premiére section, & qui est l'élement d'une courbe composée, à être finie par la supposition des rectifications ou des quadratures données des sections coniques quand cela se peut, ou du moins d'autres courbes plus simples que celles dont la différentielle est l'élement. Pour le faire concevoir clairement, on prendra la différentielle $x^9dx \times \overline{a+bx^4}^{\frac{5}{2}}$ représentée par $x^mdx \times \overline{a+bx^n}^{p}$; ainsi $m=9$, $n=4$, $p=\frac{5}{2}$. 1°. Il faut lui trouver par le troisiéme Problême une transformée, où l'exposant de *u* sous le signe, soit 2, & l'on trouvera que sa transformée est $\frac{1}{2}u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{5}{2}}$. Or l'élement de l'aire de l'hyperbole équilatere est * (8) $du \times \overline{aa+uu}^{\frac{1}{2}}$; ainsi sup- * 698.

posant que a de la transformée est égale à aa de l'élement de l'hyperbole, & que $b = 1$; il faut, 2°. par le premier Problême, ou par les formules 694 & 695, trouver, cet élement de l'hyperbole supposé connu, les intégrales de $u^2du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$, de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$. 3°. Il faut trouver par le second Problême avec l'intégrale de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}}$, l'intégrale de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}+1}$, & ensuite de $u^4du \times \overline{a+bu^2}^{\frac{1}{2}+2} = \frac{5}{2}$, & multiplier cette derniére par le coéficient $\frac{1}{2}$ de la transformée, & ce sera l'intégrale ou l'aire de la transformée qui est égale à l'aire de la proposée.

II.

742. On peut par le moyen du premier & du troisiéme Problême, comme aussi par les formules des art. 694, 695, faire des tables (comme on l'a fait voir à la fin du troisiéme Problême) où soient toutes formées les intégrales des différentielles dont la grandeur complexe binome ou trinome a le signe $p = \frac{1}{2}$, & qui sont finies en supposant la quadrature des sections coniques. On voit des tables de cette sorte à la fin du Traité *de la quadrature des courbes* de Mr Newton; & quand on trouvera une différentielle que l'on pourra réduire à quelqu'une de celles des tables, on en aura l'intégrale par le moyen de ces tables : & quand le signe p de la grandeur complexe des différentielles que l'on trouvera dans la résolution des Problêmes, sera plus élevé que le signe $\frac{1}{2}$, mais qui pourra s'y réduire en le diminuant ou l'augmentant successivement d'une unité, on pourra achever de trouver les intégrales de ces différentielles par le second Problême.

III.

Où l'on fait voir l'étendue du troisiéme Problême.

743. Le troisiéme Problême de la transformation des différentielles & des courbes est de grand usage dans la résolution des Problêmes; 1°. il peut servir pour trouver une infinité de valeurs approchées des intégrales de toutes les différentielles dont on ne peut trouver les intégrales exactes; car il est évident que l'on peut trouver un grand nombre de différentielles transformées de ces différentielles, & choisissant les

plus ſimples, comme auſſi celles qui donneront des *ſuites* où les termes aillent le plus en diminuant, on pourra trouver par les méthodes du Problême de l'art. 175, dont on a fait voir l'application dans la derniére ſection de la ſeconde Partie, les intégrales approchées de ces transformées, leſquelles ſeront auſſi les intégrales des différentielles dont elles ſont les transformées.

744. 2°. Il peut ſervir à réduire tout d'un coup des différentielles fort compoſées, ou qui appartiennent à des courbes des genres bien élevés, à des différentielles qui ſoient les élémens de la quadrature des courbes les plus ſimples, & cela de beaucoup de façons, que l'on ne peut apprendre qu'en faiſant ſoi-même beaucoup d'uſage de ce Problême. On en mettra ſeulement ici quelques exemples pour faire entrer les Lecteurs qui commencent dans ces uſages.

La différentielle négative $\frac{-8r^3xx}{rr+xx^3}\,dx$, qu'on peut regarder comme l'élément d'une quadrature de courbe dont x eſt la coupée, dx la différence de la coupée, & $\frac{8r^3xx}{rr+xx^3}$ l'ordonnée peut ſe réduire tout d'un coup à la quadrature ſuppoſée de l'aire du demi-cercle S. $du \times \sqrt{2ru-uu}$, en ſuppoſant pour trouver la transformée, que $xx = \frac{2r^3-rru}{u}$; ce qui donnera $x = \frac{r}{u}\sqrt{2ru-uu}$; $dx = \frac{-rr}{u\sqrt{2ru-uu}}\,du$; & l'ordonnée $-\frac{8r^3xx}{rr+xx^3} = -\frac{2ruu+u^3}{rr}$; & faiſant enſuite la proportion du troiſiéme Problême, $du \,.\, dx\left(\frac{-rr\,du}{u\sqrt{2ru-uu}}\right) :: \frac{-8r^3xx}{rr+xx^3}\left(\frac{-2ruu+u^3}{rr}\right) \cdot \frac{2ru-uu}{\sqrt{2ru-uu}} = \sqrt{2ru-uu}$, on aura $du\sqrt{2ru-uu}$ pour la différentielle transformée de la propoſée; & S. $du \times \sqrt{2ru-uu}$ exprimera l'aire du cercle.* * 602.

La différentielle $\frac{a}{x} \times dx\sqrt{a+bx^n}$, dans laquelle dx ſera regardée comme la différence de la coupée x, & $\frac{a}{x}\sqrt{a+bx^n}$ comme l'ordonnée, peut ſe réduire à la quadrature ſuppoſée de l'hyperbole ou de l'ellipſe S. $-du \times \sqrt{b+auu}$, en ſuppoſant pour trouver la transformée, que $\frac{1}{x^n}$ ou $x^{-n} = uu$;

ce qui donnera $x^{-\frac{1}{2}n} = u$; $x^{\frac{1}{2}n} = u^{-1}$; $x^n = u^{-2}$; $du = -\frac{1}{2}nx^{-\frac{1}{2}n-1}dx$; & faisant la proportion $du(-\frac{1}{2}nx^{-\frac{1}{2}n-1}dx) . dx :: ax^{-1} \times \sqrt{a+bx^n} . \frac{2a}{-n}x^{\frac{1}{2}n} \times \sqrt{a+bx^n}$; & substituant dans le dernier terme la valeur de x en u, on aura $\frac{2a}{-n}u^{-2} \times \sqrt{b+auu}$; & multipliant par du, on aura la transformée $\frac{2a}{-n}u^{-2}du \times \sqrt{b+au^2}$. Or en supposant connue S. $-du \times \sqrt{b+au^2}$, ou trouvera par le premier Problême l'intégrale de $\frac{2a}{-n}u^{-2}du \times \sqrt{b+au^2}$, qui sera égale à l'intégrale de la proposée.

Si la différentielle proposée a $x^{-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{\frac{r}{2}}$ avoit eu pour exposant du signe un autre nombre p plus grand que $\frac{1}{2}$, on auroit pu supposer cet exposant $= \frac{1}{2}$, & après avoir trouvé, comme on le vient de marquer, l'intégrale de $ax^{-1} \times \overline{a+bx^n}^{\frac{1}{2}}$, on trouveroit par le second Problême, avec cette intégrale supposée, celle de $ax^{-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{p}$; pourvu que l'exposant p se puisse réduire à $\frac{1}{2}$, en augmentant ou diminuant p d'un nombre entier quelconque.

745. 3°. Toutes les différentielles, comme $adx \times \overline{a+bx^n}^{-\frac{r}{2}}$, ayant deux parties, sçavoir la différence dx de la changeante x, & a $\times \overline{a+bx^n}^{-\frac{1}{2}}$; il est évident que pourvu que la première & la seconde partie d'une différentielle soient les extrêmes d'une proportion, & la première & la seconde partie d'une autre différentielle en soient les moyens ; l'une de ces différentielles sera toujours égale à l'autre ; & par conséquent l'une sera la transformée de l'autre, & l'intégrale de l'une sera égale à l'intégrale de l'autre. Or une différentielle peut être l'élément de l'aire d'une courbe de différentes maniéres, par exemple une différentielle peut exprimer le rectangle infiniment petit, dont l'ordonnée est le plus long côté, & la différentielle dx de la coupée x est la base infiniment petite ; une différentielle peut aussi exprimer le triangle infiniment petit, qui est l'élément de l'aire d'une courbe, dont les ordonnées partent d'un même point ; elle peut de même exprimer le quadrilatére infini-

ment petit, qui eſt l'élément de l'aire d'une courbe qui peut être conçue partagée en quadrilatéres infiniment petits, & ainſi de tous les autres élémens de l'aire des courbes, quelque figure que puiſſent avoir ces élémens. Cela ſuppoſé, le Problême de la transformation des différentielles & des courbes n'eſt pas borné à transformer une courbe dont les élémens ſont des rectangles ou des parallelogrammes infiniment petits, c'eſt-à-dire, dont les ordonnées ſont paralléles en une autre dont l'aire ſera égale à l'aire de la premiére, & qui aura auſſi ſes ordonnées paralléles; mais il ſert encore à transformer les courbes dont les ordonnées ſont paralléles en d'autres où elles partent d'un même point, ou dont les élémens de l'aire auront telle figure que l'on voudra, & à transformer les courbes dont les ordonnées partent d'un même point en d'autres qui auront les aires égales à l'aire de la premiére, & dont les ordonnées partiront auſſi d'un même point, ce qui fait voir la grande étendue du troiſiéme Problême: on en mettra ſeulement un exemple.

Par exemple on peut donner pour transformée à la différentielle $ax^{\frac{1}{2}n-1}dx \times \overline{a+bx^n}^{-1}$, la différentielle $\frac{-2}{n}du \times \frac{a}{\sqrt{ab-abuu}}$, qui eſt l'élément d'un ſecteur d'ellipſe $du \times \frac{x}{\sqrt{ab-abu^2}}$, dont le ſommet eſt au centre de l'ellipſe, multiplié par $\frac{-2}{n}$, en ſuppoſant $\sqrt{\frac{a}{a+bx^n}} = u$; ce qui donnera $du = \frac{-anbx^{n-1}dx}{2\times a+bx^n} \times \left|\frac{a}{a+bx^n}\right|^{-\frac{1}{2}}$; $a+bx^n = \frac{a}{u^2}$; $x^n = \frac{a-au^2}{bu^2}$; $x^{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{u} \times \sqrt{\frac{a-au^2}{b}} = \frac{1}{bu}\sqrt{ab-abu^2}$: Faiſant enſuite la proportion du 3e Problême $du\left(\frac{-anbx^{n-1}dx}{2\times a+bx^n} \times \left|\frac{a}{a+bx^n}\right|^{-\frac{1}{2}}\right) . dx :: \frac{ax^{\frac{1}{2}n-1}dx}{a+bx^n} . -\frac{2\times a+bx^n}{nbx^{\frac{1}{2}n}} \times \left|\frac{a}{a+bx^n}\right|^{\frac{1}{2}}$; & ſubſtituant dans le 4e terme la valeur de $\left|\frac{a}{a+bx^n}\right|^{\frac{1}{2}} = u$, & celle de $a+bx^n$, & celle de $x^{\frac{1}{2}n}$, & multipliant par le premier terme du la quantité qui naîtra des ſubſtitutions, l'on aura

la différentielle transformée $\frac{-2}{n}\,du \times \frac{a}{\sqrt{ab - abu^2}} = \frac{-4}{n} \times$

* 608. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$. Or $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$ eſt la valeur * d'un ſecteur elliptique infiniment petit dont le ſommet eſt au centre de l'ellipſe ; ainſi l'intégrale de la transformée ſera égale à l'aire du ſecteur entier S. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$, multipliée par $\frac{-4}{n}$. Ce ſera auſſi l'intégrale de la propoſée qu'on a réduite à la quadrature ſuppoſée d'un ſecteur d'ellipſe.

Si l'on veut avoir le grand axe de cette ellipſe avec ſon paramétre, (ce qui ſuffit pour la décrire par l'article 361,) & l'expreſſion de ſon ordonnée, il faudra ſuppoſer l'élément d'un ſecteur d'ellipſe, qu'on a trouvé dans l'article 608, $= \frac{aapdu}{2\sqrt{2a^3p - 2apuu}}$, en nommant $2a$ le grand axe, p ſon paramétre, & $\sqrt{\frac{aap - puu}{2a}}$ l'ordonnée ; il faudra, dis-je, ſuppoſer cet élément égal à l'élément $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abu^2}}$; ou bien, pour ôter l'équivoque que cauſeroit a priſe différemment, on nommera $2r$ le grand axe de l'ellipſe, & l'on aura $\frac{rrpdu}{2\sqrt{2r^3p - 2rpuu}} = \frac{adu}{2\sqrt{ab - abuu}}$; & prenant $2r$ & p pour deux indéterminées, il faudra en trouver les valeurs exprimées par a & b, par le moyen de l'équation précédente, & l'on aura d'abord $ppr^4 \times \overline{ab - abuu} = aa \times \overline{2pr^3 - 2pruu}$, qui ſe réduit à $abpr^3 - abpruu = 2aarr - 2aauu$; & ſuppoſant $abpr^3 = 2aarr$, & $abpruu = 2aauu$, la premiére équation donnera $p = \frac{2a}{br}$, & la ſeconde $p = \frac{2aa}{abr^3} = \frac{2a}{br}$; par conſéquent $rr = \frac{a}{a}$; ainſi la moitié du grand axe de l'ellipſe dont on a trouvé l'élément, eſt $r = \sqrt{\frac{a}{a}}$; mettant cette valeur de r dans $p = \frac{2a}{br}$, on trouvera $p = \frac{2a}{b\sqrt{\frac{a}{a}}} = \frac{2\sqrt{aa}}{b}$, qui eſt la valeur du paramétre de la même ellipſe : mettant ces valeurs de r & de p dans l'ordonnée indéterminée de l'ellipſe $\sqrt{\frac{prr - puu}{2r}}$, on trouvera $\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a}{b}uu}$ pour l'ordonnée de la même ellipſe dont le ſecteur S. $\frac{adu}{2\sqrt{ab - abuu}}$ multiplié par $\frac{-4}{n}$,

eſt la valeur de l'intégrale de la différentielle propoſée, & dont la coupée eſt u.

On peut avec cette intégrale ſuppoſée trouver par le premier Problême les intégrales des différentielles $\frac{b x^{\frac{3}{2}n-1} dx}{a+bx^n}$, $\frac{c x^{\frac{5}{2}n-1} dx}{a+bx^n}$, $\frac{d x^{\frac{7}{2}n-1} dx}{a+bx^n}$, &c. & les mettre dans une table à côté de leurs différentielles : & ſi l'on avoit d'autres différentielles ſemblables, où l'expoſant du ſigne p de la grandeur complexe $\overline{a+bx^n}^{p}$ fût un nombre entier poſitif ou négatif différent de l'unité négative -1, qui eſt l'expoſant de la grandeur complexe des différentielles précédentes, il eſt évident que l'on en trouveroit les intégrales par le ſecond Problême par le moyen des intégrales ſuppoſées des différentielles précédentes ; & l'on pourroit auſſi mettre ces intégrales à côté de leurs différentielles dans une table.

146. 4°. On peut par le même Problême donner à la différentielle $\frac{adx}{bb+xx}$, la transformée $\frac{-a \times du}{2\sqrt{u-bbnn}}$ (qui eſt l'élément d'un ſecteur de cercle * où bb eſt pris pour l'unité arbitraire qui eſt auſſi le diametre du cercle,) en ſuppoſant $x = \sqrt{\frac{1}{u}-bb}$; car on aura $du\left(\frac{2xdx}{-xx+bb^2}\right).dx :: \frac{a}{bb+xx} . \frac{a \times -xx+bb^2}{2x \times bb+xx}$ = (en ſubſtituant la valeur de x) $\frac{-a}{2\sqrt{u-bbuu}}$; & multipliant ce 4e terme par le premier du, on aura $-a \times \frac{du}{2\sqrt{u-bbuu}}$, qui eſt l'élément d'un ſecteur de cercle multiplié par la conſtante $-a$, qu'il faut encore multiplier par $\frac{1}{4}$ dans la ſuppoſition qu'on prend b pour l'unité arbitraire, & de plus pour le diamétre. * 607.

147. 5°. Enfin il pourra quelquefois arriver que le troiſiéme Problême de la transformation des différentielles ou des courbes, fera trouver une différentielle transformée qui aura une intégrale exacte, ou une courbe transformée, dont la quadrature ſera exacte, d'une différentielle propoſée, ou d'une courbe propoſée dont on ne peut pas avoir l'intégrale ou la quadrature exacte par les méthodes des intégrales.

REMARQUE IV.

Où l'on explique une méthode particuliére pour trouver les intégrales finies des différentielles qui ſe peuvent réduire à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole équilatére.

748. OUTRE les méthodes générales pour trouver par les quadratures, ou par les rectifications ſuppoſées des courbes les plus ſimples, les intégrales finies des différentielles dont on ne peut pas les trouver exactes, contenues dans les trois Problêmes précédens, & dans les formules des articles 694 & 695, il y en a de particuliéres pour les différentielles dont la quantité complexe (qui eſt ſous le ſigne dont l'expoſant eſt p, qu'on ſuppoſe ici égal à $\pm\frac{1}{2}$,) multipliée par dx & par quelque conſtante, eſt l'expreſſion de l'élément de la quadrature d'une des ſections coniques. On mettra ſeulement ici une de ces méthodes pour les différentielles qui contiennent l'élément de la quadrature du cercle ou celle de l'hyperbole équilatére $a\,dx \times \overline{aa \mp x^2}^{\pm\frac{1}{2}}$, ou $a\,dx \times \overline{2ax \mp x^2}^{\pm\frac{1}{2}}$, appliquée à un exemple.

Quand une différentielle eſt le produit d'une grandeur complexe ou incomplexe hors du ſigne par $dx \times \overline{aa \mp xx}^{\pm\frac{1}{2}}$, ou par $dx \times \overline{2ax \mp xx}^{\pm\frac{1}{2}}$, comme $\overline{2ax - xx} \times dx \times \sqrt{2ax - xx}$; 1°. ſi l'expoſant $\frac{1}{2}$ eſt poſitif, c'eſt-à-dire ſi la quantité qui eſt ſous le ſigne ſe trouve au numérateur, il faut la réduire au dénominateur en multipliant le numérateur & le dénominateur 1 de la différentielle par $\sqrt{2ax - x^2}$, & l'on aura $\frac{x^4 - 4ax^3 + 4aaxx \times dx}{\sqrt{2ax - xx}}$: Quand la quantité incommenſurable eſt déja au dénominateur, cette préparation eſt inutile.

2°. Il faut multiplier le numérateur & le dénominateur par x ou par une puiſſance de x qui ſoit telle que l'expoſant de la plus haute puiſſance de x hors du ſigne, ſoit moindre d'une unité que celui de la plus haute puiſſance de x ſous le ſigne, (ce qui eſt poſſible, parcequ'en multipliant la grandeur hors du ſigne par x ou une puiſſance de x, il faut pour conſerver l'égalité de ce multiplicateur commun, multiplier la quantité

tité qui eſt ſous le ſigne par le quarré de x ou de cette puiſſance de x ;) cette puiſſance de x eſt ici x^3 pour le numerateur, & x^6 pour le dénominateur ; & l'on aura la differentielle préparée $\frac{\overline{x^7 - 4ax^6 + 4aax^5} \times dx}{\sqrt{x^8 + 2ax^7}} = \overline{x^7 dx - 4ax^6 dx + 4a^2x^5} \times dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$, qui n'a point changé de valeur.

3°. Il faut partager la differentielle préparée en parties, comme on le voit ici, $\overline{x^7 - 4ax^6 + 4a^2x^5} \times dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

Premiere Partie. Seconde Partie.

$= \overline{x^7 - \frac{7}{4}ax^6} \times dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}} - \overline{\frac{9}{4}ax^5 + \frac{15}{4}a^2x^4} \times dx \times$

Troiſiéme Partie.

$- \overline{x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}} + \overline{\frac{1}{4}a^2x^3 - \frac{3}{8}a^3x^2} \times dx \times - \overline{x^4 + 2ax^3}^{-\frac{1}{2}}$

Quatriéme Partie. Cinquiéme Partie.

$+ \overline{\frac{3}{8}a^3x - \frac{3}{8}a^4} \times dx \times - \overline{x^2 + 2ax}^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}a^4 dx \times - \overline{x^2 + 2ax}^{-\frac{1}{2}}$.

Il faut faire ce partage avec ces deux conditions, 1°. qu'on puiſſe prendre l'integrale de chaque partie, ſi ce n'eſt de la derniere qui eſt l'element même d'un ſecteur de cercle, (en prenant a pour le rayon) $\frac{aadx}{2\sqrt{2ax - xx}}$ multiplié par $\frac{3aa}{4}$, & qui eſt ſuppoſé connu ; 2°. que la ſomme de ces parties ſoit égale à la differentielle preparée qui eſt égale à la propoſée : ainſi en mettant une quantité pour faire la premiere de ces parties avec le ſigne + ou —, il faut dans la partie ſuivante mettre la même quantité ou une quantité équivalente avec le ſigne oppoſé — ou +, & ainſi de ſuite. Les Lecteurs verront dans la pratique qu'on va donner de la méthode appliquée à notre exemple, qu'elle fait trouver certainement ces quantités, qu'il faut mettre ſous des ſignes oppoſés, & non par des tentatives : c'eſt pourquoi au lieu de leur faire trouver l'integrale de chacune des quatre premieres parties, on leur fera découvrir l'integrale comme ſi le partage n'avoit pas été fait en faiſant cet autre partage

A premiere Partie.

naturel de la differentielle préparée $x^7 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

B C

$- 4ax^6 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}} + 4a^2x^5 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$

$$= \overset{A}{x^7 dx} \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}} - 4a \overset{b}{x^5 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ 4a^2 \overset{c}{x^4 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}} = \overset{A}{x^7 dx} \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$$

$$- 4a \overset{b}{x^5 dx} \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}} + 4a^2 \overset{x}{x^3 dx} \times - \overline{x^4 + 2ax^3}^{-\frac{1}{2}}.$$

On ſe ſervira de la premiere propoſition fondamentale pour trouver les parties de l'integrale que l'on cherche ; on regardera la quantité qui eſt ſous le ſigne $- x^8 + 2ax^7$ comme la changeante, l'expoſant $- \frac{1}{2}$ du ſigne comme l'expoſant de la changeante ; la differentielle de la changeante ſera $- 8x^7 dx + 2 \times 7 ax^6 dx$ pour A. Or pour avoir l'integrale de A, il faut augmenter d'une unité l'expoſant $- \frac{1}{2}$ de la changeante $- \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donnera $x^7 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{\frac{1}{2}}$; & ayant pris pour diviſeur la differentielle $- 8x^7 dx + 2 \times 7ax^6 dx$ multipliée par l'expoſant $- \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, il faut diviſer la quantité qui eſt hors du ſigne par le diviſeur $- 4x^7 dx + 7ax^6 dx$, & l'on trouvera le quotient $- \frac{1}{4}$; ainſi la premiere partie de l'integrale eſt $- \frac{1}{4} \times 2ax^7 - x^8 \overline{}^{\frac{1}{2}}$; on trouvera auſſi le reſte $+ \frac{7}{4} ax^6 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$; ce reſte eſt juſtement la quantité retranchée pour faire la premiere partie du premier partage ; & on remarquera que ce reſte n'étant qu'une differentielle, & non pas une integrale, il doit être multiplié par $- \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$ qui eſt la partie ſous le ſigne de la differentielle, & non par $- \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}}$ qui eſt la partie ſous le ſigne de l'integrale ; ce qu'il faut remarquer pour les parties ſuivantes ; il faut ôter ce reſte de la partie B, & il reſtera pour (B) $- \frac{9}{4} ax^6 dx \times - \overline{x^8 + 2ax^7}^{-\frac{1}{2}}$ qu'on nommera b.

Il faut à preſent, avant d'operer ſur b, préparer cette quantité de façon que l'expoſant de x hors du ſigne ſoit moindre d'une unité que l'expoſant le plus grand de x ſous le ſigne, ſans changer la valeur de b ; & l'on trouvera (b) $- \frac{9}{4} ax^5 dx \times - \overline{x^6 + 2ax^5}^{-\frac{1}{2}}$.

Il faut operer ſur b comme l'on a fait ſur A, c'eſt-à-dire, après avoir réduit b à $-\frac{9}{4}ax^5dx \times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}+1}=+\frac{1}{2}$, & pris pour diviſeur $\frac{1}{2}\times -6x^5dx+\frac{1}{2}\times 10ax^4dx=-3x^5dx+5ax^4dx$, il faut diviſer $-\frac{9}{4}ax^5dx$ par ce diviſeur, & l'on trouvera le quotient $+\frac{3}{4}a$; ainſi $+\frac{3}{4}a\times -\overline{x^6+2ax^5}^{\frac{1}{2}}$ eſt la ſeconde partie de l'integrale; & l'on trouvera auſſi le reſte $+\frac{15}{4}aax^4dx\times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la ſeconde partie du premier partage. Il faut ôter ce reſte de la partie c, & l'on aura $(c)+\frac{1}{4}a^2x^4dx\times -\overline{x^6+2ax^5}^{-\frac{1}{2}}=(C)+\frac{1}{4}a^2x^3dx\times -\overline{x^4+2ax^3}^{-\frac{1}{2}}$.

Il faut operer ſur c comme l'on a fait ſur A & ſur b, & l'on trouvera le quotient $-\frac{1}{8}a^2$; ainſi la troiſiéme partie de l'integrale ſera $-\frac{1}{8}a^2\times -\overline{x^4+2ax^3}$; l'on trouvera auſſi le reſte $-\frac{3}{8}a^3x^2dx\times -\overline{x^4+2ax^3}^{-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{8}a^3xdx\times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la troiſiéme partie du premier partage. Il faut ôter ce reſte, c'eſt à-dire l'écrire avec le ſigne oppoſé, & ce reſte ſera $+\frac{3}{8}a^3xdx\times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$. On operera ſur ce reſte comme l'on a fait ſur A, ſur b & ſur c, & l'on trouvera le quotient $-\frac{3}{8}a^3$; ainſi la quatriéme partie de l'integrale ſera $-\frac{3}{8}a^3\times -\overline{x^2+2ax}^{\frac{1}{2}}$. L'on trouvera auſſi le reſte $-\frac{3}{8}a^4dx\times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}$; d'où l'on voit comment ſe trouve la quatriéme partie du premier partage: il faut l'ôter en écrivant $+\frac{3}{8}a^4dx\times -\overline{x^2+2ax}^{-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, qui eſt l'élement d'un ſecteur de cercle* dont a eſt le rayon, multiplié par $\frac{3}{4}aa$. * 607.

On fera une ſomme de toutes les parties de l'integrale, dont la derniere partie ſera $\frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, & elle ſera l'integrale finie de la differentielle propoſée, en ſuppoſant la quadrature d'un ſecteur de cercle.

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir la méthode particuliere qu'on y a expliquée ; & pour l'appliquer aux exemples ſemblables.

Définition de quelques Courbes méchaniques.

749. ON peut imaginer des courbes méchaniques dont les ordonnées ſoient des lignes droites paralleles ſur une ligne droite des coupées, de maniere que les ordonnées, quoique droites, ſoient égales aux arcs d'une circonference pris de ſuite depuis le ſommet, ou aux arcs d'une parabole, ou à ceux d'une autre courbe dont la rectification n'eſt pas connue exactement, ou bien de façon que les ordonnées ſoient les puiſſances telles que l'on voudra de ces arcs, multipliées encore ſi l'on veut par la coupée, ou par une puiſſance quelconque de la coupée. On peut, par exemple, imaginer ſur le diametre d'un cercle depuis le ſommet, que les ordonnées ſoient de ſuite égales aux arcs du cercle, aux quarrés de ces arcs, ou à leurs troiſiémes puiſſances, &c. & de même pour la parabole & pour les autres courbes dont on n'a pas la rectification exacte.

*588. Par exemple S. $\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ * eſt l'integrale ſuppoſée d'un arc de cercle ; $dx \times$ S. $\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$; $dx \times$ S. $\left|\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right|^2$; $dx \times$ S. $\left|\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right|^3$; $xdx \times$ S. $\left|\frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}\right|^3$, &c. ſont les élemens de l'aire de ces ſortes de courbes méchaniques.

*591. De même un arc de parabole eſt * S. $\frac{dx}{2x} \times \sqrt{px+4xx}$; nommant cet arc u ; udx, u^2dx, u^3xdx, ſeront les élemens de l'aire de ces ſortes de courbes ; & ainſi des autres.

PROBLÊME IV.

750. *TROUVER les integrales des differentielles de la définition précedente, en ſuppoſant donnée la rectification contenue dans ces differentielles.*

LA méthode eſt ſemblable à celle de l'article 713. Il faut trouver les termes de l'integrale indéterminée les uns après les autres, écrivant devant chacun un coëficient indéterminé, & prendre la differentielle de chacun de ces termes

à meſure qu'on le découvre ; la differentielle du premier terme fera découvrir le ſecond terme de l'integrale indéterminée ; la differentielle du ſecond fera découvrir le troiſiéme terme de l'integrale indéterminée, & ainſi de ſuite, obſervant que chaque terme de la differentielle doit avoir au moins deux quantités differentes avec des coëficiens differens. Il faut enſuite ſuppoſer que la differentielle de l'integrale indéterminée eſt égale à la propoſée, c'eſt-à-dire il faut écrire la differentielle propoſée avec le ſigne —, ſous les termes correſpondans de l'autre. Enfin il faut ſuppoſer chaque terme de cette differentielle égal à zero ; cette ſuppoſition donnera les équations dont on a beſoin pour trouver les valeurs des coëficiens indéterminés, leſquelles étant ſubſtituées à leur place dans l'integrale indéterminée, elle deviendra l'integrale de la differentielle propoſée.

Pour trouver l'integrale de $dx \times \text{S.} \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}\Big|^3$, on ſuppoſera $u = \text{S.} \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}$; ce qui donnera $du = \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}$: il faut auſſi prendre la differentielle de $\sqrt{2rx - xx}$, qui eſt $\frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Ceux qui voudront abreger, pourront ſuppoſer $y = \sqrt{2rx - xx}$, & $dy = \frac{rdx - xdx}{\sqrt{2rx - xx}}$. La queſtion ſe réduit à trouver l'integrale de $u^3\,dx$, en ſuppoſant l'integrale $u = \text{S.} \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}$.

Integrale indéterminée de $u^3\,dx$.

$$\text{S. } u^3dx = Au^3x + Bu^2 \times \sqrt{2rx - xx} + Cu^3 + Dux + E \times \sqrt{2rx - xx} + Fu.$$

Differentielle de l'integrale indéterminée.

$$Au^3dx + \frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Bru\,dx \times \sqrt{2rx - xx}}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Drx\,dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Er\,dx}{\sqrt{2rx - xx}}$$
$$- \frac{Bu^2x\,dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{3Cru^2\,dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Du\,dx \times \sqrt{2rx - xx}}{\sqrt{2rx - xx}} - \frac{Ex\,dx}{\sqrt{2rx - xx}} + \frac{Fr\,dx}{\sqrt{2rx - xx}} = 0,$$

Differentielle propoſée avec le ſigne — $-u^3\,dx$.

Il faut ſuppoſer Au^3x pour le premier terme de l'integrale indéterminée, c'eſt-à-dire dans ce premier terme ſeule-

ment on regarde u comme conſtante ; A eſt une indéterminée. Il faut prendre la difference de Au^3x, & il eſt évident que ſon premier terme Au^3dx, & la differentielle propoſée $1u^3dx$, feront le premier terme de la differentielle totale, lequel premier terme étant ſuppoſé $= 0$, on pourra determiner le coëficient indéterminé A.

Le ſecond terme $+\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ de la differentielle de Au^3x, où l'on a mis la valeur de $du = \frac{rdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, (ce que l'on fera toujours dans la ſuite,) fait connoître que le ſecond terme de l'integrale indéterminée, devant avoir une differentielle dont un terme ſoit correſpondant à $\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, afin qu'on puiſſe faire une équation de ces deux termes pour déterminer le ſecond coëficient, doit être $Bu^2 \times \sqrt{2rx-xx}$, ($B$ eſt indéterminée,) dont la differentielle a trois termes, l'un deſquels eſt $-\frac{Bu^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ qui eſt correſpondant à $\frac{3Aru^2xdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le ſecond de ces trois termes qui eſt $+\frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$, fait connoître que le troiſiéme terme de l'integrale indéterminée doit être Cu^3, (C eſt indéterminée,) dont la differentielle $\frac{3Cru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt le terme correſpondant à $\frac{Bru^2dx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le terme $\frac{Brudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}}$, ou ſimplement $Brudx$, fait connoître que pour avoir une grandeur correſpondante, il faut ſuppoſer Dux pour le quatriéme terme de l'integrale indéterminée, (D eſt indéterminée,) car le premier terme de ſa differentielle ſera $Dudx$, ou, ſi l'on veut, $\frac{Dudx \times \sqrt{2rx-xx}}{\sqrt{2rx-xx}}$, qui eſt la grandeur correſpondante que l'on cherche.

Le ſecond terme de la differentielle de Dux, qui eſt $\frac{Drxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, fait connoître qu'il faut ſuppoſer $E \times \sqrt{2rx-xx}$ pour le cinquiéme terme de l'integrale indéterminée, (E eſt indéterminée,) car le premier terme de ſa differentielle eſt $-\frac{Exdx}{\sqrt{2rx-xx}}$, qui eſt la grandeur correſpondante de $\frac{Drxdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Le ſecond terme $\frac{Erdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ de cette differentielle, fait connoître qu'il faut ſuppoſer Fu pour le ſixiéme terme de l'integrale, (F eſt indéterminée,) car ſa differentielle $\frac{Frdx}{\sqrt{2rx-xx}}$ eſt la grandeur correſpondante de $\frac{Erdx}{\sqrt{2rx-xx}}$.

Tous les termes de la differentielle de l'integrale indéterminée contenant pluſieurs quantités, de façon qu'en ſuppoſant chacun de ces termes égal à zero, tous les coëficiens peuvent être déterminés; l'integrale eſt finie, & il ne faut plus chercher de nouveaux termes.

Il faut à préſent ôter la differentielle propoſée $1u^3dx$ du terme correſpondant de la differentielle indéterminée; ſuppoſer chacun des termes égal à zero; ce qui donnera ici ſix équations, par le moyen deſquelles on trouvera les valeurs de A, B, C, &c. qui ſont $A=1$, $B=3r$, $C=-r$, $D=-3r^2$, $E=-3r^3$, $F=+3r^3$. Enfin il faut ſubſtituer ces valeurs dans l'integrale indéterminée, & l'on aura $S.u^3dx = 1u^3x + 3ru^2 \times \sqrt{2rx-xx} - ru^3 - 3r^2ux - 3r^3 \times \sqrt{2rx-xx} + 3r^3u$, pour l'integrale de la differentielle propoſée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cet exemple ſuffit pour faire concevoir clairement la méthode & la maniere de l'appliquer; les Lecteurs pourront ſe la rendre familiere par des exemples.

SECTION III.

Où l'on explique le calcul differentiel & le calcul integral des expreſſions logarithmiques, & des quantites exponentielles.

AVERTISSEMENT.

351. LEs logarithmes des nombres ſont d'uſage pour faciliter les calculs les plus difficiles & les plus embarraſſés des nombres dans la reſolution des Problêmes des parties pratiques des Mathematiques, comme de l'Aſtronomie, de la Marine, de la Geometrie pratique, &c. Il y a auſſi des courbes qui contiennent toutes les grandeurs poſſibles avec leurs loga-

rithmes, c'eſt-à-dire toutes les grandeurs poſſibles qui ſont une progreſſion géometrique infinie, qui va en augmentant depuis celle de ces grandeurs que l'on peut prendre à diſcretion pour l'unité, & en diminuant à l'infini du côté oppoſé depuis la même unité; ces courbes contiennent encore les grandeurs qui ſont une progreſſion arithmetique, dont zero (qui eſt le terme de la progreſſion arithmetique correſpondant à l'unité de la progreſſion géometrique, & qui en eſt le logarithme) eſt entre les termes poſitifs à l'infini de cette progreſſion arithmetique qui ſont les logarithmes des termes correſpondans de ceux de la progreſſion géometrique qui ſurpaſſent l'unité, le premier étant le logarithme du premier, le ſecond du ſecond, &c. & entre les termes négatifs de la même progreſſion arithmetique, qui ſont auſſi les logarithmes des termes correſpondans de la progreſſion géometrique. Ces courbes, que l'on peut appeller *logarithmiques*, ſont auſſi de grand uſage dans la Géometrie compoſée, ſur-tout dans la partie qui traite des courbes méchaniques, pour décrire certaines courbes, en trouver les proprietés qui ſe découvrent par le ſeul calcul differentiel, comme leurs tangentes, les points où elles s'écartent ou s'approchent le plus de leur axe, &c. & celles que l'on découvre par le calcul differentiel & le calcul integral joints enſemble, comme la rectification des courbes, leur aire, &c. leſquelles deſcriptions & proprietés ne peuvent pas ſe découvrir par les regles dont on ſe ſert pour les autres courbes.

752. La premiere de ces courbes logarithmiques eſt *l'hyperbole équilatere*; car l'on a fait voir* qu'en prenant tous les nombres de ſuite ſur KGF l'une des aſymptotes, ſuppoſant que KG eſt l'unité, & que chaque nombre plus grand que l'unité, comme KF, eſt exprimé par $1+x$, & que chaque nombre plus petit que l'unité, comme KP, eſt exprimé par $1-x$; le quadrilatere hyperbolique $GAfF$ qui eſt ſur l'excès GF de ce nombre ſur l'unité, ou $GACP$ qui eſt ſur l'excès PG de l'unité ſur ce nombre, eſt le logarithme de ce nombre $1+x$ ou $1-x$. On a auſſi démontré* que Ff étant égale à $\frac{KG \times GA}{KF} = \frac{1}{1+x}$, & que de même PC étant égale à $\frac{KG \times GA}{KP} = \frac{1}{1-x}$, l'élement du quadrilatere $GAfF$ eſt $\frac{1dx}{1+x}$, & celui de $GACP$ eſt $-\frac{1dx}{1-x}$; & par conſéquent,

FIGURE XLVII.

* 643.

* 643.

nommant

nommant ces quadrilatéres $GAfF$, $l.\ 1+x$; & $GACP$, $l.\ 1-x$, ($l.$ ſignifie logarithme; ainſi $l.\ 1+x$ marque le logarithme de $1+x$) la différentielle du logarithme d'un nombre $1+x$ qui ſurpaſſe l'unité, eſt $d.\ l.\ 1+x=\frac{1dx}{1+x}$; & celle du logarithme d'un nombre $1-x$ qui eſt moindre que l'unité, eſt $d.\ l.\ 1-x=\frac{-1dx}{1-x}$.

L'on a auſſi fait voir * qu'en prenant une grandeur quelconque KS, qu'on nommera a ſur la ligne KST, qui fait avec l'aſymptote à l'origine K, l'angle quelconque GKS; & menant la ligne SG au point G où finit l'unité KG, & enſuite par tous les points T, t, de KS tirant des paralleles TF, tP à SG, & nommant les KT, $a+x$; & les Kt, $a-x$; les grandeurs KT $(a+x)$ & Kt $(a-x,)$ ont les mêmes logarithmes que les nombres correſpondans KF, KP ſur l'aſymptote; KS (a) eſt priſe pour l'unité par raport à ces grandeurs; & KF devient $1+\frac{x}{a}=\frac{a+x}{a}$, & KP devient $1-\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}$ (à cauſe des baſes paralleles de l'angle GKS;) ainſi $Ff=\frac{KG\times GA}{KF}$ devient $\frac{a}{a+x}$; $PC=\frac{KG\times GA}{KP}$ devient $\frac{a}{a-x}$; l'élément de $GAfF$ devient $d.\ l.\ a+x=\frac{adx}{a+x}$, & l'élément de $GACP$ devient $d.\ l.\ a-x=\frac{-adx}{a-x}$; & $l.\ a+x=$ S. $\frac{adx}{a+x}$; $l.\ a-x=$ S. $\frac{-adx}{a-x}$. * 647.

653. *La logarithmique* eſt la ſeconde de ces courbes, & c'eſt de là qu'elle tire ſon nom. Les ordonnées AB, CD, EF, &c. de cette courbe, qu'on nommera x, ſont les grandeurs qui font une progreſſion géométrique infinie; elles vont en augmentant d'un côté, & en diminuant en retournant du côté oppoſé; l'une de ces ordonnées, laquelle on voudra, comme AB, doit être priſe pour l'unité, & le point A ſur la ligne des coupées ACE, &c. ſera l'origine des coupées AC, AE, &c. qu'on nommera z; chaque coupée, comme AC (z), eſt le logarithme de l'ordonnée correſpondante CD (x); ces logarithmes pris du côté de Ag, comme Ae $(-z,)$ ſont négatifs. FIG. XXXVI.

Deſcription de la logarithmique.

654. AYANT tracé la droite ACE indéterminée de côté & d'autre, & élevé deux perpendiculaires inégales AB, EF d'une longueur arbitraire; il faut partager AE par le milieu en C, & élever la perpendiculaire CD, & la faire moyenne

proportionnelle entre AB & EF, & le point D ſera un de ceux de la logarithmique : on trouvera de la même maniére tous les points de cette courbe qui ſont entre B & F. Pour avoir chacun des points H, K, M, &c. qui ſont au-delà, comme le point H, il faut trouver aux deux ordonnées CD, EF déja tracées, une troiſiéme proportionnelle qu'on nommera GH; prendre ſur la ligne des coupées $EG = CE$, & élever la perpendiculaire GH égale à la troiſiéme proportionnelle qu'on a trouvée, & ſon extrémité H ſera un point de la logarithmique. En prenant de même $GI = GE$, & élevant la perpendiculaire IK égale à la troiſiéme proportionnelle aux ordonnées EF & GH, le point K ſera dans la logarithmique. On trouvera de la même maniére les points de la logarithmique qui vont de droite à gauche. On peut encore trouver, quand on a déja pluſieurs points de la logarithmique, chacun des autres points, en prenant à diſcrétion trois points déja connus, comme B, D, H, & faiſant $GI = AC$, qui eſt la diſtance entre les deux ordonnées des deux premiers points, & élevant la perpendiculaire IK égale à la quatriéme proportionnelle aux trois ordonnées AB, CD, GH, le point K ſera dans la logarithmique. On trouvera par ces trois pratiques tous les points qu'on voudra de la logarithmique.

Equation de la logarithmique.

755. EN concevant toutes les ordonnées x infiniment proches les unes des autres en progreſſion géométrique, il eſt évident que leurs différences dx ſont auſſi dans la même progreſſion géométrique; d'où il ſuit que chaque raport $\frac{dx}{x}$ eſt conſtant; ainſi $\frac{Dd}{DC} = \frac{dx}{x} = \frac{Ff}{FE}$ &c. Si l'on conçoit par chaque point de la logarithmique la tangente en ce point, comme DBS; $Bd = AC$ ſera dz; l'on aura pour tous les
* 550. points $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$, * (on nomme a la ſoutangente CS); d'où il ſuit, toutes les dz étant ſuppoſées conſtantes, que la ſoutangente eſt conſtante, c'eſt-à-dire la même pour tous les points de la logarithmique; ainſi $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{a}$, ou $a = \frac{x\,dz}{dx}$, eſt l'équation de la logarithmique qui convient à tous ſes points. Si l'on prend pour l'unité celle des ordonnées qui eſt égale à la ſoutangente qu'on ſuppoſera être AB; dz ſera poſitive

du côté que les ordonnées augmentent, & négative du côté qu'elles diminuent. L'on peut encore trouver l'équation de la logarithmique par l'art. 519; car concevant que le point B décrit chaque particule infiniment petite BD, DF &c. de la logarithmique dans le même tems T qu'il décriroit les petits côtés angulaires $Bd\,(dz)$ $dD\,(dx)$ du petit parallelogramme dont cette particule BD est la diagonale; si l'on suppose chaque côté $Bd\,(dz)$ décrit par une viteſſe uniforme qu'on nommera a, & chaque côté comme $dD\,(dx)$ par une viteſſe qui s'accélere en progreſſion géométrique; (on pourra nommer x cette viteſſe par chaque $dD = dx$:) En ſuppoſant dz conſtante, l'on aura pour chaque particule, comme BD, cette équation $T = {}^{*}\frac{dz}{a} = \frac{dx}{x}$, où le raport $\frac{dx}{x}$ étant conſtant, les x ſeront néceſſairement en progreſſion géométrique, comme on vient de le faire voir au commencement de cet article. * 519.

756. L'on déduit de l'équation de la logarithmique cette autre $dz = \frac{a\,dx}{x} = \frac{1\,/\,x}{\frac{1}{a}}$ quand a eſt ſuppoſée l'unité. Or dz eſt la différence du logarithme z; ainſi *la différence d'un logarithme d'un nombre ou d'une grandeur* x *eſt égale à la différence de ce nombre diviſée par ce nombre même*; dz ou $dlx = \frac{dx}{x}$ quand le nombre ſurpaſſe l'unité, & $-dz$ ou $-dlx = \frac{-dx}{x}$, quand x eſt moindre que l'unité. Ainſi z ou $lx = \text{S.}\frac{dx}{x}$. On peut auſſi, ſi l'on veut, nommer les nombres en progreſſion géométrique $1 + x$, quand ils ſurpaſſent l'unité; $1 - x$, quand ils ſont moindres, cela eſt arbitraire.

REMARQUES.

I.

757. QUAND le nombre eſt exprimé par $1 + x$; alors $dl.\,1 + x = \frac{dx}{1+x}$, & $dl.\,1 - x = \frac{-dx}{1-x}$. Quand au lieu de l'unité c'eſt une quantité a qui en tient lieu, $dl.\,a + x = \frac{a\,dx}{a+x}$; & $dl.\,a - x = -\frac{a\,dx}{a-x}$. Quand la ſoutangente conſtante a n'eſt pas priſe pour l'unité dans la logarithmique, alors la différentielle du logarithme eſt $dlx = \frac{a\,dx}{x}$; & $d - l.\,x = -\frac{a\,dx}{x}$.

II.

758. Il eſt évident que zero eſt le logarithme de l'unité; & que le logarithme de zero eſt infini dans l'une & l'autre des courbes logarithmiques.

III.

759. $\frac{dx}{a+x}$, $\frac{dx}{b+x}$, &c. ſont auſſi des différentielles logarithmiques; car on peut exprimer chaque ordonnée x de la logarithmique par une grandeur connue a ou b, &c. plus une changeante x, en ſuppoſant néanmoins que la ſoutangente eſt l'unité; & alors $\frac{f \times dx}{a+x}$ eſt une différentielle logarithmique multipliée par f.

DE'FINITION.

760. L'ON employera ici l pour ſignifier le logarithme de la grandeur au-devant de laquelle on l'écrira, & l^2x, l^3x, l^mx, &c. marqueront le logarithme de x élevé à la puiſſance dont l'expoſant eſt 2, 3, m, &c. de même $l^{-1}x$, $l^{-2}x$, $l^{-m}x$, &c. exprimeront que le logarithme de x ou ſa puiſſance dont l'expoſant eſt 1, 2, m, &c. ſe trouve au dénominateur; $l.\,lx$ marquera le logarithme du logarithme de x, & $l^m lx$ exprimera le logarithme du logarithme de x élevé à la puiſſance dont m eſt l'expoſant.

Propoſition fondamentale du calcul différentiel des expreſſions logarithmiques.

761. $dl.\,1+x = \frac{dx}{1+x}$; $dl.\,1-x = \frac{-dx}{1-x}$; $dl.\,x = \frac{1\,dx}{x}$; $d-l.\,x = -\frac{1\,dx}{x}$; $dl.\,a+x = \frac{a\,dx}{a+x}$; $dl.\,a-x = \frac{-a\,dx}{a-x}$; quand la ſoutangente a de la logarithmique n'eſt pas priſe pour l'unité, $dl.\,x = \frac{a\,dx}{x}$, & $d-l.\,x = -\frac{a\,dx}{x}$.

COROLLAIRES.

I.

762. POUR trouver la différence de l^mx, on ſuppoſera $l^mx = y^m$, ce qui donnera $lx = y$, & $dlx = dy = \frac{dx}{x}$ *par la première propoſition* *; l'on aura auſſi $dl^mx = my^{m-1}dy$, & $l^{m-1}x = y^{m-1}$. On ſubſtituera les valeurs de y^{m-1} & de dy dans $my^{m-1}dy$, & l'on aura $dl^mx = ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x} = mx^{-1}l^{m-1}x \times dx$. Si l'on vouloit exprimer x par $1+x$, & $-x$ par $1-x$, il n'y auroit qu'à ſubſtituer dans la différence qu'on vient de trouver au lieu de x, $1+x$ ou $1-x$, & écrire dans ce dernier cas $-dx$.

II.

63. Pour trouver la différence de $l.lx$, on suppose $lx = y$; ce qui donnera, 1°. $dlx = dy = {}^{*}\frac{dx}{x}$; 2°. $l.lx = ly$; & 3°. $dl.lx = {}^{*}\frac{dy}{y} = \frac{dx}{xlx} = x^{-1}l^{-1}x \times dx$. * 761.

Si l'on veut exprimer x par $1+x$; pour avoir $dl.l\,1+x$, on suppose $l.\,1+x = 1+y$, ce qui donnera, 1°. $dl.\,1+x = dy = {}^{*}\frac{dx}{1+x}$; 2°. $l.l\,1+x = l\,1+y$; 3°. $dl.l\,1+x = dl\,1+y = \frac{dy}{1+y}$; & substituant les valeurs de dy & de $1+y$ dans $\frac{dy}{1+y}$, l'on aura $dl.l\,1+x = \frac{dx}{l\,1+x \times 1+x} = \overline{1+x}^{-1} \times l^{-1}\,1+x \times dx$. * 761.

REMARQUE.

64. L'ON peut aussi employer ces expressions des logarithmes $l.\,1+x = \text{S.}\frac{dx}{1+x}$. Par exemple, en supposant $l.l\,1+x = z$, & $l\,1+x = 1+y$, (ce qui donne $l.l\,1+x = l\,1+y = \text{S.}\frac{dy}{1+y}$,) l'on aura $dl.l\,1+x = dz = \frac{dy}{1+y}$, & $dy = {}^{*}\frac{dx}{1+x}$. Ces expressions sans les réduire (quand on n'a besoin que de différentielles) à une quantité qui n'ait que dx, $1+x$, & $l.\,1+x$, peuvent être utiles à trouver les intégrales dans plusieurs Problêmes, qui soient exprimées par des *suites* qui n'ayent pour inconnues que des x, ou des y, ou des z, comme on le verra dans la suite. * 761.

COROLLAIRE III.

65. ON trouvera la différence de $l^{m}lx$, en supposant $lx = y$; ce qui donnera, 1°. $dlx = dy = \frac{dx}{x}$; 2°. $l^{m}lx = l^{m}y$; d'où l'on aura $dl^{m}y = {}^{*}\,my^{-1}\,l^{m-1}y \times dy$; où substituant les valeurs de y^{-1}, $l^{m-1}y$, dy, l'on trouvera $dl^{m}lx = ml^{m-1}lx \times l^{-1}x \times \frac{dx}{x}$. * 762.

IV.

66. Enfin on trouvera de même la différence de $l^{n}l^{m}x$, en supposant $l^{m}x = y^{m}$; ce qui donnera, 1°. $lx = y$; 2°. $dlx = dy = \frac{dx}{x}$; 3°. $l^{n}l^{m}x = l^{n}y^{m}$; d'où l'on déduira (en regardant y^{m} dans $l^{n}y^{m}$ comme l'on regarde x dans $l^{m}x$) $dl^{n}y^{m} = nl^{n-1}y^{m} \times \frac{my^{m-1}dy}{y^{m}} = nmy^{-1}l^{n-1}y^{m} \times dy$, où substituant les valeurs de y^{-1}, y^{m}, dy, l'on trouvera $dl^{n}l^{m}x = nml^{-1}x \times l^{n-1}l^{m}x \times \frac{dx}{x} = nmx^{-1}l^{-1}x \times l^{n-1}l^{m}x \times dx$. * 762.

REMARQUE.

767. SI l'on ſubſtitue dans les valeurs trouvées par le troiſiéme & le quatriéme Corollaire, $1+x$ à la place de x, on aura $dl^m lx = ml^{m-1}l1+x \times l^{-1}\,1+x \times \frac{dx}{1+x}$, & $dl^n l^m x = nml^{-1}\,1+x \times l^{n-1}l^m\,1+x \times \frac{dx}{1+x}$.

COROLLAIRE V.

Qui eſt la propoſition fondamentale du calcul intégral des expreſſions logarithmiques.

768. IL ſuit de la propoſition fondamentale & de ſes Corollaires, que l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $x^{-1}dx$ (qu'on marquera dans la ſuite
*761. par S. $\frac{dx}{x}$) $= lx$. *
*762. S. $ml^{m-1}x \times \frac{dx}{x} = l^m x$. *
*766. S. $nml^{n-1}x^m \times \frac{dx}{x} = l^n x^m$. *
*763. S. $l^{-1}x \times \frac{dx}{x} = l.lx$. *
*765. S. $ml^{-1}lx \times \frac{dx}{x \times lx} = l^m lx$. *
*766. S. $nml^{n-1}l^m x \times \frac{dx}{x \times lx} = l^n l^m x$. *

Si l'on ſubſtitue dans les expreſſions précédentes $1+x$ à la place de x, on aura les intégrales par raport à l'expreſſion $1+x$; & on trouvera de même les intégrales pour les logarithmes négatifs S. $\frac{-dx}{x}$; S. $\frac{-dx}{1-x}$.

REMARQUE.

769. ON remarquera auſſi que $l.1+x =$ S. $\frac{dx}{1+x} =$ *643. $* x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. & que $l.\,1-x =$ S. $\frac{-dx}{1-x} = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 -$ &c.

Et ſuppoſant, pour abreger, $l.\,1+x = y$, l'on aura $1+x$ *646. $=* 1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2\times3}y^3+\frac{1}{2\times3\times4}y^4+$ &c. d'où il ſuit que $dx = dy \times 1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2\times3}y^3+\frac{1}{2\times3\times4}y^4+$ &c.

En ſuppoſant de même $l.\,1-x = y$, l'on aura $1-x = 1-y+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2\times3}y^3+\frac{1}{2\times3\times4}y^4-$ &c.

On peut de même exprimer par des *ſuites* les intégrales qui ſont des logarithmes de logarithmes; par exemple, ſuppoſant $z = l.\,l\,1+x$, & $l.\,1+x = 1+y$, l'on aura $z = l.\,1+y =$ S. $\frac{dy}{1+y}$; $dz = \frac{dy}{1+y}$; $dy = \frac{dx}{1+x}$; $y =$ S. $\frac{dx}{1+x}$.

*643. On déduira de $dz = \frac{dy}{1+y}$, $z =* y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4$

$+$ &c. & de $dy = \frac{dx}{1+x}$, $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.

1°. Si l'on veut la valeur de $l.l1 + x = z$, exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des x, il n'y a qu'à prendre dans la derniére équation les valeurs de y, y^2, y^3, &c. & les ſubſtituer dans $z = y - \frac{1}{2}y^2 +$ &c. & l'on aura la valeur de $l.l1 + x = z$, exprimée par une *ſuite* où il n'y aura que des x.

2°. Si l'on veut exprimer la valeur de x par une *ſuite* où il n'y ait que des z; après avoir trouvé, comme on vient de le dire, la valeur de z exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des x, il faudra par le retour des *ſuites* * trouver la *ſuite* où il n'y ait que des z, qui eſt la valeur de x. * 234.

3°. On peut par le même retour des *ſuites* trouver la valeur de x exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des y.

EXPLICATION DU CALCUL DIFFERENTIEL & intégral des quantités exponentielles.

Suppoſitions qu'on a démontrées ailleurs.

70. LE calcul différentiel & intégral ne s'applique aux quantités exponentielles $x^x = y$, $a^x = y$, & aux autres plus compoſées, que par le moyen des logarithmes de ces quantités. Pour faire concevoir clairement cette application, on fera faire attention à ces trois propriétés des logarithmes; 1°. la ſomme des deux logarithmes de deux ou de pluſieurs grandeurs, comme $lx + la$, * eſt égale au logarithme du produit de ces grandeurs $l.ax$; 2°. la différence de deux logarithmes $lx - la$ * eſt égale au logarithme $l\frac{x}{a}$ du quotient qui naît de la diviſion de la grandeur x par la grandeur a; 3°. le logarithme d'une grandeur linéaire x multiplié par l'expoſant d'une puiſſance quelconque m de cette grandeur, * eſt égal au logarithme de cette même grandeur élevée à la puiſſance m, $mlx = l.x^m$, $\frac{1}{n}lx = l.x^{\frac{1}{n}}$, &c. L'on peut mettre ſi l'on veut par tout $1 + x$ à la place de x, & l'on remarquera auſſi que quand la grandeur x ou $1 - x$ eſt au-deſſous de celle qu'on aura priſe pour l'unité, ſon logarithme eſt négatif. * 641. * 641. * 642.

COROLLAIRE I.

771. IL ſuit de ces propriétés, que quand on a une équation qui contient des quantités exponentielles, on peut en déduire une autre équation qui contiendra les logarithmes des quantités de la premiére, car les grandeurs égales ont leurs logarithmes égaux, en ſuppoſant qu'on ſe ſert de la même logarithmique; ainſi l'on déduira de $x^x = a$, $xlx = la$: de même $a^x = y^x$ donnera $xla = xly$.

De même $x^{x^x} = y^{y^y}$ donnera $x^x lx = y^y ly$, & celle-ci donnera $xlx + l.lx\ (= l.x^x lx) = yly + l.ly\ (= l.y^y ly)$; & ainſi des autres.

COROLLAIRE II.

772. ON peut auſſi tirer une équation exponentielle d'une équation logarithmique, en retournant des logarithmes aux grandeurs dont ils ſont les logarithmes; ainſi de $xlx = la$, on déduira $x^x = a$; & ainſi des autres.

COROLLAIRE III.

773. QUAND même l'équation n'a pas d'expreſſion logarithmique dans un de ſes membres, comme $x = yla$, on peut en tirer une équation exponentielle, en multipliant les deux membres par un logarithme conſtant comme $l.b$, qui ne ſoit pas celui de la grandeur priſe pour l'unité, parce que ce logarithme ſeroit zero, & l'on aura $xl.b = y \times l.b \times l.a$; d'où l'on tirera l'équation exponentielle $b^x = a^{y\,l.b}$; ou bien quand un membre a déja une expreſſion logarithmique, on peut, pour rendre l'équation exponentielle plus ſimple, prendre l'unité, par laquelle le premier membre peut toujours être conçu multiplié dans $1 \times x = yla$, pour un logarithme conſtant dont le nombre n ſoit connu par la logarithmique, puiſque la grandeur priſe pour l'unité dans l'équation eſt ſuppoſée connue; ainſi l'on aura $1 = l.n$, & l'équation ſera $xl.n = yla$; d'où l'on tirera $n^x = a^y$. Il en eſt de même des autres.

REMARQUE.

774. IL arrive en pluſieurs cas que les équations logarithmiques qu'on tire des équations exponentielles, ſont des équations purement

purement algebriques, qui ne contiennent que des quantités connues & inconnues ordinaires. Par exemple on déduit de $a^x = b^{yy}$, l'équation $xla = yy \times l.\ b$; d'où l'on tire $\frac{l.a}{l.b} \times x = yy$, qui eſt une équation ordinaire à la parabole, parceque les logarithmes des grandeurs connues a & b, ſont des grandeurs connues par la logarithmique; en les nommant m & n, l'on a $\frac{m}{n} x = yy$.

COROLLAIRE IV.

375. ON peut auſſi ſe ſervir de la méthode de réduire les équations des grandeurs exponentielles en d'autres équations logarithmiques, pour réduire les expreſſions exponentielles en expreſſions algebriques ordinaires par le moyen des *ſuites*; cela eſt très-utile dans la réſolution de pluſieurs Problêmes. Un exemple ſuffira pour en faire concevoir la méthode. Au lieu de $x^x = y$, on écrira $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$, ce qui donnera $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = l.\ 1+y$.

L'on réduira $l.\ 1+x$ en* $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ &c. & on multipliera cette valeur par $1+x$, & l'on aura $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. on réduira de même $l.\ 1+y$ en $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. & l'on aura cette équation $x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. D'où l'on déduira, par le retour des *ſuites**, la valeur de y en une *ſuite* qui n'aura que des x; & y ajoutant l'unité, l'on aura l'équation exponentielle $1+y = \overline{1+x}^{1+x}$, changée en une équation dont le ſecond membre ſera une *ſuite* infinie, & qui n'aura que des grandeurs ordinaires. On peut appliquer cette méthode aux équations exponentielles plus compoſées.

* 643.

* 234.

PROBLÊME I.

TROUVER les differentielles des quantités exponentielles.

PREMIERE METHODE.

376. IL faut les réduire aux expreſſions logarithmiques qui leur conviennent, & prendre enſuite les differentielles par le moyen de ces expreſſions. Ce qui s'éclaircira par les exemples ſuivans.

1. Pour trouver la difference de x^y, il faut ſuppoſer $x^y = z$;

d'où l'on déduira $ylx = lz$; il faut prendre les differences, & l'on aura $lx \times dy + y \times \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{x^y}$; ainſi l'on aura $x^y\, lx \times dy + x^{y-1} y \times dx = dz$ = à la difference de x^y. *Ce qu'il falloit trouver.*

2. Pour trouver la difference de u^{x^y}, on ſuppoſera $u^{x^y} = z$, ce qui donnera $x^y lu = lz$. On prendra les differences, & l'on aura par le premier exemple la difference de x^y égale à $x^y lx \times dy + x^{y-1} y \times dx$; ainſi la difference de $x^y lu = lz$ ſera $x^y lx \times lu \times dy + x^{y-1} y \times lu \times dx + x^y \frac{du}{u} = \frac{dz}{z} = \frac{dz}{u^{x^y}}$; ainſi la difference de $u^{x^y} = dz$ ſera $u^{x^y} x^y lx lu dy + u^{x^y} x^{y-1} y\, lu\, dx + u^{x^y} \times u^{-1} x^y\, du = dz$.

On peut trouver de même les differences des grandeurs exponentielles plus compoſées.

SECONDE METHODE PAR LE MOYEN DES *ſuites*.

POUR trouver la difference de $\overline{1+x}^{1+x}$, on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x} = 1+z$; d'où l'on aura, 1°. la difference $\overline{1+x}^{1+x} = dz$; 2°. $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = l.\ 1+z$. Après cela on trouvera, comme dans le quatriéme Corollaire $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \&c. = l.\ 1+z$. On trouvera de même $l.\ 1+z = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \&c. = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \&c.$ d'où l'on déduira par le retour des *ſuites* * la valeur de z, exprimée par une *ſuite* où il n'y aura que des x, qui ſera une équation dont z ſera le premier membre, & la *ſuite* en x le ſecond membre ; on prendra la difference de chaque membre, qui donnera la valeur de dz en x & dx, & ce ſera la difference de $\overline{1+x}^{1+x}$, qui eſt égale à dz.

* 234.

Pour trouver la difference de $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}}$, on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = 1+z$; ce qui donnera, 1°. diff. $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = dz$; 2°. $\overline{1+x}^{1+x} \times l.\ 1+x = l.\ 1+z$. On ſuppoſera encore $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$, ce qui donnera, 1°. $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = l.\ 1+y$; 2°. $\overline{1+x}^{1+x^{1+x}} = \overline{1+x}^{1+y} = 1+z$; 3°. $\overline{1+y} \times l.\ 1+x = l.\ 1+z$. Après cela il faudra trouver par la mé-

thode des *suites**, 1°. la valeur de $\overline{1+x} \times l.\ 1+x$, comme ci- * 234.
dessus; 2°. celle de $l.\ 1+y$, exprimée par des y. 3°. Ayant fait une équation dont le premier membre soit la *suite* égale à $\overline{1+x} \times l.\ 1+x$, & le second soit la *suite* en y égale à $l.\ 1+y$; il faudra par le retour des suites* trouver, en se servant de * 234.
cette équation, la valeur de $1+y$ exprimée par une suite où il n'y ait que des x. 4°. Il faudra ensuite multiplier la valeur de $1+y$ par la valeur de $l.\ 1+x$, & égaler la *suite* en x qui est cette valeur, à la valeur de $l.\ 1+z$* exprimée par des z; ce * 643.
qui donnera une équation dont le premier membre sera une *suite* en x égale à $\overline{1+x}^{1+x} \times l.\ 1+x$, & dont le second membre sera la valeur de $l.\ 1+z$ exprimée par des z. 5°. Il faudra par le retour des *suites* * trouver, en se servant de cette * 234.
derniere équation, la valeur de z lineaire exprimée par une *suite* où il n'y ait que des x. Cette valeur sera une équation dont le premier membre sera z, & le second sa valeur par une *suite* où il n'y a que des x. Enfin il faudra prendre la difference de chaque membre de cette équation, & ce sera la valeur de dz, & par consequent la difference de $\overline{1+x}^{1+x}$ que l'on cherchoit.

Cette méthode peut s'étendre aux exponentielles des degrés plus élevés.

REMARQUE.

QUAND l'exposant changeant d'une grandeur changeante est different de cette changeante, comme dans x^y ou $\overline{1+x}^{1+y}$, &c. il faut sçavoir* le raport de l'exposant y ou $1+y$ à x ou * 461.
à $1+x$, & prendre par le moyen de ce raport la valeur de y exprimée par x, & la mettre dans l'exposant à la place de y. Si par exemple $y = xx$, il faudra mettre x^{xx}, ou $\overline{1+x}^{1+xx}$, & ainsi des autres.

PROBLÊME II.

TROUVER les integrales des differentielles qui contiennent des expressions logarithmiques, & de celles qui contiennent des quantités exponentielles.

PREMIERE MÉTHODE.

777. LA premiere méthode eſt celle de l'art. 713, ainſi il ſuffira de l'appliquer à quelques exemples.

1er *Ex.* Pour trouver l'integrale de $xlx \times dx$, on la cherchera par parties par le moyen d'une integrale indéterminée, & l'on ſuppoſera que la premiere partie de l'integrale indéterminée eſt Ax^2lx, dans laquelle A eſt indéterminée. On en prendra la difference qui eſt $2Axlx \times dx + Ax^2 \times \frac{dx}{x} = 2Axlx \times dx + Axdx$. Comme l'on doit ſuppoſer par la méthode de l'art. 713, qu'on employe ici, que la differentielle qui naîtra de l'integrale indéterminée eſt égale à la differentielle propoſée, & que les termes correſpondans ſont égaux, pour déterminer les coëficiens indéterminés; & que la differentielle propoſée $1xlx \times dx$ eſt déja le terme correſpondant du premier terme $2Axlx \times dx$ de la differentielle indéterminée; il faut ſe ſervir du ſecond terme $+ Axdx$ pour trouver quel eſt le ſecond terme qu'il faut ſuppoſer dans l'integrale indéterminée; c'eſt-à-dire, il faut trouver quel doit être le ſecond terme de l'integrale indéterminée, pour donner au moins un terme correſpondant à $+ Axdx$. Or il eſt évident que le ſecond terme doit être Bx^2, dont la difference eſt $2Bxdx$; ainſi l'on aura

l'integrale indéterminée $Ax^2lx + Bx^2$
ſa differentielle $2Axlx \times dx + Axdx + 2Bxdx = 0$
— la differentielle propoſée — $1xlx \times dx$

Tous les termes de cette differentielle contenant les grandeurs qu'il faut pour déterminer les coëficiens, l'on a toutes les parties de l'integrale indéterminée. Il ne faut plus que ſuppoſer chaque terme de la differentielle égal à zero; ce qui donnera $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$; & ſubſtituer ces valeurs à la place des coëficiens dans l'integrale indéterminée, qui deviendra, par cette ſubſtitution, l'integrale $\frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2$ que l'on cherchoit.

On trouvera de la même maniere qu'en general $x^mlx \times dx$ a pour integrale $\frac{1}{m+1}x^{m+1}lx - \frac{1}{(m+1)^2}x^{m+1}$.

2e *Exemple.* Pour trouver l'integrale de $x^m l^n x \times dx$, on fera les mêmes raiſonnemens que l'on a faits dans le premier

Exemple, & l'on trouvera par parties l'integrale indéterminée $Ax^{m+1}l^n x + Bx^{m+1}l^{n-1}x + Cx^{m+1}l^{n-2}x + Dx^{m+1}l^{n-3}x$ + &c. ſa differentielle eſt

$$\left.\begin{array}{l}\overline{m+1}\times Ax^m l^n x\times dx + nAx^m l^{n-1}x\times dx + \overline{n-1}\times Bx^m l^{n-2}x\times dx + \&c.\\ \quad -\overline{m+1}\,Bx^m l^{n-1}x\times dx + \overline{m+1}\,Cx^m l^{n-2}x\times dx + \&c.\end{array}\right\} = 0.$$

la differentielle propoſée. $-x^m l^n x \times dx$

On ſuppoſera chaque terme de cette differentielle égal à zero, ce qui donnera $A = \frac{1}{m+1}$ $B = \frac{-n}{\overline{m+1}^2}$, $C = \frac{\pm n\times +\overline{n-1}}{\overline{m+1}^3}$ &c. on ſubſtituera ces valeurs dans l'integrale indéterminée, & après la ſubſtitution, l'on aura $\frac{1}{m+1}x^{m+1}l^n x - \frac{n}{\overline{m+1}^2}x^{m+1}l^{n-1}x + \frac{n\times\overline{n-1}}{\overline{m+1}^3}x^{m+1}l^{n-2}x -$ &c. C'eſt l'integrale que l'on cherchoit; m & n repréſentent les nombres entiers qui peuvent être les expoſans de x & du logarithme lx. Il eſt évident que quand n eſt un nombre entier poſitif, l'integrale eſt finie, & qu'alors le dernier terme ne contient plus de logarithme, mais la ſeule inconnue x.

Troiſiéme Exemple ſur les grandeurs exponentielles.

POUR trouver l'integrale de $x^x \times dx$, on ſuppoſera $x^x = 1 + y$; ce qui donnera $xlx = l.\,1+y$. Or $1+y = {}^{*}1 + l.\,1+y$ *646. $+\frac{1}{2}l^2\,1+y + \frac{1}{2\times3}l^3\,1+y + \frac{1}{2\times3\times4}l^4\,1+y +$ &c. ainſi en ſubſtituant dans cette équation la valeur de $l.\,1+y = xlx$, on aura $x^x = 1+y = 1 + xlx + \frac{1}{2}x^2l^2x + \frac{1}{2\times3}x^3l^3x +$ &c. en multipliant chaque membre par dx, on aura $x^x \times dx = dx + xlx\times dx + \frac{1}{2}x^2l^2x\times dx + \frac{1}{2\times3}x^3l^3x\times dx +$ &c. en prenant les integrales de chaque terme du ſecond membre, comme dans le premier & le ſecond Exemple, on trouvera S. $x^x \times dx = x + \frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2\times3}x^3l^2x - \frac{1}{9}x^3lx + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{4}x^4l^3x - \frac{1}{32}x^4l^2x + \frac{1}{64}x^4lx - \frac{1}{4^4=256}x^4 +$ &c. C'eſt l'integrale que l'on cherchoit.

On donnera dans les uſages de ce calcul integral des differences logarithmiques & exponentielles, la maniere de connoître les grandeurs conſtantes qu'il faut ajouter aux integrales que l'on trouve pour les rendre completes.

AVERTISSEMENT.

ON pourroit employer cette méthode pour trouver les integrales des differentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, comme $x^m l.\, lx \times dx$, $x^m l^n lx \times dx$, &c. & les integrales des differentielles exponentielles $x^x \times dx$, & des autres plus élevées; mais comme elle ne fait trouver pour les integrales que des *suites* infinies qui contiennent des expreſſions logarithmiques fort compoſées, il vaut mieux ſe ſervir dans ces cas de la ſeconde méthode, qui fait trouver ces integrales par des *ſuites* qui ne contiennent que des grandeurs ordinaires.

SECONDE MÉTHODE.

778. 1er *Exemple.* Pour trouver par les *ſuites* l'integrale de $xlx \times dx$, ou, ce qui eſt mieux, de $\overline{1+x}\, l.\, 1+x \times dx$; 1°. Il faut réduire $l.\, 1+x$ en la *ſuite* qui lui eſt égale, $l.\, 1+x = 1x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c. & multiplier cette *ſuite* par $\overline{1+x}\, dx$, & l'on aura $x\,dx + \frac{1}{2}x^2 dx - \frac{1}{2\times 3}x^3 dx + \frac{1}{3\times 4}x^4 dx -$ &c. $= \overline{1+x}\, l.\, 1+x \times dx$. 2°. Il faut prendre les integrales des termes de cette *ſuite*, & l'on aura $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\times 3}x^3 - \frac{1}{2\times 3\times 4}x^4 + \frac{1}{3\times 4\times 5}x^5 -$ &c. pour l'integrale que l'on cherchoit.

2e. *Exemple.* On trouvera de la même maniere l'integrale de $\overline{1+x}^m l^n\, 1+x \times dx$, en élevant la *ſuite* qui eſt la valeur de $l.\, 1+x$, à la puiſſance n, & la multipliant par $\overline{1+x}^m \times dx$ réduite en la *ſuite* qui lui convient, & prenant enfin l'integrale de ce produit.

3e. *Exemple.* Pour trouver l'integrale de $\overline{1+x}^{1+x} \times dx$; 1°. on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$; ce qui donnera $\overline{1+x}\, l.\, 1+x$
* 775. $= l.\, 1+y$. 2°. Après avoir trouvé * $\overline{1+x}\, l.\, 1+x = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. & $l.\, 1+y = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ &c. ce qui donnera l'équation $x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 +$ &c. $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3$
* 234. $-$ &c. on aura par le retour des *ſuites* * la valeur de $1+y = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{12}x^5 +$ &c. 3°. On multipliera le ſecond membre par dx, ce qui donnera l'équation $\overline{1+x}^{1+x} \times dx = dx + x\,dx + x^2 dx + \frac{1}{2}x^3 dx$ &c. & en prenant les integrales des termes du ſecond membre, on

aura $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 +$ &c. pour l'integrale que l'on cherchoit.

4e. *Exemple.* Pour trouver l'integrale de $\overline{1+x}^{1+x} \times dx$, 1°. on ſuppoſera $\overline{1+x}^{1+x} = 1+z$, ce qui donnera $\overline{1+x}^{1+x}\, l.\, 1+x = l.\, 1+z$; on ſuppoſera de plus $\overline{1+x}^{1+x} = 1+y$, ce qui donnera $1+x \times l.\, 1+x = l.\, 1+y$, & encore $\overline{1+y}\, l.\, 1+x = l.\, 1+z$. 2°. * On trouvera la *ſuite* qui * 775.
eſt la valeur de $\overline{1+x} \times l.\, 1+x$, où il n'y aura que des x, & la *ſuite* en y qui eſt la valeur de $l.\, 1+y$. On fera une équation de ces deux valeurs, & par le retour des *ſuites* on trouvera par cette équation la valeur de $1+y$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des x; & l'on multipliera cette valeur de $1+y$ par la *ſuite* qui eſt la valeur de $l.\, 1+x$; & on mettra ce produit, qui eſt une *ſuite* en x, à la place de $\overline{1+y}\, l.\, 1+x$ dans l'équation $\overline{1+y}\, l.\, 1+x = l.\, 1+z$. 3°. Après avoir trouvé la valeur de $l.\, 1+z$ exprimée par la *ſuite* qui lui convient en z, & fait une équation de la valeur de $\overline{1+y}\, l.\, 1+x$ en x, & de la valeur de $l.\, 1+z$ en z, on trouvera par le retour des *ſuites* par le moyen de cette équation, la valeur de $1+z$ exprimée par une *ſuite* où il n'y ait que des x. Il eſt évident que cette valeur de $1+z$ en x ſera égale à $\overline{1+x}^{1+x}$; ainſi multipliant cette valeur de $1+z$ par dx, elle ſera égale à $\overline{1+x}^{1+x} \times dx$. 4°. On prendra à l'ordinaire les integrales de tous les termes, & leur ſomme fera une *ſuite* qui ſera l'integrale que l'on cherchoit.

AVERTISSEMENT.

ON peut ſi facilement appliquer cette ſeconde méthode aux differentielles des exponentielles plus élevées, & aux differentielles qui contiennent des logarithmes de logarithmes, qu'il eſt inutile de s'y arrêter ici, & de plus cela n'eſt pas de grand uſage.

Uſage de la logarithmique pour décrire les courbes.

79. LEs courbes dont l'équation contient des expreſſions logarithmiques lx, $l.\, 1+x$, S. $\frac{dx}{1+x}$, S. $\frac{a \times dx}{b+x}$, &c. ſe peuvent

décrire par le moyen de la logarithmique. On en mettra seulement ici deux exemples des plus simples, qui suffiront pour le faire clairement concevoir.

780. 1er *Exemple.* Pour décrire la courbe dont l'équation est $x l x = y$, ou si l'on veut $\overline{1+x}\, l\, 1.+x = y$; 1°. Il faut avoir la
* 754. logarithmique HBF toute tracée * dont on suppose que l'or-
Fig. L. donnée AB est l'unité, A l'origine des logarithmes des ordonnées; dont les positifs se prennent du côté de ACE, les négatifs du côté de AI; & on nommera les ordonnées CD, EF, $1+x$; les ordonnées des logarithmes négatifs comme IH, seront $1-x$; AC, AE, logarithmes des CD, EF, $(1+x)$, seront nommées $l.\ 1+x$, & $AI\,(-l.\ 1-x.)$ Quand un logarithme $\pm l.\ 1 \pm x$ est déterminé, l'ordonnée $1 \pm x$ est connue & déterminée; par exemple si $AI\,(-l.\ 1-x) = AB = 1$, $IH\,(1-x)$ est une grandeur connue.

2°. Supposant que $ALBM$ est la ligne des coupées de la courbe qu'on veut décrire, & que les ordonnées sont paralleles à ACE; pour trouver chacun des points de la partie de la courbe dont les coupées $AM\,(1+x)$ surpassent l'unité, il faut prendre AM plus grande que AB, & tirer MDG parallele à ACE qui coupe la logarithmique en D, & mener DC parallele à AB, il est évident que $AM = DC$ étant
* 270. $1+x$; AC est $l.\ 1+x$. Il faut faire * en lignes cette proportion qui se déduit de l'équation de la courbe $\overline{1+x}\, l.\ 1+x = 1\, y$; $AB\,(1).\ AC\,(l.\ 1+x) :: CD$ ou $AM\,(1+x).\ y$, qu'on suppose égale à MG; le point G sera l'un des points de la courbe; sa coupée $1+x$ sera AM; son ordonnée $y = \overline{1+x}\, l.\ 1+x$ sera MG. On trouvera de la même maniere chacun des autres points.

3°. Pour trouver les points de la partie de la courbe dont les coupées AL sont $1-x$. Ayant pris AL, il faut tirer LH parallele à AI, & par le point H où elle rencontre la logarithmique, tirer HI parallele à AB, & faire ensuite cette
* 270. proportion en lignes * $AB\,(1).\ -AI\,(-l.\ 1-x) :: IH$ ou $AL\,(1-x).\ -y = \overline{1-x} \times -l.\ 1-x$, qu'on suppose égale à $-LK$, & le point K du côté des ordonnées négatives sera l'un des points de la courbe. On trouvera de la même maniere les autres points dont les coupées sont les $1-x$.

La

La conſtruction ſeroit la même ſi l'on ſe ſervoit de cette expreſſion $xlx = y$ pour l'équation de la courbe ; & il y faudroit de même diſtinguer les coupées x plus grandes que l'unité AB dont les logarithmes lx ſeroient poſitifs, des coupées x moindres que l'unité AB, dont les logarithmes $-lx$ ſeroient négatifs.

81. Si l'équation de la courbe étoit $x^2lx = y$, $x^3lx = y$, $x^4lx = y$, &c. (ce ſeroit la même choſe ſi l'on y exprimoit x par $1 \pm x$,) la conſtruction ſeroit la même ; il faudroit ſeulement pour chaque coupée AM (x ou $1 + x$) AL (x ou $1 - x$,) prendre le double du logarithme AC (lx ou $l.\ 1 + x$,) ou de AI ($-lx$ ou $-l.\ 1 - x$;) & l'ordonnée de la logarithmique, dont ce double de AC ou de AI eſt le logarithme, ſera x^2 ou $\overline{1+x}^2$; ſi l'on prend le logarithme triple, quadrule, &c. ou qui ſoit la moitié, le tiers, &c. de AC ou de AI, l'ordonnée de la logarithmique qui répond à ce logarithme triple, quadruple, &c. ou qui eſt la moitié, le tiers, &c. du logarithme AC ou AI, ſera x^3, x^4, &c. ou $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, &c. ou $\overline{1+x}^3$, $\overline{1+x}^4$, &c. ou $\overline{1+x^2}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1+x^3}^{\frac{1}{3}}$, &c. & cette ordonnée x^3, x^4, &c. ſeroit le troiſiéme terme de la proportion qui feroit trouver l'ordonnée y de la courbe qu'on voudroit décrire, dont l'équation eſt $y = x^3lx$, &c.

Second Exemple pour la conſtruction des courbes dont les équations contiennent des grandeurs exponentielles.

82. POUR décrire la courbe dont l'équation eſt $x^x = y$: d'où l'on tire l'équation logarithmique $xlx = ly$; 1°. ſuppoſant la logarithmique d f BDF, dont l'ordonnée priſe pour l'unité ſoit AB, & les autres ordonnées CD, EF, &c. ſont les grandeurs x, & AC, AE leurs logarithmes lx ; & les ordonnées de l'autre côté de l'unité, comme e f, c d, ſont les x moindres que l'unité, & Ae, Ac, &c. ſont leurs logarithmes $-lx$; il faut prendre les coupées x de la courbe qu'on veut décrire ſur $ALBM$, & les ordonnées paralleles à ACE. FIG. LI.

2°. Pour trouver chaque point de la courbe, il faut prendre une coupée quelconque AM (x), & tirer MDG parallele à AE, laquelle rencontre la logarithmique en D, d'où il faut tirer DC parallele & égale à MA, & faire enſuite * en lignes * 270.

cette proportion que donne l'équation logarithmique $xlx = 1ly$; $AB(1).AM$ ou $CD(x) :: AC(lx).ly$, qu'on suppose égale à AE. Il est évident que l'ordonnée EF est égale à y; ainsi il faut faire $MG = EF(y)$, & le point G sera un point de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de la même maniére les autres points.

3°. Pour trouver les points comme K de la partie bKb de la courbe dont les coupées $AL(x)$ sont moindres que l'unité AB, il faut prendre une coupée $AL(x)$, tirer par L la ligne KLd parallele à la ligne des logarithmes Ae, & mener par le point d, où elle rencontre la logarithmique, dc parallele & égale à $AL(x)$, & faire la même proportion $AB(1).AL$ ou dc $(x) :: Ae(-lx).-ly$, qu'on suppose égale à Ae; il est évident que ef sera égale à y; (on remarquera ici que quoique le logarithme $Ae(-ly)$ soit négatif, l'ordonnée ef (y) de la logarithmique n'est pas moins positive;) ainsi il faut prendre $LK = ef(y)$, & le point K sera un des points de la courbe qu'on veut décrire. On trouvera de même les autres points.

REMARQUE.

783. 1°. L'EQUATION logarithmique $xlx = ly$ déduite de l'équation de la courbe $x^x = y$, fait connoître qu'en supposant à l'origine A, $x = 0$, ly devient zero. Or zero est le logarithme de $AB = 1$, donc l'ordonnée y dont $ly = 0$ est le logarithme, est égale à AB; ainsi prenant $Ab = AB$, le point b est un point de la courbe.

2°. La même équation fait aussi connoître que quand la coupée x de la courbe est $= AB = 1$, lx est zero; ainsi xlx devenant encore zero, ly devient aussi zero; par conséquent l'ordonnée $Bb(y)$ de la courbe au point B est encore égale à $AB = 1$.

3°. Si dans l'équation $x^x = y$, l'exposant x étoit $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, &c. ou $2x$, $3x$, &c. ce qui donneroit l'équation logarithmique $\frac{1}{2}xlx = ly$, $\frac{1}{3}xl.x = l.y$, $2xl.x = l.y$, &c. la construction de la courbe se feroit de la même maniére; il n'y auroit qu'à mettre dans le second terme de la proportion, $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{3}x$, &c. au lieu de x. Si l'exposant x étoit élevé à une puissance constante quelconque, comme $x^{x^2} = y$, $x^{x^3} = y$, &c. d'où l'on tireroit $x^2lx = ly$, $x^3lx = ly$, &c. on trouveroit le

second terme de la proportion x^2, x^3, &c. comme on l'a enseigné à la fin du premier exemple.

4°. On fera remarquer ici que pour trouver les logarithmes de logarithmes des x, en supposant que AM ou DC est x, dont le logarithme $lx = AC$; il faut prendre sur la ligne des x qui est AM, la ligne $AH = AC\,(lx)$ & tirer HI parallele à AE jusqu'à la rencontre de la logarithmique en I, & il est évident que cette ligne HI ou son égale AP sera $l.lx$. FIG. LI.

Les usages du calcul différentiel & intégral des équations logarithmiques & exponentielles, pour trouver les propriétés des courbes de ces équations.

784. ON trouve par le calcul différentiel les tangentes de ces courbes & les autres lignes qui y ont raport, les points où elles sont les plus éloignées ou les plus proches de leur axe, & les autres propriétés qui se découvrent par le calcul différentiel.

Pour trouver la soutangente MS d'un point G quelconque de la courbe KBG dont l'équation est $\overline{1+x} \times l.\ 1+x = y$, il faut prendre les différences des deux membres de l'équation, & l'on aura $dx \times l.\ 1+x + 1\,dx = 1\,dy$. Mettant cette valeur de dy dans la formule de la soutangente * $\frac{ydx}{dy}$, & y substituant aussi la valeur de $y = \overline{1+x}\ l.\ 1+x$, l'on aura la soutangente $MS = \frac{\overline{1+x} \times l.\ 1+x}{1+l.\ 1+x} = \frac{AM \text{ ou } DC \times AC}{AB+AC}$. FIG. LI. * 550.

785. On trouvera de même la soutangente MS d'un point quelconque G de la courbe bKG dont l'équation est $x^x = y$, d'où l'on déduit $xlx = ly$, en prenant la différence de chaque membre, qui est $dx \times lx + x \times \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$; d'où l'on déduira, en multipliant le tout par la valeur de y, $x^x lx \times dx + x^x dx = dy$; & mettant dans la formule de la soutangente * $\frac{ydx}{dy}$, les valeurs de y & de dy, l'on aura la soutangente $MS = \frac{1}{1+x} = \frac{AB \times AB}{AB+AC}$. FIG. LI. * 550.

786. Si l'on veut découvrir le point K le plus proche de l'axe ABM, il faut supposer * $dy = 0$, ce qui donnera $x^x lx + x^x = 0$, ou bien, divisant par x^x, $1 + lx = 0$, & $1 = -lx$, ou $lx = -1$. * 556.

Mettant cette valeur dans l'équation $xlx = ly$, l'on aura $xx - 1 = ly$, où -1 est un logarithme négatif $-lx$ qui est égal à l'unité AB, ce qui fait voir qu'il faut prendre $Ac = AB$, & tirer l'ordonnée cd qui sera la valeur de x par raport au point K le plus proche de l'axe ; il faut aussi mener dLK parallele à AE, & elle rencontrera la courbe au point K le plus proche ; l'on déterminera l'ordonnée LK de ce point en faisant cette proportion en lignes tirées de $xx - lx = 1\,ly$, $AB(1)$. cd ou $AL(x) :: Ac(-lx = -1)$. $-ly$ que l'on suppose égale à Ae. Il faut ensuite tirer l'ordonnée ef qui sera la valeur de y dont Ae $(-ly)$ est le logarithme, & faire $LK =$ fe (y), & ce sera l'ordonnée du point K qui est la moindre des ordonnées.

AVERTISSEMENT.

CES exemples suffisent pour apprendre aux Lecteurs la maniére de découvrir les propriétés des courbes des équations logarithmiques & exponentielles que l'on peut trouver par le calcul différentiel. On découvre par le calcul intégral les rectifications de ces courbes, leurs quadratures, la mesure des solides formés par leur révolution autour d'un axe, la mesure des surfaces de ces solides, & les distances des centres de pesanteur de ces courbes, de leur aire, & des solides qui en sont formés.

787. On mettra seulement ici pour exemples la maniére de trouver les quadratures des deux courbes qu'on a décrites.

FIG. L. 1er *Exemple.* Pour trouver l'aire BGM de la courbe BG dont l'équation est $\overline{1+x}\,l.\,1+x = y$, il faut se servir de la formule de la quadrature des courbes * ydx, qui devient ici $\overline{1+x}\,l.\,1+x \times dx$; ainsi la question se réduit à trouver l'intégrale de cette différentielle. Or cette intégrale est * par le second Problême $\frac{1}{2} \times \overline{1+x}^{2}\,l.\,1+x - \frac{1}{4}\overline{1+x}^{2}$.

*595.

*777.

REMARQUE.

La maniére de connoître les grandeurs constantes qu'il faut ajouter aux intégrales des différences logarithmiques & exponentielles pour les rendre completes.

788. POUR voir si l'intégrale est complete, il faut supposer $l.\,1+x = 0$, ce qui rendra le premier terme de l'intégrale

$= 0$, & $1 + x = 1$. En mettant dans le second terme 1 à la place de $1 + x$, l'on trouve la grandeur négative $-\frac{1}{4}$; ainsi $\frac{1}{4}$ est la quantité constante qu'il faut ajouter avec un signe opposé à l'intégrale trouvée; l'intégrale complete est donc $\overline{\frac{1+x}{2}}^2 \times l.\ 1 + x - \overline{\frac{1+x}{4}}^2 + \frac{1}{4}$. La raison de cette règle est que l'intégrale exprime l'aire BGM qui est zero à l'origine B de la courbe; ainsi l'intégrale doit aussi être zero au point B; or on trouve qu'elle devient, à ce point B, $-\frac{1}{4}$; il faut donc lui ajouter $+\frac{1}{4}$, afin qu'à ce point elle devienne $= 0$; ainsi $+\frac{1}{4}$ est la quantité constante qui doit être ajoutée à l'intégrale pour lui ôter ce qu'elle a de trop, & pour la rendre exacte.

Si les x commençoient à l'origine A, & que l'on se servît de cette expression $xlx = y$, il ne faudroit pas moins, afin que l'intégrale exprimât exactement l'aire BGM, supposer $lx = 0$, ce qui rendroit $x = 1$; & l'intégrale de $xlx \times dx$ qui seroit alors $\frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2$, deviendroit de même $-\frac{1}{4}$, & comme il est évident que quand x est égale à AB (1), l'aire $BGM = 0$, il est aussi évident qu'il faut ajouter $+\frac{1}{4}$ à l'intégrale afin qu'elle devienne zero au point B. Ainsi l'intégrale étant trop grande de $-\frac{1}{4}$, il faut lui ajouter $+\frac{1}{4}$ pour la rendre complete.

789. 2d *Exemple.* Pour trouver l'aire $AMGK$b de la courbe $b KG$, dont l'équation est $x^x = y$, il faut se servir de la formule ydx *, qui devient ici $x^x dx$; ainsi la question se réduit à trouver l'intégrale de $x^x dx$; or l'on a trouvé * que cette intégrale est S. $x^x dx = x + \frac{1}{2}x^2lx - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3l^2x - \frac{1}{9}x^3lx + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{24}x^4l^2x - \frac{1}{32}x^4l^2x + \frac{1}{64}x^4lx - \frac{1}{250}x^4$ + &c. Ainsi l'aire que l'on cherche est exprimée par cette intégrale. FIG. LI. * 595. * 777. 3e *Exemp.*

REMARQUE.

790. COMME l'on suppose que l'intégrale commence à l'origine A, & qu'elle doit exprimer l'aire $AMGK$b qui commence à la même origine A, il est évident que x étant zero au point A, l'aire y doit aussi être zero : il faut donc supposer $x = 0$, & comme cette supposition détruit tous les termes de l'intégrale, il n'y a point de grandeur constante à y ajoûter.

Si l'on vouloit l'aire *BMGb* qui commence au point *B*, ou à l'ordonnée *Bb*, il faudroit ſuppoſer $lx = 0$, ce qui donneroit $AB\ (x) = 1$; & ſubſtituant ces valeurs de lx & de x dans l'intégrale, il reſteroit $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} -$ &c. ainſi il eſt évident que la ſomme de cette ſuite ſeroit la grandeur conſtante qu'il faudroit ajoûter ſous un ſigne oppoſé à l'intégrale, afin qu'elle exprimât l'aire *BMGb* qui commence à l'ordonnée *Bb*.

Comme $AB = 1$, & que le logarithme de *AB* eſt zero, en ſuppoſant dans l'intégrale trouvée $lx = 0$, & $x = 1$, l'on trouve la ſuite $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} -$ &c. qui exprime la valeur de l'aire *ABb*b.

On peut auſſi trouver l'intégrale de $x^x dx$ par la ſeconde méthode du ſecond Problême.

Autre uſage des expreſſions logarithmiques & exponentielles pour trouver les intégrales des différentielles qui ſont des fractions dont le numérateur & le dénominateur ne contiennent que les puiſſances d'une même changeante, mais qui ſont toutes commenſurables.

AVERTISSEMENT.

ON ne peut pas trouver par les méthodes qui font découvrir les intégrales des différentielles, celles des différentielles, comme $\frac{x^3 + lxx + mx + n}{pxx + qx + r} \times dx$, qui contiennent une fraction où il n'y a qu'une même changeante x dont toutes les puiſſances ſont commenſurables : c'eſt pourquoi on a été obligé de chercher une autre méthode pour ces différentielles. Voici celle qu'on a découverte pour trouver les intégrales de ces différentielles par le moyen des expreſſions logarithmiques & exponentielles.

Mémoires de l'Académie, 1702. p. 289.

791. Soit une telle différentielle repréſentée par $\frac{p}{q} dx$, dont p repréſente le numérateur & q le dénominateur, chacun compoſé de termes qui contiennent les puiſſances de x avec des conſtantes comme dans une équation, & p & q ſont ſuppoſées commenſurables. 1°. Il faut diviſer p par q juſqu'à ce que la plus haute dimenſion de x ſoit moindre dans q

que dans p, à moins que cela ne se trouvât déja, & que l'on ne pût plus continuer la division, car il la faut continuer tant qu'elle se pourra faire. Cette opération réduira la différentielle en deux parties, dont la première sera le quotient commensurable qui est venu de la division ; la seconde sera le reste de la division chacun multiplié par dx. Il est évident qu'on peut toujours trouver l'intégrale de la première partie ; ainsi il ne reste qu'à trouver l'intégrale du reste, qu'on suppose représenté par $\frac{r}{q}dx$. (Si r & q avoient quelque diviseur commun, il faudroit les diviser par ce diviseur commun pour abreger le reste ; on suppose ici qu'ils n'en ont pas.)

2°. Il faut supposer $\frac{r}{q}dx = \frac{a \times dx}{f+x} + \frac{b \times dx}{g+x} + \frac{c \times dx}{h+x} +$ &c. c'est-à-dire il faut supposer $\frac{r}{q}dx$ égal à autant de différentielles logarithmiques qu'il y a d'unités dans la plus haute dimension de x dans q, & que chacune soit multipliée par une grandeur constante indéterminée a, b, c, &c. On suppose aussi que f, g, h, &c. sont des constantes indéterminées.

3°. Il faut réduire ces différentielles en une somme qui les contienne toutes, ce qui se fait en les réduisant au moindre dénominateur commun, & il est évident que la plus haute dimension de x sera la même dans le dénominateur de cette somme & dans q, & si la plus haute dimension de x dans le numérateur de cette somme surpassoit celle de x dans r, il faudroit supposer dans r les termes qui manqueroient multipliés chacun par zero : il est évident que par cette opération le numérateur de la somme & r, auront un même nombre de termes, & de même le dénominateur de la somme & q. Il faut faire des équations des termes correspondans des numérateurs, & de même des termes correspondans des dénominateurs, & on trouvera les valeurs de toutes les indéterminées constantes a, b, c, &c. f, g, h, &c. qu'on a supposées, lesquelles valeurs seront exprimées par les coéficiens donnés des termes de r & de q. Il faut substituer ces valeurs à la place de ces indéterminées dans $\frac{a \times dx}{f+x} + \frac{b \times dx}{g+x} + \frac{c \times dx}{h+x} +$ &c. & elles deviendront par ces substitutions les différentielles logarithmiques dont on a besoin : on les supposera ici avec les mêmes lettres, mais on les doit à présent regarder comme déterminées.

4°. Comme $\frac{dx}{f+x}$ est la différentielle de $l.f+x$, & qu'ainsi

S. $\frac{dx}{f+x} = l.f+x$, & qu'il en eſt de même des autres ; il eſt évident que pour avoir l'intégrale de $\frac{r}{q}dx = a \times \frac{dx}{f+x} + \frac{b \times dx}{g+x} + \frac{c \times dx}{h+x}$ + &c. il faut prendre les logarithmes de ces différentielles, & l'on aura S. $\frac{r}{q}dx = a \times l.\overline{f+x} + b \times l.\overline{g+x}$ + $c \times l.\overline{h+x}$ + &c. Mais $a \times l.\overline{f+x} = {}^{*}l.\overline{f+x}^{a}$, ainſi S. $\frac{r}{q}dx = l.\overline{f+x}^{a} + l.\overline{g+x}^{b} + l.\overline{h+x}^{c}$. De plus, la ſomme

* 770. des logarithmes de pluſieurs grandeurs eſt égale * au ſeul logarithme du produit de ces grandeurs ; c'eſt pourquoi l'on aura enfin S. $\frac{r}{q}dx = l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$; c'eſt l'intégrale du reſte $\frac{r}{q}dx$, *qu'il falloit trouver.*

COROLLAIRE.

792. QUAND on trouve dans la réſolution d'un Problême une équation $\frac{p}{q}dx = \frac{r}{z}dy$, dont chaque membre eſt une différentielle ſemblable à celle dont on vient d'enſeigner à trouver l'intégrale, mais dont le premier ne contient que la changeante x, & le ſecond que la changeante y ; on peut, en trouvant par la méthode précédente l'intégrale de chaque membre, réduire l'équation à une autre équation qui ne contienne que des logarithmes, &, ſi l'on veut, à une équation exponentielle : après quoi ſi l'équation propoſée exprime la nature d'une courbe, on pourra la décrire par le moyen de la logarithmique. Car ſuppoſant que la premiére partie du premier membre $\frac{p}{q}dx$, qui eſt le plus grand quotient de p diviſe par q dont on peut toujours trouver l'intégrale, ait pour intégrale x, & que l'intégrale du reſte ſoit $l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$, & qu'ainſi l'intégrale entiére du premier membre ſoit S. $\frac{p}{q}dx = 1\,x + l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c}$, & que de même l'intégrale du ſecond membre ſoit S. $\frac{r}{z}dy = 1\,y + l.\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\varkappa}$; l'on aura l'équation $1 \times x + l.\overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = 1 \times y + l.\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\varkappa}$, qu'on peut réduire à une équation exponentielle, en prenant l'unité par laquelle x & y ſont conçues multipliées pour un logarithme conſtant, dont le nombre ou l'ordonnée dans la logarithmique ſoit la grandeur connue

nue n; (cette unité ne doit pas être celle de la logarithmique, dont le logarithme eſt zero,) ainſi l'on aura $1 = l.\ n$; & mettant $l.n$ au lieu de 1 dans $1 \times x$ & $1 \times y$, l'on aura $x \times ln + l.\overline{f+x}^{\alpha}$ &c. $= y \times l.\ n + l.\overline{\varphi+y}^{\alpha} \times$ &c. Mais $x \times l\,n$ * $= l.\ n^x$, & $y \times l.n = l.\ n^y$; & de plus la ſomme des logarithmes de pluſieurs nombres eſt égale au logarithme du produit de ces nombres; on aura donc $l.\ n^x \times \overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = l.n^y \times \overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\varkappa}$; & les logarithmes de deux grandeurs étant égaux, il faut que ces grandeurs ſoient égales, en ſuppoſant les logarithmes d'une même logarithmique; on aura donc enfin $n^x \times \overline{f+x}^{a} \times \overline{g+x}^{b} \times \overline{h+x}^{c} = n^y \times \overline{\varphi+y}^{\alpha} \times \overline{\gamma+y}^{\beta} \times \overline{\lambda+y}^{\varkappa}$, qui eſt l'équation exponentielle à laquelle on a réduit l'équation propoſée, & elle devient quelquefois une équation qui n'a que des grandeurs algebriques ordinaires, comme quand x & y ſont chacune zero, & que tous les expoſans ſont des nombres.

* 770.

REMARQUES.

I.

773. IL n'eſt pas néceſſaire que chaque membre de l'équation contienne une differentielle comme $\frac{p}{q}\,dx$ telle qu'on l'a expliquée, pour en déduire une équation exponentielle; il eſt évident qu'il ſuffit qu'un ſeul nombre en contienne une, & que l'autre nombre contienne une differentielle dont on puiſſe avoir l'integrale par les méthodes ordinaires, comme $\frac{p}{q}\,dx = dy$; car il ſera facile * de la réduire à une équation exponentielle.

* 775.

II.

774. Il y a encore des differentielles que l'on réduit à des differentielles logarithmiques dont on peut par conſéquent trouver les integrales par les logarithmes; par exemple, la differentielle $\frac{a\,dx}{bb-xx}$ ſe réduira, (en ſuppoſant $z = \frac{+b+x}{+b-x}$, & ſubſtituant les valeurs de dx & de $-xx$ priſes de cette équation, qui ſont $dx = \frac{2b \times dz}{\overline{z+1}^2}$, & $xx = \frac{\overline{bz-b}^2}{\overline{z+1}^2}$,) à $\frac{a}{2b} \times \frac{dz}{z} = \frac{a\,dx}{bb-xx}$; & $\frac{a}{2b} \times \frac{dz}{z}$ eſt une differentielle logarithmique multipliée par une conſtante dont l'integrale eſt $\frac{a}{2b} \times l.\ z$.

La differentielle $\frac{4xxdx}{1-xx}$ se réduit à $-4dx + \frac{2dx}{1+x} + \frac{2dx}{1-x}$
770. $= \frac{4xxdx}{1-xx}$, dont l'integrale est $-4x + 2l1+x - 2l1-x =$ $-4x + 2l\frac{1+x}{1-x}$.

SECTION IV.

Où l'on explique l'usage du calcul integral pour trouver la rectification des courbes, leur quadrature, la mesure des solides formés par leur révolution, la mesure des surfaces courbes de ces solides, & la distance du centre de pesanteur.

METHODE.

795. LES principaux usages du calcul integral sont de faire découvrir les résolutions des Problêmes, dont on a donné les formules dans la troisiéme Section de la seconde Partie, par raport à chacune des courbes que l'on peut imaginer, geometriques, méchaniques, exponentielles. Pour cela il n'y a qu'à prendre, par le moyen de l'équation de chaque courbe, les valeurs des lettres des formules, & substituer ces valeurs à la place de ces lettres dans les formules, & par là elles deviendront propres à cette courbe, & elles exprimeront les élemens de sa longueur, de son aire, du solide formé par sa révolution, de la surface courbe de ce solide, de la distance du centre de pesanteur. Il faut ensuite trouver par les méthodes de cette troisiéme Partie les integrales de ces élemens, & elles seront les résolutions de ces Problêmes. On en donnera seulement ici quelques exemples en forme de Problêmes.

PROBLÊME I.

TROUVER la rectification des courbes par le moyen de la formule S. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

EXEMPLE I. POUR LES COURBES GEOMETRIQUES.

796. POUR mettre une infinité d'exemples en un seul, on cherchera la rectification des paraboles de tous les degrés, & des hyperboles de tous les degrés par raport à leurs asymptotes, par le moyen de la formule S. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & de

l'équation $1^{q-1}y = x^q$ qui eſt commune à toutes ces courbes, en prenant le parametre pour l'unité afin d'abreger le calcul. On a déja trouvé * que l'élement de toutes ces courbes étoit $\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{qqx^{2q-2}+1}$; il ne faut plus que trouver l'integrale de cet élement ; on la trouvera par la formule generale des integrales des differentielles binomes

* 591.

* S. $gx^m dx \times \overline{a+bx^n}^p = \frac{g}{n} \times \overline{a+bx^n}^{p+1} \times \frac{1}{s \times b} x^{m+1-n}$ * 682.
$- \frac{r-1}{s \times s-1} \times \frac{a}{b} x^{m+1-2n} + \frac{r-1 \times r-2}{s \times s-1 \times s-2} \times \frac{aa}{bb} x^{m+1-3n}$ — &c.

dans laquelle $\frac{m+1}{n} = r$, & $r+p = \frac{m+np+1}{n} = s$: En ſuppoſant $g = 1$, $a = 1$, $b = qq$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 0$, $n = 2q-2$, $r = \frac{1}{2q-2}$, $s = \frac{q}{2q-2} = r+p$; & ſubſtituant ces valeurs dans la formule, on trouvera S. $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}} = \frac{1}{2q-2} \times$
$\overline{1+qqx^{2q-2}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{s \times qq} x^{-2q+3} - \frac{r-1}{s \times s-1} \times \frac{1}{q^4} x^{-4q+5} +$
$\frac{r-1 \times r-2}{s \times s-1 \times s-2} \times \frac{1}{q^6} x^{-6q+7} - \frac{r-1 \times r-2 \times r-3}{s \times s-1 \times s-2 \times s-3} \times \frac{1}{q^8} x^{-8q+9}$
+ &c. C'eſt l'integrale de l'élement $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}}$, ou plutôt une formule pour trouver cette integrale ſelon les differens nombres qu'on mettra à la place de l'expoſant indéterminé q, qui repréſente tous les nombres.

Dans toutes les paraboles où $r = \frac{1}{2q-2}$ ſe trouvera égale à un nombre entier poſitif, l'integrale ſera finie & exacte comme on le voit par la formule même. Or en ſuppoſant q égale à une fraction dont le numerateur eſt un nombre impair quelconque au-deſſus de l'unité, comme 3, 5, 7, 9, &c. & dont le dénominateur eſt le nombre pair qui eſt moindre d'une unité que le numerateur, l'on aura toujours $r = \frac{1}{2q-2}$ égale à un nombre entier poſitif ; car ſuppoſant le dénominateur pair $= a$, le numerateur ſera $a+1$, & $q = \frac{a+1}{a}$; ce qui donnera $r = \frac{1}{2q-2} = \frac{a}{2a+2-2a} = \frac{a}{2}$, qui eſt un nombre entier, puiſque a eſt pair : ce qui fait appercevoir à l'eſprit une infinité de courbes geometriques compriſes ſous l'équation $1y = x^q$, (qu'on peut exprimer ainſi par raport à ces courbes, en ſuppoſant que a marque tout nombre pair poſitif, $1y^a = x^{a+1}$,) leſquelles courbes peuvent toutes être exactement rectifiées par le moyen de la formule qu'on vient de découvrir.

Si l'on prend pour exemple la ſeconde parabole cubique dont l'équation eſt $1y^2 = x^3$, où $q = \frac{3}{2}$, on trouvera la même rectification qu'on a déja * trouvée, qui eſt $\frac{1}{27} \times \overline{4+9x}^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$.

* 663.

Si l'on prend la parabole $1y^4 = x^5$ dans laquelle $q = \frac{5}{4}$, l'élement ſera $\sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\frac{25}{16}x^{\frac{2}{4}}}$, & $r = 2$, $s = \frac{5}{2}$; & faiſant la ſubſtitution des valeurs de r, s, q dans la formule, on trouvera l'integrale $2 \times \overline{1+\frac{25}{16}x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1024}{9375}$.

* 664.

Pour avoir l'integrale complete * il faut ſuppoſer $x = 0$, ce qui donnera (en réduiſant au même dénominateur les grandeurs qui ſont ſous le ſigne du commun multiplicateur, ce qui le changera en $2 \times \frac{\overline{16+25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}}}{16^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{64} \times \overline{16+25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}}$) $-\frac{1024}{9375} \times \frac{2}{64} \times 64 = -\frac{2048}{9375}$, pour la grandeur conſtante qu'il faut ajouter ſous le ſigne oppoſé $+$ à l'integrale qu'on a trouvée, afin qu'elle ſoit complete. La longueur d'un arc de la parabole $1y^4 = x^5$, dont la coupée eſt telle partie de l'axe qu'on voudra être marquée par x, ſera donc $\frac{1}{32} \times \overline{16+25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1024}{9375} + \frac{2048}{9375} = \frac{1}{32} \times \overline{16+25x^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} \times \frac{32}{125}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1024}{9375}$.

L'on doit remarquer que l'on peut trouver de même, dans les autres paraboles dont on découvrira la rectification par la formule, la quantité conſtante qu'il faudra ajouter ſous un ſigne oppoſé à l'integrale trouvée, afin qu'elle ſoit complete.

AVERTISSEMENT.

LES Lecteurs qui commencent, peuvent faire tant d'exemples qu'il leur plaira ſur les paraboles plus élevées dont on peut trouver la rectification exacte. Celui que l'on vient d'expliquer ſuffit pour leur faire voir la maniere dont on trouve les integrales exactes par les méthodes que l'on a données, des differentielles qui ſont les élemens de la recti-

fication des courbes, lorſque ces differentielles peuvent avoir des integrales exactes par ces méthodes.

On va leur faire voir, à l'égard des autres paraboles, dont on ne peut pas trouver, par les méthodes que l'on a données, les integrales exactes qui en expriment les rectifications, la maniere de diſtinguer quelles ſont celles dont on peut avoir les integrales finies en ſuppoſant la rectification de la parabole du premier genre $1y = x^{\frac{1}{2}}$, qui eſt exprimée par S. $\sqrt{dx^2+dy^2} =$ S. $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \times \sqrt{1+4x}$, & la maniere de trouver ces integrales finies, par les méthodes que l'on en a données. *

7. Pour cela, 1°. il faut transformer l'élement general de la rectification des paraboles $dx\sqrt{1+qqx^{2q-2}}$ en un autre qui appartienne à la parabole ſimple, c'eſt-à-dire, dont les quantités qui ſont ſous le ſigne ſoient, la premiere l'unité ou une conſtante; & que dans la ſeconde, la changeante ne ſoit que lineaire. Cette transformation * ſe fera en ſuppoſant $x^{2q-2} = u$, d'où l'on déduira $du = \overline{2q-2} \times x^{2q-3}dx$; & faiſant enſuite cette proportion $\overline{2q-2} \times x^{2q-3}dx.\ dx :: \overline{1+qqx^{2q-2}}^{\frac{1}{2}}.\ \frac{\overline{1+qqx^{2q-2}}^{\frac{1}{2}}}{\overline{2q-2} \times x^{2q-3}}$; & ſubſtituant u à la place de x dans le quatriéme terme, & multipliant la quantité qui en viendra par du, on trouvera $\frac{1}{2q-2} \times u^{-\frac{2q+3}{2q-2}}du \times \overline{1+qqu}^{\frac{1}{2}}$ pour la differentielle transformée dont l'integrale eſt égale à l'integrale de l'élement propoſé. Or il eſt évident que cette differentielle ſeroit l'élement de la rectification d'une parabole ſimple, ſi l'expoſant $-\frac{2q+3}{2q-2}$ de la changeante u hors du ſigne étoit égal à $-\frac{1}{2}$; & qu'en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple $\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+4u}^{\frac{1}{2}}$, on pourra y réduire l'integrale de $\frac{1}{2q-2}u^{-\frac{2q+3}{2q-2}}du \times \overline{1+qqu}^{\frac{1}{2}}$, par les méthodes expliquées dans les articles 694 & 721, dans tous les cas où l'expoſant $-\frac{2q+3}{2q-2}$ pourra devenir égal à $-\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$, à $-\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}$, à $-\frac{1}{2}+3 = \frac{5}{2}$, &c.

* 694 & 721.

* 737.

c'eſt-à-dire dans tous les cas où l'on pourra faire en ſorte que cet expoſant ſoit ſucceſſivement égal à chacun des termes de la ſuite infinie $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. Il faut donc chercher quelle doit être la valeur de q, afin que cela arrive. Il n'y a qu'à ſuppoſer $2 = a$, & que l'indéterminée n repreſente tel nombre entier poſitif qu'on voudra, y comprenant l'unité & zero, & il eſt évident que $\frac{na+1}{a}$ repreſentera tel terme qu'on voudra de la ſuite $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, &c. Il faut ſuppoſer $-\frac{2q+3}{2q-2} = \frac{na+1}{a}$, ce qui donnera $q = \frac{2na+3a+2}{2na+2a+2} =$ (en remettant au lieu de a ſa valeur 2) $\frac{2n+4}{2n+3}$. Si l'on ſuppoſe à preſent l'indéterminée n égale ſucceſſivement à 0, 1, 2, 3, 4, &c. on aura q ſucceſſivement égal à $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}$, &c. ainſi, en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple, on pourra trouver la rectification finie de toutes les paraboles à l'infini où l'expoſant q ſera égal à une fraction quelconque dont le numerateur ſera un nombre pair, & le dénominateur le nombre impair qui eſt moindre d'une unité que le numerateur : car alors l'élement $\frac{1}{2q-2} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$, commun à toutes ces paraboles, qui en exprime un arc infiniment petit, deviendra ſucceſſivement $\frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{16}{9}u}$, $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$, $\frac{7}{2} u^{\frac{5}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{64}{49}u}$, &c. & l'on peut en trouver les integrales finies en ſuppoſant la rectification de la parabole ſimple ; mais comme ces differentielles particulieres ſuppoſent chacune la rectification d'une parabole ſimple particuliere qui lui eſt propre, c'eſt-à-dire, dont le parametre eſt déterminé, il faut encore enſeigner à ceux qui commencent, comment on peut trouver une expreſſion indéterminée du parametre de toutes ces paraboles ſimples qui convienne à toutes, & qui devienne particuliere par la ſeule détermination de l'expoſant indéterminé q.

Pour la trouver, je remarque que l'élement de la rectification d'une parabole ſimple, dont le parametre eſt marqué
* 591. en general par p, eſt * $\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1p+4u}$, qui me fait voir que le ſecond terme $4u$ de la grandeur complexe qui eſt ſous le ſigne, ayant pour conſtante 4, le premier terme $1p$ con-

tient le parametre p multiplié par l'unité. Je connois par là qu'en réduiſant la differentielle $\frac{1}{2q-2} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$ à avoir ſous le ſigne $4u$ au lieu de qqu, (en le faiſant de ſorte que cela ne change point la valeur de la differentielle,) la grandeur conſtante qui par cette operation ſera le premier terme ſous le ſigne, ſera auſſi le parametre de la parabole ſimple que je cherche. Or pour trouver la quantité dont il faut me ſervir pour réduire qqu à $4u$, je ſuppoſe $zqq = 4$, ce qui me donne $z = \frac{4}{qq}$, & $\frac{4}{qq}$ eſt la quantité par laquelle multipliant les termes qui ſont ſous le ſigne, je réduirai qqu à $4u$, & diviſant en même temps la quantité hors du ſigne par $\sqrt{\frac{4}{qq}} = \frac{2}{q}$, la differentielle nouvelle ſera équivalente à la premiere, & elle ſera $\frac{1}{\frac{2q-2}{2}} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{\frac{1\times 4+4qqu}{qq}}$: Elle me fait connoître que $\frac{4}{qq}$ eſt l'expreſſion indéterminée du parametre que je cherche : ainſi l'expreſſion de la parabole ſimple ſera (nommant ſon ordonnée z & ſa coupée u) $zz = \frac{4}{qq} u$, ou $z = \frac{2}{q} u^{\frac{1}{2}}$; l'élement de ſa rectification ſera $\frac{1}{q} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+qqu}$.

D'où l'on voit que la rectification S. $\frac{1}{q} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+qqu}$ de la parabole ſimple, dont $\frac{4}{qq}$ eſt le parametre, étant ſuppoſée, l'on peut trouver la rectification finie de toutes les paraboles dont l'élement de la rectification eſt repreſenté par $\frac{1}{2q} u^{-\frac{2q+3}{2q-2}} du \times \sqrt{1+qqu}$, en ſuppoſant que q eſt ſucceſſivement égal à chacun des termes de la ſuite $\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}$, &c.

98. Par exemple on veut chercher la rectification de la parabole $1y^5 = x^6$, où $q = \frac{6}{5}$, on trouve* que l'élement de ſa rectification eſt $dx\sqrt{1+\frac{36}{25}x^{\frac{2}{5}}}$; que ſa transformée eſt* (en ſuppoſant $x^{\frac{2}{5}} = u$) $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$; que la parabole ſimple dont il faut ſuppoſer la rectification pour avoir celle de la propoſée, eſt $z = \frac{10}{6} u^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3} u^{\frac{1}{2}}$, dont le parametre $\frac{4}{qq}$ eſt $\frac{4\times 25}{36} = \frac{25}{9}$; que la rectification de celle qu'il faut ſuppoſer eſt* S. $\frac{5}{3} u^{-\frac{1}{2}} du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$.

* 592. * 737. * 591.

Pour trouver cette rectification finie, on peut se servir de
* 694. la * 3e formule des integrales des differentielles binomes, ou
* 721. du premier Problême * de la seconde Section, en remarquant, si l'on se sert du premier Problême, que chaque terme de l'integrale qu'on cherche doit ajouter à l'exposant $-\frac{1}{2}$ de $u^{-\frac{1}{2}}$ qui est hors du signe, le premier l'unité, parceque n de la formule ou du premier Problême est ici l'unité, ce qui fera changer $-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2}$; le second terme doit encore ajouter une unité, ce qui changera $-\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$. Ainsi si l'on se
* 721. sert du premier Problême *, il faut faire deux operations;
* 694. & en se servant de la troisiéme formule *, (par où l'on va commencer ici,) il faut prendre les deux premiers termes de la formule, qui donneront les deux premiers termes exacts de l'integrale qu'on cherche, & le terme qui les suit distingué par une parenthese, & marqué B; il finira l'integrale qu'on cherche par la supposition de la rectification donnée. Ce qui détermine à prendre ces trois termes est l'exposant $+\frac{1}{2}$ de $u^{\frac{1}{2}}$ de la transformée, qui devant baisser d'une unité à chaque terme, parceque n de la formule est égale à $1 = \frac{2}{2}$, l'on voit qu'il faut qu'il baisse de 2 ou de $\frac{4}{2}$ pour devenir $-\frac{1}{2}$ qui est l'exposant de $u^{-\frac{1}{2}}$ dans la rectification supposée de la parabole simple; d'où l'on voit aussi que c'est le terme $\frac{m+1-n}{m+1+np} \times \frac{m+1-2n}{m+1+np-n} \times \frac{aa}{bb} \times \text{S.}\, g u^{m-2n}\, du \times \overline{a+bu^n}^{p}$,
* 694. qu'il faut prendre dans la troisiéme formule * pour déterminer la valeur de m. En voici l'operation.

1°. Il faut supposer que l'élement de la rectification de la parabole simple $\frac{5}{6} u^{-\frac{1}{2}}\, du \times \sqrt{1+\frac{36}{25}u}$, (laquelle a pour parametre $\frac{4}{m} = \frac{4\times 25}{36} = \frac{25}{9}$) est representé par $g u^{m-2n}\, du \times \overline{a+bu^n}^{p}$; ainsi $g = \frac{5}{6}$, $a = 1$, $b = \frac{36}{25}$, $p = \frac{1}{2}$, $n = 1$, $m-2n = m-2 = -\frac{1}{2}$, ce qui détermine $m = -\frac{1}{2}+2 = \frac{3}{2}$.

2°. Il faut substituer ces valeurs dans le commun multiplica-
* 694. teur des termes de la troisiéme formule * qui sont des integrales exactes, lequel est $g \times \overline{a+bu^n}^{p+1}$, qu'on a nommé u dans la formule, il devient par ces substitutions $\frac{5}{6} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$.

3°. Il faut aussi substituer ces mêmes valeurs dans les deux premiers

premiers termes exacts de la formule, & dans le terme B de la rectification ſuppoſée qui les ſuit, & l'on trouvera $\frac{5}{6} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{3} \times \frac{25}{36}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \times \frac{25\times25}{36\times36}u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \times \frac{25\times5}{36\times36} \times S.\ \frac{5}{6}u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$.

Mais comme la transformée a pour coéficient $\frac{5}{2}$, & que l'élément de la rectification ſuppoſée n'a pour coéficient que $\frac{5}{6}$, la quantité qu'on vient de trouver n'eſt l'intégrale que de $\frac{5}{6}u^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$; ainſi il faut encore la multiplier par le nombre 3; (car multipliant $\frac{5}{6}$ par 3, le produit ſera $\frac{5}{2}$,) & enſuite elle ſera l'intégrale que l'on cherchoit de la transformée, & par conſéquent de la différentielle propoſée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Pour découvrir la même intégrale de la transformée $\frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$ par le premier Problême de la ſeconde Section *, on ſuppoſera que cette transformée eſt repréſentée par le terme $cu^{m+2n}du \times K^p$; (la changeante u eſt miſe ici pour la changeante x du 1er Problême) que $K = 1+\frac{36}{25}u$, $p = \frac{1}{2}$, $c = \frac{5}{2}$, $n = 1$, $m+2n = \frac{3}{2}$, & par conſéquent $m = -\frac{1}{2}$; que l'élément de la rectification ſuppoſée $\frac{5}{6} \times u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}}$, eſt repréſenté par le terme $au^m du K^p$; ainſi $K^p = \overline{a+bu^n}^p = \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}$; $m = -\frac{1}{2}$; mais on ôtera le coéficient $\frac{5}{6}$ juſqu'à la fin de l'opération, pour mettre à ſa place le coéficient indéterminé a, la méthode du premier Problême le demandant ainſi; l'on a donc pour la rectification ſuppoſée $au^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{1}{2}} = au^m du K^p$. Il faut faire deux opérations; par la premiére on trouvera l'intégrale du terme $bu^{m+1n}du \times K^p = bu^{\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^2}^{\frac{1}{2}}$; par la ſeconde on trouvera l'intégrale du terme $cu^{m+2n}du \times K^p = cu^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}$.

Pour faire la premiére opération, on prendra l'intégrale $u^{m+1}K^{p+1} = u^{\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$; on en écrira la différentielle,

* *Liſez le premier Problême* 721.

qui eſt . . . $\left.\begin{array}{r} \overline{m+1} \times a + \overline{m+1}\, bu^n \\ + \overline{p+1}\, nbu^n \end{array}\right\} du \times u^m K^p$;

On en ôtera la différentielle ſuppoſée . . $-a$

mettant les valeurs, la même différentielle ſera $\left.\begin{array}{r} +\frac{1}{2}+2\times\frac{36}{25}u \\ -a \end{array}\right\} du \times u^{-\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{p}{2}}$.

On ſuppoſera le premier terme de la différentielle totale $= 0$; ce qui donnera, 1°. $a = \frac{1}{2}$; 2°. $u^{\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,S.u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}$ pour l'intégrale de la différentielle $2\times\frac{36}{25}u^{\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}$. On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $2\times\frac{36}{25}$ de la différentielle, & on multipliera les quotiens par b, & l'on aura $\frac{bu^{\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}b \times S.\, u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}}{2\times\frac{36}{25}}$

pour l'intégrale de la différentielle $bu^{\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}$. Le coéficient b eſt indéterminé.

Pour faire la ſeconde opération, on prendra l'intégrale $u^{m+1+n}K^{p+1} = u^{\frac{3}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u}^{\frac{3}{2}}$. On en écrira la différentielle, qui eſt . $\left.\begin{array}{r} \overline{m+1+n} \times a u^n + \overline{m+1+n}\, bu^{2n} \\ + \overline{p+1}\, nbu^{2n} \end{array}\right\} du \times u^m K^p$

On en ôtera la différentielle . . $-bu^n$

en mettant les valeurs, la même différentielle ſera $\left.\begin{array}{r} +\frac{3}{2}u^1+3\times\frac{36}{25}u^2 \\ -bu^1 \end{array}\right\} du \times u^{-\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u^2}^{\frac{p}{2}}$.

On ſuppoſera le premier terme de la différentielle totale $= 0$; ce qui donnera, 1°. $b = \frac{3}{2}$; 2°. $u^{\frac{3}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{3}{2}}$

$$- \frac{\frac{3}{2} \times u^{\frac{1}{2}} \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times S.\, u^{-\frac{1}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{1}{2}}}{2\times\frac{36}{25}}$$

pour l'intégrale de la différentielle $3\times\frac{36}{25}u^{\frac{3}{2}}du \times \overline{1+\frac{36}{25}u^1}^{\frac{p}{2}}$.

On diviſera l'une & l'autre par le coéficient $3 \times \frac{36}{25}$ de la différentielle, & on multipliera les quotiens par le coéficient c de $c \times u^{m+2n} du \times K^p = \frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u^1}^{\frac{1}{2}}$, & le premier produit ſera l'intégrale de la différentielle transformée $\frac{5}{2} u^{\frac{3}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u^1}^{\frac{1}{2}}$, laquelle ſera le ſecond produit. *Ce qu'il falloit trouver.*

Mais afin que les Lecteurs qui commencent, voyent le raport de la formule à la méthode du premier Problême de la ſeconde Section, ils ne multiplieront d'abord les quotiens que par $\frac{5}{6}$, & faiſant le calcul, ils trouveront préciſément l'intégrale qu'on a trouvée ci-deſſus par la formule, $\frac{5}{6} \times \overline{1 + \frac{36}{25} u}^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{3} \times \frac{25}{36} u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \times \frac{25}{36} \times \frac{25}{36} u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} \times \frac{25}{36} \times \frac{25}{36} \times \text{S.} \frac{5}{6} \times u^{-\frac{1}{2}} du \times \overline{1 + \frac{36}{25} u}^{\frac{1}{2}}$; Enfin ils la multiplieront par 3, (parceque $3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{2}$, qui eſt le coéficient de la transformée,) & le produit ſera l'intégrale de la transformée, *qu'il falloit trouver.*

D'où l'on peut voir le parfait raport de la méthode du premier Problême de la ſeconde Section, * avec la formule générale des binomes. * *721. *694.

AVERTISSEMENT.

CEUX qui commencent pourront, s'ils veulent ſe rendre les méthodes familiéres, chercher la rectification finie des autres paraboles, qui en peuvent avoir en ſuppoſant donnée la rectification de la parabole ſimple. On eſt entré dans cet exemple dans le détail de toutes les démarches que fait l'eſprit pour trouver ces intégrales par les méthodes qu'on a données, afin de leur apprendre la maniére d'en faire de ſemblables dans tous les Problêmes qu'ils voudront réſoudre par le calcul intégral & l'uſage de ces méthodes, & afin qu'ils puiſſent d'eux-mêmes faire des exemples, pour ſuppléer à ceux qu'on eſt obligé de paſſer dans ce huitiéme Livre, pour ne pas le rendre trop long.

EXEMPLE II. SUR LA CYCLOÏDE.

799. *TROUVER la rectification de la Cycloïde.*

FIG. XXXV. SUPPOSANT $AE = a$, $AB = x$, BF sera* $= \sqrt{ax - xx}$;
* 288. supposant aussi l'arc $AF = z$, $Bf = y$, l'arc $Af = u$,
* 455. l'équation de la cycloïde sera* $y = z + \sqrt{ax - xx}$, d'où l'on déduira $dy = dz + \frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - xx}}$, où mettant au lieu de dz sa
* 588. valeur* $\frac{adx}{2\sqrt{ax - xx}}$, l'on aura $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{ax - xx}}$, d'où l'on tirera $dy^2 = \frac{a - 2x + x^2 \times dx^2}{a - x \times x}$; ce qui donnera $dy^2 + dx^2 = \frac{a - 2x + x^2 \times dx^2 + a - 2x \times x \times dx^2}{a - x \times x}$
* 582. $= \frac{a}{x} dx^2$; ainsi $fH\,(du)$* $= \sqrt{dy^2 + dx^2} = dx \times a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$;
* 653. prenant les intégrales*, l'on aura l'arc $Af\,(u) = 2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$
* 288. $= 2\sqrt{ax}$. Mais $\sqrt{ax}$* est la valeur de la corde AF; d'où l'on voit que l'arc $Af\,(u)$ d'une cycloïde est double de la corde correspondante AF $(\sqrt{ax})$ du cercle générateur; ce qu'on a
* 510. déja démontré par une autre voye*. En supposant que $AB\,(x)$ devient le diametre $AE\,(a)$; c'est-à-dire, en mettant a au lieu de x dans $u = 2\sqrt{ax}$, l'on trouve que l'arc entier $AfD\,(u)$ de la cycloïde est égal à $2a$, c'est-à-dire au double du diametre $AE\,(a)$.

PROBLÊME II.

800. *TROUVER la quadrature des courbes par le moyen de la formule* S. $y\,dx$.

* 598. ON a déja donné la quadrature des paraboles* & des hyperboles de tous les genres. Voici d'autres Exemples.

EXEMPLE I.

801. *TROUVER la quadrature de l'espace* ABC *ou* ABc *de la courbe géométrique* ACa, *dont (les coupées* AB *étant nommées* x, *les ordonnées* BC *perpendiculaires aux coupées étant* y, *& supposant une ligne droite donnée qu'on nommera* a,*) l'équation est* $x^3 + y^3 = axy$.
FIG. LII.

COMME l'on ne peut pas séparer y dans cette équation, c'est-à-dire, trouver une valeur de y où il n'y ait de chan-

geante que x ſans réſoudre une équation irreductible du troiſiéme degré, il faut mettre une autre expreſſion changeante à la place de y, qui ſoit égale à y, & qui ſoit telle qu'on puiſſe ſéparer les changeantes de l'équation. Il y a pluſieurs maniéres de le faire ; il ſuffit d'en mettre ici une. On peut ſuppoſer $y = \frac{axz}{zz}$; & ſubſtituant cette valeur de y à ſa place dans l'équation, elle deviendra $a^3x^3 = aaz^4 - z^6$; d'où l'on aura $x^3 = \frac{aaz^4 - z^6}{a^3}$; prenant les différences, l'on trouvera $xxdx = \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3}$; & à cauſe de $y = \frac{a}{zz} \times xx$, l'on aura $ydx = \frac{axx}{zz}dx = \frac{a}{zz} \times \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3a^3} = \frac{4aaz^3dz - 6z^5dz}{3aa}$. C'eſt l'élément de l'aire ABC ou ABc. En prenant * les intégrales, on trouvera S. $ydx = \frac{1}{3}zz - \frac{z^4}{2aa}$; c'eſt la quadrature de l'eſpace ABC ou ABc, qu'on réduira, (en mettant au lieu de zz ſa valeur ſuppoſée $\frac{axx}{y}$,) à $\frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy} =$ S. ydx ; c'eſt à-dire, qu'en mettant dans cette intégrale les valeurs déterminées de x & de y, qui conviennent à tel point de la courbe qu'on voudra, elle deviendra l'expreſſion toute connue de l'eſpace ABC ou ABc compris entre l'arc de la courbe AC ou Ac, la coupée AB, & l'ordonnée AC ou Ac. Par exemple on verra dans les remarques ſuivantes, qu'au point a, $Ab\,(x) = \frac{1}{2}a$, & que ba (y) eſt auſſi égale à $\frac{1}{2}a$; ſubſtituant ces valeurs de x & de y dans l'intégrale, l'on aura S. $ydx = \frac{2axx}{3y} - \frac{x^4}{2yy} = \frac{5}{24}aa$ pour l'expreſſion de l'eſpace $AEabA$; d'où ôtant le triangle rectangle $Aab = \frac{1}{8}aa$, il reſtera $\frac{1}{12}aa$ pour la valeur de l'eſpace $AEaA$; ainſi le double de cet eſpace, c'eſt-à-dire $AEaCA = \frac{1}{6}aa$.

* 595.
* 653.

REMARQUES.

Où l'on fait voir l'utilité de l'Analyſe, par raports aux lignes courbes.

I.

602. CETTE courbe, dont l'équation eſt $x^3 + y^3 = axy$, eſt très-propre pour faire clairement concevoir, & comme ſentir aux Lecteurs qui commencent, la grande utilité de l'Analyſe pour découvrir tout ce que l'on peut deſirer de ſçavoir d'une courbe, & en même tems le parfait accord de l'Analyſe avec la Géométrie. FIG. LII.

Car, 1°. ſuppoſant $AB\,(x) = 0$, il eſt évident que $BC\,(y)$

$= o$, ainſi le point A eſt l'origine de la courbe, ou l'origine des coupées & des ordonnées.

II.

803. 2°. Les changeantes x & y étant préciſément de la même maniére dans l'équation, tout ce qui convient à l'une, convient auſſi à l'autre : d'où il eſt évident que ſi l'on tire DAf par A perpendiculaire à AB, & qu'on prenne les $AD(y)$ égales aux $AB(x)$, & qu'on mene les perpendiculaires DE, De, à AD; & BC, Bc perpendiculaires à AB, les unes & les autres juſqu'à la courbe; il eſt, dis-je, évident que $DE(x) = BC(y)$; & de même que $De(x) = Bc(y)$: Que ces ordonnées égales, à cauſe des perpendiculaires égales AB, AD, feront deux à deux un quarré $ADGB$; & que la diagonale AGa, commune à tous ces quarrés, partagera en deux également la courbe $AEaCA$, & fera au point A un angle demi droit avec chacune des lignes des coordonnées AB, AD.

III.

804. 3°. Pour trouver la valeur de $Ab(x)$ & de $ba(y)$ au point a, où la courbe coupe la droite Aa, il eſt clair qu'à ce point a, $ba(y)$ & $da = Ab(x)$, doivent être égales; ainſi ſuppoſant $x = y$ dans l'équation de la courbe, elle deviendra au point a, $2x^3 = axx$, d'où l'on déduit $Ab(x)$, & $ba(y)$, chacune égale à $\frac{1}{2}a$. Par conſéquent l'hypotenuſe $Aa = \sqrt{\frac{1}{2}aa} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$. D'où il ſuit qu'en tirant par (a) la perpendiculaire AP à la ligne Aa, juſqu'à la rencontre P de AB prolongée, le triangle AaP, rectangle en a, ſera iſocelle, à cauſe de l'angle demi droit aAP; ainſi $Aa = aP = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, d'où l'on aura $AP = \sqrt{\overline{2Aa^2}} = \sqrt{aa} = a$; par conſéquent AP eſt égale à la grandeur connue a, qui eſt ſuppoſée dans l'équation de la courbe.

IV.

805. 4°. Pour connoître toutes les branches de la courbe & leur ſituation, par raport aux coordonnées $AB(x)$, $BC(y)$, on remarquera, 1°. que ſi l'on ſubſtitue dans l'équation de la courbe $x^3 + y^3 - axy = o$, une grandeur poſitive, comme $\frac{1}{4}a$, moindre que $Ab = \frac{1}{2}a$, à la place de x, l'équation deviendra $y^3 - \frac{1}{4}aay + \frac{1}{64}a^3 = o$, qui eſt une équation du

troiſiéme dégré, où les trois valeurs de y ſont réelles & inégales ; (car $\frac{1}{27}p^3$ ſurpaſſe $\frac{1}{4}qq$*), & deux de ces valeurs ſont poſitives, & la troiſiéme valeur eſt négative, & égale à la ſomme des deux autres*. De même ſi l'on ſubſtitue la valeur de $Ab\ (x) = \frac{1}{2}a$ au point a, dans l'équation de la courbe, elle deviendra pour le point a, $y^3 - \frac{1}{2}aay + \frac{1}{8}a^3 = 0$, qui étant diviſée par $y - \frac{1}{2}a = 0$, donne pour quotient l'équation du ſecond degré $yy + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{4}aa = 0$, dont la racine poſitive eſt $y = -\frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}aa}$; & la négative eſt $-y = -\frac{1}{4}a - \sqrt{\frac{5}{16}aa}$. Tout cela fait voir que la courbe a trois branches par raport à chaque coupée poſitive $AB\ (+x)$; les deux valeurs poſitives de y déterminent les ordonnées BC, Bc des points dont la ſuite forme les deux branches de la courbe ACa, Aca qui ſont au-deſſus de AB ; la valeur négative de y, qui eſt toujours égale à la ſomme des deux poſitives, exprime l'ordonnée Bc qui ſe termine à la troiſiéme branche de la courbe Acc, qui eſt au-deſſous de AB, & l'on voit auſſi* que AB eſt l'axe de la courbe entiére. Mais, 2°. on peut concevoir les branches, que forment les y poſitives, auſſi formées par les x poſitives ; & le point a eſt commun aux deux branches formées, l'une par les y poſitives, l'autre par les x poſitives ; car au point a, $x = \frac{1}{2}a = y$; cela fait voir que ces deux branches forment une courbe qui rentre en elle-même, & qui renferme une eſpace ; & cependant l'ordonnée ab (y) du point a, rencontrant encore la courbe au point C, puiſque ab (y) a deux valeurs poſitives, il eſt évident qu'il y a encore des ordonnées poſitives y qui rencontrent la courbe au-delà de l'ordonnée ba. 3°. Pour trouver la plus éloignée des y poſitives, & en même tems la plus grande $AB\ (x)$ des coupées poſitives, on remarquera que cette derniére y doit toucher la courbe ; car il eſt clair que les ordonnées qu'on peut imaginer au-delà de celle qui touche la courbe, ne la rencontrent plus, étant paralleles à l'ordonnée qui la touche. Or au point où l'ordonnée y eſt tangente, dy* eſt infinie par raport à dx ; ainſi prenant les différences de l'équation $x^3 + y^3 - axy = 0$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - ay}{-3yy + ax}$; & ſuppoſant $\frac{dy}{0}$, l'on aura $-3yy + ax = 0$; ce qui donne $yy = \frac{1}{3}ax$, & $y = \sqrt{\frac{1}{3}ax}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra (comme on le trouvera facilement par

*80 & 82.

*79 & 80.

*357.

*556.

le calcul) $x^3 = \frac{4}{27}a^3$, d'où l'on tirera $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, pour la valeur de la plus grande x, qui eſt la coupée de l'ordonnée poſitive y tangente de la courbe la plus éloignée des y poſitives. 4°. Pour trouver la valeur de cette y qui eſt tangente de la courbe, il ne faut que ſubſtituer au lieu de x ſa valeur $\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$ dans $x^3 + y^3 - axy = 0$, & l'on aura l'équation $y^3 - \frac{1}{3}aay\sqrt[3]{4} + \frac{4}{27}a^3 = 0$, dans laquelle y a deux valeurs poſi-
*81. tives égales (car $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ * ;) & de plus il eſt viſible que les deux points C, c, (où les deux y poſitives qui conviennent à une même coupée x, rencontrent la courbe,) ſe réuniſſent au point où y touche la courbe ; & une valeur négative égale à la ſomme des deux poſitives, laquelle valeur négative eſt celle de $-y$, qui eſt l'ordonnée de la branche de deſſous Acc qui convient à la même coupée $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$. On trou-
*85. vera aiſément * que les deux valeurs poſitives de y ſont chacune $y = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, & que la valeur négative eſt $y = -\frac{2}{3}a\sqrt[3]{2}$. 5°. Si l'on ſubſtitue à la place de x dans l'équation de la courbe $x^3 + y^3 - axy = 0$, une grandeur poſitive qui ſurpaſſe la plus grande $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$, par exemple $+a$, l'équation $y^3 - aay + a^3 = 0$ aura deux valeurs de y imaginai-
*83. res (car $\frac{1}{27}p^3$ eſt moindre que $\frac{1}{4}qq$ *,) & une ſeule valeur réelle de y, c'eſt-à-dire, qu'il n'y a plus de branches de la courbe au-deſſus de AB ; mais que la branche Acc qui eſt au-deſſous, & dont les ordonnées y ſont négatives, continue toujours. 6°. Si l'on veut voir quelles ſont les branches de la courbe qui ont raport aux coupées négatives AF $(-x)$ qui vont du côté oppoſé de l'origine A des x ; alors l'équation de la courbe ſera $y^3 + axy - x^3 = 0$, laquelle fait voir qu'en ſubſtituant à la place de x une quantité conſtante, l'équation déterminée qui en viendra n'aura qu'une ſeule va-
*80. leur réelle de y, & les deux autres ſeront imaginaires * à cauſe de $+axy$. Ainſi la courbe aura une 4e branche Aee, par raport aux x négatives, dont les ordonnées ſeront les valeurs réelles des y de l'équation précédente. Mais comme en prenant les coupées ſur AD (y), & les ordonnées DE, De, De (x) paralléles à AB, l'on trouveroit les trois branches AEa, ACa, Aee formées par les ordonnées x : Les deux premiéres ſont les mêmes que l'on a trouvées pour les valeurs poſitives des ordonnées y, en prenant les x pour les coupées ; & la troiſiéme eſt ſemblable à la troiſiéme Acc des ordonnées négatives

tives y, & la même que la quatriéme qu'on vient de marquer être formée par les valeurs réelles des y dans l'équation $y^3 + axy - x^3 = 0$, où les x ſont négatives.

V.

106. 5°. La même équation de la courbe ſert à en trouver les tangentes & toutes les autres propriétés. On ne fera voir ici que la maniére de trouver les tangentes de la branche Aee, qui a raport aux x négatives AF, parcequ'elle ſervira à trouver l'aſymptote de cette branche Aee, & de la branche Acc qui lui eſt entiérement ſemblable, & qui a raport aux y négatives Af priſes pour coupées. Ainſi ſuppoſant les coupées $AF = -x$, & les ordonnées $Fe = y$, l'équation de la courbe Aee eſt $y^3 - x^3 = -axy$; en prenant les différences on aura $3yydy + axdy = 3xxdx - aydx$, ce qui donnera $\frac{dx}{dy} = \frac{3yy+ax}{3xx-ay}$; d'où l'on déduira $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3+axy}{3xx-ay} = FS = S$, c'eſt la ſoutangente. On déduira de $FS\,(S)$ $\frac{3y^3+axy}{3xx-ay}$, $AS = -AF + FS = -x + S = \frac{-3x^3+axy+3y^3+axy}{3xx-ay} =$ (en mettant à la place de $3y^3 - 3x^3$ ſa valeur $-3axy$ priſe de l'équation de la courbe) $\frac{-axy}{3xx-ay}$, qu'on nommera $s = AS$.

V I.

107. 6°. Pour trouver l'aſymptote de cette branche Aee, on remarquera que l'aſymptote eſt une tangente de la courbe à l'infini, c'eſt-à-dire, à un point de la courbe infiniment éloigné de ſon origine A; ainſi y & x ſont chacune infinie au point touchant de l'aſymptote. Prenant donc la valeur de y dans l'équation $s = \frac{-axy}{3xx-ay}$, on trouvera $y = \frac{-3sxx}{ax-as} =$ (à cauſe que x étant infinie par raport à s, as doit être regardée comme zero par raport à ax) $\frac{-3sx}{a}$. Et mettant cette valeur de y dans l'équation de la courbe $y^3 - x^3 = -axy$, elle deviendra $-27s^3x^3 - a^3x^3 = +3a^3sxx$, ou bien $-27s^3x - a^3x - 3a^3s = 0$; & $3a^3s$ étant nulle par raport aux deux autres termes, à cauſe que x eſt infinie, l'équation ſera $-27s^3 = a^3$; d'où l'on déduira $s = -\frac{1}{3}a = AS$; c'eſt-à-dire la droite AS doit être égale à $-\frac{1}{3}a$ au point de la tangente infinie de la branche Aee. D'où l'on voit que ſi l'on prend, du côté des quantités négatives, $AK = \frac{1}{3}a$, le point K ſera l'un des points de l'aſymptote.

Pour trouver un ſecond point de l'aſymptote, il faut prolonger la tangente eS juſqu'à ce qu'elle rencontre DAT au point T, ce qui donnera les triangles ſemblables eFS, SAT; d'où l'on aura cette proportion $FS\ (\frac{3y^3+axy}{3xx-ay})\ .\ Fe\ (y) :: AS\ (\frac{-axy}{3xx-ay})\ .\ AT = \frac{-axyy}{3y^3+axy} = \frac{-axy}{3yy+ax}$, qu'on nommera t. Il faut prendre la valeur de x par le moyen de l'équation $\frac{-axy}{3yy+ax} = t$, & l'on trouvera $x = \frac{-3tyy}{a^2+at}$. Mais dans le cas où x & y ſont chacune infinie, c'eſt-à-dire, lorſque la tangente eſt infinie, le terme at eſt nul par raport au terme ay; ainſi par raport à l'aſymptote l'on aura $x = \frac{-3ty}{a}$. Il faut mettre cette valeur de x dans l'équation de la courbe, & elle deviendra $-27t^3y + a^3y = 3a^3t$. Et le terme $3a^3t$ étant nul, à cauſe que y eſt infinie par raport à t, cette équation ſera $-27t^3y + a^3y = 0$; d'où l'on tirera $t = -\frac{1}{3}a = AT$; c'eſt-à-dire, la ligne AT (t) doit être égale à $\frac{1}{3}a$ au point de la tangente infinie, ou de l'aſymptote de la branche Aee. D'où l'on voit que ſi l'on prend du côté des grandeurs négatives $Ak = \frac{1}{3}a$, le point k ſera un ſecond point de l'aſymptote; ainſi la ligne Kk ſera l'aſymptote de la branche Aee, & par conſéquent de la branche ſemblable Acc.

VII.

808. 7°. On fera remarquer ici qu'en ſuppoſant $\frac{dy}{0}$, l'on trouve
*805. l'équation * $x^6 - \frac{4}{27}a^3x^3 = 0$, dont les racines déterminent
Nomb. 3e. *les plus grandes* x; & l'on n'a pris que la valeur $x = \frac{1}{3}a\sqrt{4}$ pour déterminer la plus grande x dont l'on avoit beſoin; mais l'équation $x^6 - \frac{4}{27}a^3x^3 = 0$ donnant auſſi trois valeurs de $x = 0$, cela fait voir qu'à l'origine A où x eſt zero, il y a une tangente, parallele aux ordonnées y, des trois branches ACC, AEE, Acc, dont les ordonnées ſont les y, laquelle tangente eſt AD. L'on trouveroit de même en cherchant la plus grande y par la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$, ou ſimplement de $dy = 0$, trois valeurs de $y = 0$; ce qui feroit de même connoître qu'à l'origine A où y eſt zero, il y a une tangente, parallele aux x priſes pour les ordonnées, des trois branches ACC, AEE, Aee, dont les y ſont les coupées; laquelle tangente eſt AF. D'où l'on voit qu'à un même point A, qui eſt ici celui de l'origine, la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{0}$, & celle de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{dx}$, peuvent faire connoître quelles ſont

les valeurs des coordonnées au point A d'une courbe qui a plusieurs branches qui se coupent à ce même point A, dans le seul cas où les parties infiniment petites des branches de la courbe au point d'intersection A, sont paralleles aux coordonnées ; car dans ce cas les tangentes au point d'intersection A sont paralleles aux coordonnées, sçavoir, la petite partie de la branche AE, & la petite partie de la branche Acc au point A, sont partie de la tangente DAT paralleles aux ordonnées BC, Bc, $Bc\,(y)$. Ainsi dy est infinie par raport à dx au point A, eu égard à ces deux branches qui n'en font qu'une, & y s'y trouve avoir trois valeurs égales à zero ; & de même les petites parties des branches AC, Ae qui n'en font qu'une, sont au point A dans la tangente BAK de ces deux branches ; ainsi dx est infinie à ce point A, par raport à dy, eu égard à ces deux branches qui sont ensemble la même branche continuée. Ainsi quand on a dit, *art.* 554, *nomb.* 4 *à la fin*, & *art.* 559 *à la fin*, que dx & dy ne pouvoient pas être chacune égale à zero à un même point d'une courbe où la tangente est parallele à l'une des coordonnées, cela ne doit s'entendre à la rigueur que d'une même branche de courbe, & non pas de deux branches d'une même courbe, qui se couperoient de façon que les deux petits côtés de l'angle que font à ce point d'intersection les deux parties infiniment petites de chacune des branches, seroient paralleles aux coordonnées.

Cependant cette supposition alternative de $dy = 0$, de $dx = 0$ au même point d'une courbe, ne marque qu'il y a des tangentes paralleles des coordonnées au point d'intersection des branches d'une courbe, que dans le cas seul qu'on vient d'expliquer ; & pour ce seul cas, il y en a une infinité où les branches d'une même courbe se coupent de façon que les petites parties de chaque branche, au point d'intersection, ne sont pas paralleles aux coordonnées, & ainsi il n'y a à ce point d'intersection aucune tangente de la courbe parallele aux ordonnées ; ni par conséquent aucune *plus grande* ou *moindre* x, ni aucune *plus grande* ou *moindre* y. Mais comme on ne laisse pas de trouver à ce point d'intersection des valeurs de x & de y, en supposant alternativement $dy = 0$, $dx = 0$, à ce point d'intersection ; parcequ'il est évident qu'il doit y avoir au point d'intersection des branches d'une

courbe, des racines égales, c'eſt-à-dire, des valeurs égales de la changeante x, que la ſuppoſition de $dy = o$ fait découvrir; & des valeurs égales de la changeante y, que la ſuppoſition de $dx = o$ fait trouver, ces ſuppoſitions revenant à la multiplication des termes de l'égalité, par une progreſſion
* 74. arithmétique*: Cela eſt cauſe qu'on a exclu du nombre des marques qu'on peut avoir pour s'aſſurer s'il y avoit des tangentes paralleles aux coordonnées d'une courbe à un point de cette courbe, ou, ce qui revient au même, des *plus grandes*, ou des *moindres*, cette marque que dx & dy ſe trouvaſſent chacune égale à zero à un même point de la courbe, cette marque pouvant ſe trouver ſans qu'il y en ait, puiſqu'il n'y a qu'un ſeul cas où cela arrive, dont il faudroit être aſſuré avant cette marque, ainſi elle y ſeroit même inutile. Il y a alors un point d'interſection des deux branches d'une courbe, & non pas des tangentes paralleles aux coordonnées. On peut aiſément ſe convaincre de ce qu'on vient de faire remarquer en l'appliquant à l'équation de la même courbe rapportée à l'axe aAM, dont on va parler. Ainſi la marque aſſurée pour reconnoître les points d'une courbe où les tangentes ſont paralleles aux coordonnées, eſt que le raport $\frac{dx}{dy}$ ſoit toujours infini, ſoit que dx ſoit zero par raport à dy, ſoit que dy ſoit zero par raport à dx; & quand on trouve ce raport fini, il n'y a pas de ces ſortes de tangentes aux points où cela arrive; & quand il ſe trouve de zero à zero, on n'eſt pas aſſuré s'il y en a, ou ſi c'eſt ſimplement un point d'interſection, & l'on ſçait ſeulement qu'il y a à ce point là des valeurs égales de x & de y.

VIII.

809. 8°. On peut rapporter les points de toutes les branches de la même courbe à l'axe Aa, qui coupe l'angle droit DAB en deux demi droits à l'origine A, de maniére que prenant les coupées AH ſur cet axe Aa, les perpendiculaires HC, HE à cet axe ſoient les ordonnées des branches $ACCa$, $AEEa$, & que prolongeant cet axe vers mM, (ce qui rendra cette partie de l'axe négative,) me, mc ſoient les ordonnées des autres branches Aee, Acc. Pour avoir l'équation de la courbe qui convient à ce nouvel axe Aa, on nommera les coupées AH (u), & les ordonnées HC (z), &

l'on remarquera qu'à cauſe des angles demi droits des triangles rectangles AHI, ABG, BCI, HCG, qui rendent égaux les deux côtés de chacun qui comprennent l'angle droit, l'on aura $AH(u) = HI = HC(z) + CI$; & CI étant égale à $\sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BI}^2} = \sqrt{2\overline{CB}^2} = \sqrt{2yy} = y\sqrt{2}$, l'on aura $AH(u) = HC + CI = z + y\sqrt{2}$; d'où l'on tirera $y = \frac{u-z}{\sqrt{2}}$. L'on aura de même $AB(x) = BG = BC(y) + CG$; & CG étant égale à $\sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{HG}^2} = \sqrt{2 \times \overline{HC}^2} = z\sqrt{2}$, l'on aura $x = y + z\sqrt{2}$; & mettant à la place de y ſa valeur $\frac{u-z}{\sqrt{2}}$, l'on aura $x = \frac{u+z}{\sqrt{2}}$. Il faut mettre ces valeurs de x & de y à leur place dans l'équation de la courbe $x^3 + y^3 = axy$; & en faiſant le calcul, l'on trouvera $u^3 + 3uzz - \frac{auu}{\sqrt{2}} + \frac{azz}{\sqrt{2}} = 0$; ce ſera l'équation de la courbe qui exprime le raport commun de chacun de ſes points par le moyen des coordonnées AH & HC; & faiſant u négative, l'on aura l'équation des branches Acc, Aee; & l'on pourra faire ſur cette équation de la courbe, dont les changeantes ſont u & z, des remarques ſemblables à celles qu'on a faites ſur la premiére équation, dont les changeantes étoient x & y. On ſe contentera de faire remarquer ici que z ne montant qu'au ſecond degré, la courbe eſt bien plus facile à décrire par l'équation des u & des z que par celle des x & des y, en ſe ſervant de la méthode générale *de l'art.* 424.

AVERTISSEMENT.

ON ne s'arrête pas à prolonger ces remarques ſur l'uſage de l'Analyſe par raport à cette courbe, pour en découvrir toutes les autres propriétés. Ce qu'on vient de dire ſuffit à ceux qui commencent pour leur faire faire de ſemblables remarques ſur les autres courbes, pour leur faire voir le raport de l'Analyſe avec la Géométrie compoſée, & qu'elle contient les vrayes méthodes pour découvrir tout ce qu'on peut deſirer de connoître dans cette ſcience, & dans les ſciences Phyſico-mathématiques qui en dépendent.

EXEMPLE II.

10. *TROUVER l'aire de telle partie qu'on voudra ECF, EHccCE de la courbe ECc cD, dont l'équation eſt* $x^4 - 6aaxx + 4yyxx + a^4 = 0$, *en ſuppoſant que l'origine eſt au point A, que les* FIG. XIII.

coordonnées ſont $AE(x)$; $AB = FC = Hc(y)$, *& que* $Gc = a$.

ON remarquera, 1°. qu'en ſuppoſant $AB(y) = 0$, l'équation devient du ſecond degré, dans laquelle la changeante x a deux valeurs poſitives, ce qui fait voir que la droite AB des y eſt hors de la courbe qui a deux branches. 2°. Qu'en ſuppoſant $y = a$ (Gc), la changeante x a deux valeurs égales à Gc (a) ; ce qui fait connoître que les deux branches de la courbe ſe joignent en c, & que la courbe rentre en elle-même comme fait l'ellipſe. 3°. Que ſi l'on ſuppoſe y égale à une grandeur qui ſurpaſſe a, par exemple ſi l'on ſuppoſe $y = 2a$, les valeurs de x ſeront imaginaires ; ce qui apprend que la courbe ne paſſe pas au-delà du point c. 4°. Que ſi l'on prend l'élément de l'aire ſur la ligne $AB(y)$, cet élément ſera exprimé par $x\,dy = BC\chi\beta$, & l'aire qu'on trouvera pour l'intégrale ſera l'eſpace extérieur $AECB$: Mais ſi l'on prend l'élément de l'aire ſur $AF(x)$, cet élément ſera exprimé par* $ydx = FC\chi f$, & l'intégrale qu'on trouvera ſera l'eſpace intérieur EFC. On va chercher ici cet eſpace intérieur. * 595.

Pour le trouver on déduira de l'équation de la courbe (A) $y = \sqrt{\frac{-x^4 + 6aaxx - a^4}{4xx}}$; & pour réduire l'expreſſion de l'élément à être une quantité beaucoup plus ſimple, on ſuppoſera $\frac{x^4 - 2aaxx + a^4}{4xx} = zz$; ce qui donnera $\frac{xx - aa}{2x} = z$ quand x ſurpaſſera a, c'eſt-à-dire pour la partie de la courbe Dcc où les Bc ſont les x, & $\frac{aa - xx}{2x} = z$ quand a ſurpaſſera x, c'eſt-à-dire pour la partie ECc de la courbe où les BC ſont les x. On tirera de $\frac{xx - aa}{2x} = z$, l'équation $xx - 2zx - aa = 0$; & la valeur poſitive de x ſera (B) $x = z + \sqrt{zz + aa}$; on déduira de même de $\frac{aa - xx}{2x} = z$, (C) $x = -z + \sqrt{zz + aa}$. Ainſi pour comprendre ces deux cas en un ſeul, l'on aura $x = \pm z + \sqrt{zz + aa}$; d'où l'on tirera (D) $dx = \pm dz + \frac{zdz}{\sqrt{zz + aa}}$. En ſubſtituant les valeurs de x dans (A), le calcul donnera (E) $y = \sqrt{aa - zz}$; ſubſtituant ces valeurs de y & de dx dans la formule générale de la quadrature des courbes* ydx, on aura pour l'élément de l'eſpace qu'on cherche, $\pm dz \times \sqrt{aa - zz} + \frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{zz + aa}}$. Il ne faut plus que trouver l'intégrale de cet élément, pour avoir l'aire qu'on cherche : mais cette intégrale ne pouvant ſe trouver exacte par * 595.

les méthodes, il faut la trouver par la ſuppoſition de l'aire du cercle donnée.

La premiére partie de l'élément eſt auſſi l'élément de l'aire d'une partie d'un quart de cercle : car en faiſant ſur le demi-diametre $cb = a$ un quart de cercle cIb, prenant $cK = z$, & tirant la perpendiculaire KL, il eſt viſible que l'eſpace $cKLI = \text{S.}\, dz \times \sqrt{aa - zz}$. Fig. LIII.

Pour réduire la ſeconde partie de l'élément à l'élément d'une partie d'un quart de cercle, on ſuppoſera $aa + zz = uu$; ce qui donnera $-zz = aa - uu$, $u = \sqrt{aa + zz}$, $du = \frac{zdz}{\sqrt{aa + zz}}$, $\sqrt{aa - zz} = \sqrt{2aa - uu}$; & ſuſtituant les valeurs de $\frac{zdz}{\sqrt{aa + zz}}$, & de $\sqrt{aa - zz}$ dans la ſeconde partie de l'élément, on trouvera $\frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{aa + zz}} = du \times \sqrt{2aa - uu}$, qui eſt l'élément d'une partie d'un quart de cercle dont le rayon eſt $a\sqrt{2}$. Faiſant donc le rayon $bM = a\sqrt{2}$, égal à la corde bI de l'arc bI de 90 degrés, & avec ce rayon le quart de cercle bMN ; prenant $MP = u = \sqrt{aa + zz}$, & tirant la perpendiculaire PQ, il eſt clair que l'eſpace $MPQN = \text{S.}\, du \times \sqrt{2aa - uu}$. Par conſéquent l'eſpace $MPQN$ ($\text{S.}\, du \times \sqrt{2aa - uu} = \text{S.} \frac{zdz \times \sqrt{aa - zz}}{\sqrt{aa + zz}}$) $\pm cKLI$ ($\pm \text{S.}\, dz\sqrt{aa - zz}$) eſt égal à l'intégrale ou à l'aire $ECcH$ quand il y a $+$, & à l'aire ECF quand il y a $-$ devant $\text{S.}\, dz\sqrt{aa - zz}$.

II. Pour trouver ſi l'intégrale eſt complete, & ſi elle ne l'eſt pas, la quantité qui lui manque pour être complete ; il faut ſuppoſer * la changeante $FC\,(y)$ égale à zero ; & dans ce cas il eſt évident que l'eſpace qu'exprime l'intégrale doit être zero : & s'il ne l'eſt pas, la quantité qu'il faudra pour le rendre égal à zero, ſera celle qui manque à l'intégrale pour la rendre complete. Or en ſuppoſant $y = 0$ au point (E), l'on trouve $cK\,(z) = a$, c'eſt-à-dire que dans ce cas $\pm \text{S.}\, dz\sqrt{aa - zz}$, ou l'eſpace $cKLI$ devient le quart de cercle cbI : mais $y = 0$ rendant $z = a$, l'équation $\sqrt{aa - zz} = \sqrt{2aa - uu}$ deviendra $\sqrt{2aa - uu} = 0$, ce qui donnera $u = a\sqrt{2}$; c'eſt-à-dire, $MPQN$ devient le quart de cercle $MbQN$. Ainſi dans le cas de $y = 0$, bien loin que l'eſpace exprimé par l'intégrale devienne zero, c'eſt le quart de cercle $MbQN \pm$ le quart de cercle cbI ; ainſi * 664.

il faut ajoûter, ſous des ſignes oppoſés, cette quantité conſtante à l'eſpace qu'on a trouvé, & l'on aura l'eſpace complet que l'on cherchoit. Mais les quarts de cercle ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons, $MbQN . cbI :: 2aa . aa :: 2 . 1$. Ainſi la quantité conſtante qu'il faut retrancher eſt $3 \times cbI$ quand xx ſurpaſſe aa, & cbI quand aa ſurpaſſe xx.

AVERTISSEMENT.

LES exemples qu'on a donnés dans cette quatriéme ſection ſuffiſent pour apprendre aux Lecteurs la maniére de mettre en uſage, dans la réſolution des Problêmes, les méthodes de trouver les intégrales exactes quand cela ſe peut; quand les méthodes ne les font pas trouver exactes, la maniére de les avoir finies par la ſuppoſition des rectifications ou des quadratures données des courbes plus ſimples. Ainſi il eſt inutile de prolonger ce huitiéme Livre d'exemples, pour trouver la ſolidité des corps formés par la révolution des courbes autour d'un axe, les ſurfaces courbes de ces corps, & les centres de peſanteur: les Lecteurs pourront les faire eux-mêmes.

DERNIERE SECTION.

Où l'on explique l'uſage de l'Analyſe pour trouver la nature des courbes, en employant le calcul différentiel & le calcul intégral. Ce qui comprend l'uſage de l'Analyſe dans la réſolution de la plupart des Problêmes Phyſico-mathématiques, en ſe ſervant des mêmes calculs: on explique auſſi la conſtruction des courbes par leurs équations différentielles, c'eſt-à-dire, des courbes dont on n'a que les équations différentielles.

PREMIERE PARTIE DE LA DERNIERE SECTION.

De la méthode inverſe des tangentes.

DE'FINITION.

812. QUAND il arrive qu'en cherchant la nature d'une courbe, l'une des conditions du Problême fait découvrir ou contient la

la tangente de la courbe, ou ſa ſoutangente, ou quelqu'une des lignes qui ont raport à la tangente, dont l'on a donné les formules dans l'article 550; comme auſſi quand elle contient ou fait découvrir la rectification de la courbe ou ſa quadrature, ou la differentielle de quelqu'une de ces dernieres proprietés, ou quelque raport de ces proprietés. On dit que le Problême appartient *à la méthode inverſe des tangentes*; & la méthode pour trouver la nature des courbes, ou pour réſoudre les Problêmes ſur la nature des courbes, qui contiennent de ces ſortes de proprietés parmi leurs conditions données, s'appelle *la méthode inverſe des tangentes.* Lorſque quelqu'une des proprietés dont on vient de parler, n'entre pas dans les conditions données des Problêmes, où il faut trouver la nature des courbes, ils n'appartiennent pas à la méthode inverſe des tangentes. On en donnera ici des exemples.

LA METHODE INVERSE DES TANGENTES.

513. 1°. IL faut, après avoir employé les lettres x & y des formules * pour exprimer les coupées & les ordonnées des courbes dont on cherche la nature, trouver par les conditions données du Problême l'expreſſion de la tangente, ou ſoutangente, ou perpendiculaire, ou ſouperpendiculaire, &c. ou de la rectification, ou de la quadrature de la courbe dont on cherche la nature; c'eſt-à-dire, il faut trouver l'expreſſion de celle de ces proprietés de la courbe que peuvent faire découvrir les conditions du Problême, & la ſuppoſer égale à la formule qui exprime la même proprieté. Quand cette proprieté eſt la rectification ou l'aire de la courbe, il faut ſuppoſer l'expreſſion de la rectification ou de l'aire égale à la ſomme de la formule; & quand ce n'en eſt que l'element, il le faut ſuppoſer égal à la formule. Si les conditions données du Problême contenoient quelque raport de ces proprietés, il faudroit trouver par ces conditions données l'expreſſion de ce raport, & la ſuppoſer égale au raport des formules des mêmes proprietés. Cette premiere operation donne l'équation du Problême qu'on veut réſoudre, laquelle contient les deux changeantes x & y avec leurs differences. * 550.

2°. Il faut, quand cela ſe peut, trouver, par la deuxiéme & troiſiéme propoſition fondamentale, * & la premiere * 714, 715 & 716.

remarque qui les ſuit, les integrales des termes de l'équation du Problême ; ce qui donnera une nouvelle équation, qui eſt celle qui exprime la nature de la courbe qu'on cherchoit ; ainſi le Problême ſera reſolu.

3°. Quand on ne peut pas trouver les integrales de l'équation du Problême par la ſeconde ou par la troiſiéme propoſition fondamentale, ni la reduire à ces propoſitions par les méthodes de la premiere remarque qui les ſuit, il faut ſeparer les x & les dx, les y & les dy, par les méthodes que l'on a données dans l'art. 717, & trouver enſuite par les méthodes de la premiere Section les integrales des termes de l'équation, où les changeantes ſont ſeparées ; & ſi l'on trouve ces integrales exactes, l'équation qu'elles formeront ſera l'équation que l'on cherchoit, qui exprime la nature de la courbe qu'on ſe propoſoit de trouver, & le Problême ſera reſolu.

4°. Si l'on ne peut pas trouver les integrales de l'équation où les changeantes ſont ſeparées ; ou ſi l'on ne peut trouver les integrales que d'un membre ou de quelques grandeurs de l'équation, & qu'il reſte quelque partie differentielle ; l'on n'aura pas d'autre équation pour exprimer la nature de la courbe que cette équation differentielle ; il faudra conſtruire cette équation differentielle, c'eſt-à-dire, trouver les points très proches les uns des autres par où paſſe la courbe qu'exprime cette équation, par les méthodes qu'on donnera dans la ſuite ; & la conſtruction de la courbe ſera elle-même la reſolution du Problême ; & il arrivera des cas où cette conſtruction fera trouver l'équation de la courbe, & ſi elle eſt geometrique ou mechanique.

5°. Enfin ſi l'on ne peut pas ſeparer les changeantes & leurs differences dans l'équation du Problême, l'on ne pourra pas avoir de reſolution exacte du Problême par les méthodes qu'on a découvertes juſqu'au temps où nous ſommes, & l'on ne pourra l'avoir que par approximation, comme on l'a expliqué dans l'art. 718.

Application de la méthode inverſe des tangentes à des exemples.

EXEMPLE I.

814. FIG. XIV. *SUPPOSANT qu'une infinité de paraboles, toutes du même genre, (mais il n'importe pas quel genre ce ſoit,) dont l'une eſt*

AC, *ayent toutes le même axe* ABP, *& le même ſommet* A; *& qu'elles ne different entr'elles que par leurs parametres; trouver la courbe* CD *qui les coupe toutes perpendiculairement.*

PREPARATION.

ON ſuppoſe, pour rendre la reſolution generale, que $p^{m-n}x^n = y^m$, qui eſt l'équation des paraboles de tous les genres, repreſente l'equation d'un nombre infini de paraboles d'un même degré, en mettant au lieu de l'expoſant m un nombre entier poſitif determiné, & un autre à la place de l'expoſant n, & mettant ſucceſſivement au lieu du parametre p une grandeur telle qu'on voudra, lequel parametre ira en augmentant, quand on voudra que l'équation convienne aux paraboles qui vont en s'écartant de l'axe de plus en plus, & en diminuant quand on voudra qu'elle ſoit l'équation des paraboles du même genre qui s'approchent de l'axe de plus en plus. Quand on voudra que la même reſolution convienne à un autre nombre infini de paraboles, toutes d'un même genre, mais different de celui des paraboles de la premiere ſuppoſition; il faudra mettre au lieu des expoſans m & n les nombres entiers poſitifs qui conviennent au genre des paraboles, auxquelles on veut que la reſolution convienne.

Ainſi pour appliquer l'équation à la figure, on ſuppoſera $AB = x$, $BC = y$, & que le parametre de la parabole AC eſt égal à p. On ſuppoſera auſſi que CT eſt la tangente du point C de la parabole AC, & que CP eſt la perpendiculaire du point C de la même parabole. Ainſi $BT = * \frac{m}{n} x$ * 550 eſt la ſoutangente du point C de la parabole AC; & c'eſt en même temps l'expreſſion de toutes les ſoutangentes de toutes les paraboles du même genre qui ont le même axe AB, & le même ſommet A. BP eſt la ſouperpendiculaire du point C de la parabole AC.

On remarquera ſur la courbe DC que l'on cherche, qui doit couper toutes les paraboles perpendiculairement, que la partie infiniment petite C de cette courbe qui coupe la parabole AC, ſe trouve par la ſuppoſition dans la perpendiculaire CP de la parabole AC, & que cette particule C, de la courbe DC, eſt auſſi une partie infiniment petite de la droite CP; par conſequent la droite CT, tangente en C

de la parabole AC, eſt la perpendiculaire de la courbe DC au point C. D'où il ſuit que BT ($\frac{m}{n}x$) eſt en même temps la ſoutangente de la parabole AC, & la ſouperpendiculaire de la courbe DC que l'on cherche. Ce que l'on vient de faire remarquer ſur l'interſection C de la courbe DC, & de la parabole AC, convient à chaque autre interſection de la courbe DC, & de chacune des autres paraboles du même degré qui ont le même axe AB, & le même ſommet A. C'eſt pourquoi $\frac{m}{n}x$ eſt l'expreſſion de la ſouperpendiculaire de la courbe DC que l'on cherche : mais elle doit être négative, parceque la ſouperpendiculaire BT eſt du côté oppoſé de la ſouperpendiculaire BP de la parabole AC. Ainſi $BT = -\frac{m}{n}x$.

Le Problême de ce premier exemple ſe réduit donc à trouver la courbe DC, dont la ſouperpendiculaire BT eſt $-\frac{m}{n}x$; ce qui fait voir que le Problême appartient à la méthode inverſe des tangentes.

RESOLUTION.

IL faut ſuppoſer la ſouperpendiculaire $-\frac{m}{n}x$ égale à la
*550. formule de la ſouperpendiculaire * $\frac{y\,dy}{dx}$, ce qui donnera l'équation du Problême $\frac{m}{n}x + \frac{y\,dy}{dx} = 0$. Pour en trouver l'integrale, il faut ſeparer les changeantes, & l'on aura $\frac{m}{n}x\,dx + y\,dy = 0$. Il faut en prendre l'integrale par la troiſiéme
715. propoſition fondamentale, & l'on trouvera $\frac{m}{2n}xx + \frac{1}{2}yy = aa$. On met aa pour la conſtante homogene qu'il faut ajouter à l'integrale : $\frac{m}{2n}xx + \frac{1}{2}yy = aa$, ou bien $\frac{n}{m}yy = \frac{2n}{m}aa - xx$ eſt donc *l'équation de la courbe que l'on cherche.* C'eſt l'équation d'une ellipſe, & le terme $\frac{n}{m}yy$ fait voir que l'axe doit être à ſon parametre comme n eſt à m : c'eſt-à dire que ce raport eſt donné.

Si l'on ſuppoſe $m = 2$, & $n = 1$, l'équation generale des paraboles deviendra $px = yy$, & l'équation de l'ellipſe deviendra $\frac{1}{2}yy = aa - xx$; ce qui fait voir qu'une ellipſe DC, qui aura l'axe AB commun avec une infinité de paraboles du premier genre, qui aura pour centre le ſommet A de toutes ces paraboles, & qui aura enfin pour axe une ligne qui ſoit à ſon parametre comme 1 à 2, coupera toutes ces paraboles perpendiculairement.

EXEMPLE II.

5. *SUPPOSANT qu'une infinité d'hyperboles toutes d'un même genre, (mais il n'importe pas quel genre ce ſoit,) dont l'une eſt* GCF, *ayant pour aſymptotes communes les droites* AE, AT *perpendiculaires l'une à l'autre en* A; *trouver la courbe* CD *qui les coupe toutes perpendiculairement.* FIG. LV.

PREPARATION.

LA même équation $p^{m-n}x^n = y^m$ des paraboles de tous les degrés, peut exprimer les hyperboles de tous les degrés, en ſuppoſant ſeulement que l'expoſant m eſt négatif; car cette ſuppoſition la changera en $x^n y^m = p^{m+n}$ qui eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés par raport aux aſymptotes. Les Lecteurs doivent appliquer à ces hyperboles tout ce que l'on a dit dans la préparation à la réſolution de l'exemple précedent.

Ainſi on ſuppoſera que $AB = x$, $BC = y$; que p^{m+n} marque la *puiſſance* des hyperboles toutes d'un même degré (mais tel qu'on voudra,) auxquelles on veut appliquer la réſolution, que CT eſt la tangente au point C de l'hyperbole GCF; que CP lui eſt perpendiculaire au même point C; & l'on remarquera que la courbe DC que l'on cherche, a pour ſa ſouperpendiculaire au point C la même droite BT, qui eſt la ſoutangente de l'hyperbole GCF au point C, où elle eſt coupée perpendiculairement par la courbe DC; & qu'il en eſt de même de chacun des points d'interſection de la courbe DC avec les autres hyperboles: Mais la ſoutangente BT de l'hyperbole GCF ſe trouvera égale à $*-\frac{m}{n}x$. Ainſi $\frac{m}{n}x$ *550. eſt l'expreſſion de la ſouperpendiculaire BT de la courbe DC que l'on cherche; cette ſouperpendiculaire (qui eſt négative, étant la ſoutangente de l'hyperbole GCF, parcequ'elle va du côté oppoſé à l'origine A, & les ſoutangentes de GCF devroient aller du côté de l'origine A pour être poſitives,) eſt poſitive par raport à la courbe DC, parcequ'elle va du côté où doivent aller les ſouperpendiculaires de DC par raport à l'origine, pour être poſitives.

Le Problême ſe réduit donc à trouver la courbe dont $\frac{m}{n}x$ eſt la ſouperpendiculaire; ainſi il ſe rapporte à la méthode inverſe des tangentes.

RESOLUTION.

IL faut ſuppoſer la ſouperpendiculaire $\frac{m}{n}x$ égale à la formule * $\frac{ydy}{dx}$ de la ſouperpendiculaire, & l'on aura l'équation du Problême $\frac{m}{n}x - \frac{ydy}{dx} = 0$. Il faut en ſeparer les changeantes, & l'équation ſera $\frac{m}{n}xdx - ydy = 0$. Il faut trouver ſon integrale par la troiſieme propoſition fondamentale *, & lui ajouter une conſtante homogene; cette integrale ſera $\frac{m}{2n}xx - \frac{1}{2}yy = aa$, qui ſe réduit à $xx - \frac{2n}{m}aa = \frac{n}{m}yy$. *C'eſt l'équation de la courbe* DC *que l'on cherche.* Elle fait voir que la courbe eſt une hyperbole par raport au premier axe; & le terme $\frac{n}{m}yy$ fait connoître que le premier axe doit être à ſon parametre comme n eſt à m, c'eſt-à-dire en raport donné de l'expoſant n de la puiſſance de la coupée x à l'expoſant m de l'ordonnée y dans l'équation propoſée $x^n y^m = p^{m+n}$.

* 550.

* 715.

Si l'on ſuppoſe $m = 1$, $n = 1$, l'équation generale deviendra $xy = p^2$, qui eſt l'équation des hyperboles du premier genre par raport aux aſymptotes: & l'equation de la courbe DC deviendra $yy = xx - 2aa$, qui appartient à une hyperbole équilatere par raport au premier axe. Ce qui fait voir qu'une hyperbole équilatere DC, qui aura pour centre l'origine A, pour premier axe la ligne AB, coupera perpendiculairement toutes les hyperboles du premier genre qui auront pour aſymptotes les droites AE, AB perpendiculaires l'une à l'autre au point A.

EXEMPLE III.

816. *L'ON a trouvé dans l'article* 806, *que l'expreſſion de la ſoutangente* FS *de la courbe* Aee, *en ſuppoſant la coupée* AF = — x, *l'ordonnée* Fe = y, *& la grandeur conſtante* AP = a *étoit* $\frac{3y^3 + 3xy}{3xx - ay}$. *Il faut à preſent, en ſuppoſant que* $\frac{3y^3 + axy}{3xx - ay}$ *eſt la ſoutangente d'une courbe, trouver l'équation ou la nature de cette courbe.*

FIG. LII.

1°. IL faut ſuppoſer l'expreſſion de la ſoutangente donnée par les conditions du Problême, égale à la formule de la ſoutangente, ce qui donnera l'équation du Problême $\frac{3y^3 + axy}{3xx - ay} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $3y^3dy + axydy = 3xxydx - ayydx$.

2°. En diviſant cette équation par y, & mettant $3yydy$ au premier membre, & les autres grandeurs au ſecond, l'on aura $3yydy = 3xxdx - axdy - aydx$, dont on trouvera par la ſeconde propoſition fondamentale * que l'integrale eſt y^3 $= x^3 - axy$. Ainſi $y^3 - x^3 + axy = 0$ eſt l'équation de la courbe *A e e. Ce qu'il falloit trouver.* *714.

EXEMPLE IV.

7. *IL faut trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt* $-x$.

1°. ON ſuppoſera $-x = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $ydx + xdy = 0$, qui eſt l'équation du Problême.

2°. On trouvera par la troiſiéme propoſition fondamentale * que l'integrale eſt $xy = ab$, qui eſt l'équation de l'hyperbole entre les aſymptotes. *Ce qu'il falloit trouver.* *715.

EXEMPLE V.

8. *ON ſuppoſe (en nommant* KB, x; KA, a; BC, y,*) que* KB (x) . KA (a) :: KA (a). KS $= \frac{aa}{x}$; *il faut trouver l'équation de la courbe* ACC. FIG. XXI.

1°. LA ſoutangente $BS = * \frac{ydx}{dy}$; ainſi $KS = KB - BS$ $= x - \frac{ydx}{dy} = \frac{xdy - ydx}{dy}$; cela étant, on aura $\frac{aa}{x} = \frac{xdy - ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $xxdy - aady - yxdx = 0$; c'eſt l'équation du Problême. *550.

2°. On peut la réduire à la troiſiéme propoſition fondamentale *, en ſuppoſant $z = xx - aa$; ce qui donnera $\frac{1}{2}dz$ $= xdx$: car en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra $zdy - \frac{1}{2}ydz = 0$; & la multipliant par $\frac{1}{z^{1+\frac{1}{2}}}$, on trouvera $\frac{zdy - \frac{1}{2}ydz}{z^{1+\frac{1}{2}}} = 0$, dont l'integrale eſt $\frac{y}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{a}$, qui ſe réduit à $\frac{aa}{bb}yy = z = xx - aa$, qui eſt l'équation d'une hyperbole par raport au premier diametre, la moitié duquel eſt a, & la moitié du ſecond diametre eſt b. *Ce qu'il falloit trouver.* *715.

EXEMPLE VI.

9. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, 1°. on ſuppoſera $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x} = \frac{ydx}{dy}$, qu'on réduira

à $2axdy - 2xxdy = aydx - 2xydx$, ou bien $2axdy - 2xxdy - aydx + 2xydx = 0$; c'eſt l'équation du Problême. 2°. On prendra $z = ax - xx$; ce qui donnera $dz = adx - 2xdx$; & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, on aura $2zdy - ydz = 0$, qui, étant multipliée par $\frac{y}{zz}$, devient $\frac{2zydy - yydz}{zz} = 0$, dont l'integrale eſt * $\frac{yy}{z} = \frac{b}{a}$, qui ſe réduit à $\frac{a}{b} yy = z = ax - xx$, qui eſt l'équation de l'ellipſe dont a eſt le premier diametre, b eſt le parametre. *Ce qu'il falloit trouver.*

* 715.

EXEMPLE VII.

820. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt mx, 1°. on ſuppoſera $mx = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduira à $mxdy - ydx = 0$; c'eſt l'équation du Problême. 2°. On la multipliera par $\frac{y^{m-1}}{xx}$, & l'on aura $\frac{my^{m-1}xdy - y^m dx}{xx} = 0$, dont on trouvera, comme dans la troiſiéme propoſition fondamentale, que l'integrale eſt $\frac{y^m}{x} = a^{m-1}$, ou bien $y^m = a^{m-1}x$, qui eſt l'équation des paraboles de tous les degrés. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE VIII.

821. POUR trouver l'équation de la courbe dont la longueur eſt S. $dx\sqrt{1 + qqx^{2q-2}}$, 1°. il faut ſuppoſer S. $dx\sqrt{1 + qqx^{2q-2}} =$ * S. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui ſe réduira d'abord à $dx\sqrt{1 + qqx^{2q-2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & enſuite à $dx^2 + qqx^{2q-2} \times dx^2 = dx^2 + dy^2$, ou bien $qqx^{2q-2}dx^2 = dy^2$; & en prenant les racines quarrées, on aura $qx^{q-1}dx = dy$ pour l'équation du Problême. 2°. Il faudroit ſéparer les changeantes ſi elles ne l'étoient pas ; mais comme elles ſont toutes ſéparées, il faut prendre les integrales des deux membres par la premiere propoſition fondamentale, & l'on trouvera $x^q = y$ pour l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.* C'eſt l'équation des paraboles de tous les degrés dont le parametre eſt l'unité.

* 582.

EXEMPLE IX.

822. ON trouvera, par la même méthode, les équations des courbes exponentielles, & de celles qui renferment des expreſſions logarithmiques ; par exemple ſi $\frac{1+x \times l.1+x}{1+l.1+x}$ eſt la ſoutangente

tangente d'une courbe dont il faut trouver l'équation, 1°. on suppoſera $\frac{1+x\times l.1+x}{1+l.1+x} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $\frac{dy}{y} = \frac{1dx+dx\times l.1+x}{1+x\times l.1+x}$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour en trouver les intégrales on ſuppoſera $\overline{1+x}\times l.1+x = l.z$; d'où l'on déduira $^*dz = 1dx\times l.1+x+\frac{1+x}{1+x}\times\overline{1+x} = 1dx+dx\times l.1+x$; * 764. & ſubſtituant ces valeurs dans l'équation, elle deviendra $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, dont les intégrales ſont $^*ly = l.z = l.\overline{1+x}\times l.1+x$: * 768. & les grandeurs qui ont des logarithmes égaux étant égales, on aura $y = \overline{1+x}\times l.1+x$ pour l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.*

On a donné la conſtruction de cette courbe dans l'art. 780.

EXEMPLE X.

123. ON trouvera de même l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt $\frac{1}{1+l.x}$, 1°. en ſuppoſant $\frac{1}{1+l.x} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $\frac{dy}{y} = 1dx+dx\times l.x$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour trouver les intégrales, on ſuppoſera $xlx = z$, ce qui donnera $dz = dx\times l.x+1dx$; ainſi l'on aura $\frac{dy}{y} = dz$, dont les intégrales ſont $l.y = z = xlx = {}^*l.x^x$; d'où l'on déduit $\dagger y = x^x$. * 770. † 772. C'eſt l'équation de la courbe, *qu'il falloit trouver.*

On a donné la conſtruction de cette courbe dans l'art. 782.

AVERTISSEMENT.

LE calcul différentiel & intégral des expreſſions logarithmiques, ſert auſſi quelquefois à trouver les équations des courbes qui ne contiennent que des expreſſions ordinaires, comme on le verra dans l'Exemple ſuivant, qui contient une infinité d'Exemples.

EXEMPLE XI.

124. POUR trouver l'équation de la courbe dont la ſoutangente eſt $^*\frac{\overline{m+n}\times ax\pm xx}{ma\pm\overline{m+n}\times x}$, 1°. on ſuppoſera $\frac{\overline{m+n}\times ax\pm xx}{ma\pm\overline{m+n}\times x} = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe * 412. réduira à $\frac{dy}{y} = \frac{madx\pm\overline{m+n}\times xdx}{\overline{m+n}\times ax\pm xx}$. C'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour trouver les intégrales, on multipliera le numérateur & le dénominateur du ſecond membre par $\frac{n}{n}x^{\frac{n-n}{n}}$, & l'équation deviendra $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n}\times\frac{\frac{m}{n}ax^{\frac{m-n}{n}}dx\pm\frac{\overline{m+n}}{n}\times x^{\frac{m}{n}}dx}{ax^{\frac{m}{n}}\pm x^{\frac{m+n}{n}}}$,

On ſuppoſera $z = ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$; ce qui donnera $dz = \frac{m}{n} ax^{\frac{m-n}{n}} dx \pm \frac{m+n}{n} x^{\frac{m}{n}} dx$. On ſubſtituera dz & z au lieu de leurs valeurs, & l'on aura $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n} \times \frac{dz}{z}$: prenant les
* 768. intégrales, on aura S. $\frac{dy}{y} = \frac{n}{m+n} \times$ S. $\frac{dz}{z}$; c'eſt-à-dire * $l.\ y = \frac{n}{m+n} \times l.\ z$, où mettant la valeur de z, on aura $l.\ y = \frac{n}{m+n} \times l.\ ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$: Mais $\frac{n}{m+n} \times l.\ ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$
* 770. $= {}^{*}\ l.\ ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$; ainſi $l.\ y = l.\ ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$; & les grandeurs qui ont des logarithmes égaux étant égales, (car on ſuppoſe que ces grandeurs & leurs logarithmes ſont compris dans la même logarithmique,) on aura $y = ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}$; élevant chaque membre à la puiſſance $m+n$, on trouvera $y^{m+n} = ax^{\frac{m}{n}} \pm x^{\frac{m+n}{n}}{}^{n} = x^{m} \times \overline{a \pm x}^{n}$. C'eſt l'équation des hyperboles de tous les degrés par raport au diametre quand il y a $\overline{a+x}^{n}$, & celle des ellipſes de tous les degrés quand il y a $\overline{a-x}^{n}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

AVERTISSEMENT.

ON donnera dans les Exemples ſuivans les conſtructions des courbes, en ſe ſervant de leurs équations différentielles.

EXEMPLE XII.

825. POUR trouver la courbe dont la ſoutangente, qui convient à chacun des points de la courbe, eſt égale à une conſtante donnée a, 1°. on ſuppoſera $a = \frac{ydx}{dy}$, qui ſe réduit à $dx = \frac{ady}{y}$. C'eſt l'équation du Problême.

2°. Comme on ne peut pas trouver l'intégrale du ſecond membre, (on exclut ici & dans l'article ſuivant les logarithmes,) il faut conſtruire la courbe de cette équation différentielle : Pour cela il faut faire en ſorte que les membres de l'équation deviennent les élémens de l'aire de deux figures, dont on ſuppoſera les quadratures données, & que cependant l'égalité des deux membres ne change point ; ce qui

se fera en multipliant chaque membre par une même constante, comme a, & l'équation deviendra $adx = \frac{aady}{y}$, dont le premier membre adx est l'élément de l'aire d'un rectangle, & le second est l'élément de l'aire d'une hyperbole entre les asymptotes, comme on le va voir, & leurs intégrales ax, ou S. adx = S. $\frac{aady}{y}$ seront les aires de ces figures.

Après cette préparation, il faut tirer les deux droites DCd, NCA qui se coupent à angles droits au point C, elles seront les lignes des coordonnées, & l'on prendra les y sur DCd, & les x sur NCA. Il faut prendre Cd égale à la constante donnée $a = CA$, & mener par d la droite pdb parallele à NCA; & si l'on prend l'origine au point C, il est évident qu'un rectangle quelconque $CAbd$ sera l'expression géométrique de S. $adx = ax = Cd \times CA$. Fig. LVI.

Il faut ensuite prendre $Ca = a$, tirer $ab = a$ parallele à CN, & mener Cb qui sera égale à $a\sqrt{2}$, & tracer par le point b l'hyperbole équilatére l h b f d entre les asymptotes CD, CN. Il est évident que (*la puissance* de l'hyperbole étant aa, & chacune des coupées Ca, Ce, CD, &c. étant y,) chacune des ordonnées ab, ef, Dd, &c. sera = * $\frac{aa}{y}$: par conséquent chacun des élémens de l'aire sera = * $\frac{aady}{y}$; & en concevant, par raport à l'aire hyperbolique a b d D qui est au-delà de a b, que $y = a + y$; & par raport à l'aire a b i l qui est au-dessous de a b, que $y = a - y$, chacune des aires sera = S. $\frac{aady}{y}$. * 410. * 595.

On peut à présent tracer la courbe proposée, c'est-à-dire, en trouver tant de points que l'on voudra très-proches les uns des autres; on peut commencer par quel point on voudra; mais pour faire concevoir plus distinctement aux Lecteurs la courbe que l'on va décrire, on prolongera b a en B, en faisant a B = b a = $Ca = a$, & le point B sera le premier de la courbe; on abaissera par B, BAb parallele à Ca. Pour avoir ensuite les points F, D, M, P, &c. de la partie de la courbe où les ordonnées EF, CD, &c. qu'on nommera y, vont en augmentant, on se servira de la partie de l'aire hyperbolique qui est au-dessus de ab, & on se servira de la partie de l'aire hyperbolique qui est au-dessous de ab pour trouver les points H, L, &c. de la partie de la courbe où les ordonnées GH, IL, &c. vont en diminuant.

Pour trouver un point quelconque F au-deſſus de B, on prendra l'aire hyperbolique a e f b que l'on ſuppoſe donné ; on fera le rectangle $AEfb$ égal à cette aire ; & prolongeant f e, fE, le point F où elles ſe rencontreront ſera un des points de la courbe ; prenant enſuite l'aire hyperbolique e D d f = a e f b, & faiſant le rectangle $ECdf$ égal à cette aire, le point D où ſe rencontrent d D, dC prolongées ſera un autre point de la courbe. On trouvera de même le point M en prenant l'aire hyperbolique Dk m d = e D d f ; & faiſant le rectangle $CKmd$ égal à cette aire, le point M où ſe rencontrent mK, m k eſt un point de la courbe. On trouvera de même le point P par le prolongement de pN, p n, & ainſi des autres.

En prenant au-deſſous de a b l'aire hyperbolique a b h g égale à chacune de celles que l'on a déja priſes, & faiſant le rectangle $AbhG$ égal à cette aire, le point H, où ſe rencontreront h g, hG prolongées, ſera un des points de la courbe ; & ainſi des autres.

On prendra à préſent l'origine des coupées $x = AE$, AC, &c. au point A, de la courbe BFD, & ſes ordonnees $y = AB$, EF, CD, &c. paralleles à CD ; & comme il
*633. eſt évident, * que les eſpaces hyperboliques pris de ſuite a e f b, e D d f, &c. étant égaux par la conſtruction, les y (Ca, Ce, CD, &c.) font une progreſſion géométrique, & que les x (AE, AC, AK, AN, &c.) étant, par la conſtruction, les baſes de rectangles égaux d'une même hauteur,
*753. font une progreſſion arithmétique ; l'on voit clairement * que la courbe BFD, &c. qu'on vient de décrire, eſt la logarithmique. Et de plus on peut concevoir les eſpaces égaux correſpondans deux à deux, comme c d, Ed, partagés chacun en un même nombre infini d'élémens égaux ; chacun des élémens du premier DR r d ſera $= \frac{aady}{y}$, & chacun de ceux du ſecond $C\rho\tau d$ ſera $= adx$; & puiſque $\frac{aady}{y} = adx$, l'on aura $DR\,(dy) . RT = C\rho\,(dx) :: a . \frac{aa}{y} :: DC\,(y) . a$: ce
*550. qui donne $\frac{ydx}{dy} = a$; ainſi * la ſoutangente de la courbe que l'on a décrite eſt partout égale à (a). *Ce qui étoit propoſé.*

EXEMPLE XIII.

26. POUR trouver la courbe dont la soutangente est $\frac{m}{n}x$, (on FIG. LVII. suppose que m & n représentent chacune un nombre quelconque), 1°. on supposera $\frac{m}{n}x = \frac{ydx}{dy}$, qui se réduira à $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$: c'est l'équation du Problême. 2°. Comme on ne peut pas trouver l'intégrale de chaque membre où les changeantes sont séparées, si ce n'est en employant la méthode *de l'art.* 820 ; sans cela on va construire la courbe par le moyen des rectifications, ou des quadratures supposées de deux courbes, en réduisant, aux élémens de la rectification ou de la quadrature de deux courbes, les membres de l'équation, sans changer leur égalité ; ce qui se fera en multipliant l'un & l'autre par le quarré d'une constante donnée a, & l'équation préparée sera $\frac{maady}{y} = \frac{naadx}{x}$. Chaque membre de cette équation est l'élément de l'aire d'une hyperbole équilatère entre les asymptotes ; y est la coupée de la premiére, maa est sa *puissance*, & $\frac{maa}{y}$ est son ordonnée : de même x, naa, $\frac{naa}{x}$, sont la coupée, la *puissance*, & l'ordonnée de la seconde.

Pour les construire & ensuite la courbe proposée par leur moyen, il faut tirer les deux droites BAL, bAl, qui se coupent à angles droits au point A, qui sera l'origine des changeantes, dont on prendra les y sur Ab, ou sur les paralleles à Ab, & les x sur AB. Ensuite on construira la premiére hyperbole entre les asymptotes Ab, AL, en prenant $Am = \sqrt{aam}$; & menant ma parallele à AL & égale à Am, & tirant Aa qui se trouvera égale à $a\sqrt{2}m$, Aa sera le demi axe de la premiére hyperbole dont (a) sera le sommet ; on tracera la premiére hyperbole a g e c par ce sommet a. Il est évident que chacune des ordonnées f g, d e, b c, &c. sera $= \frac{maa}{y}$, & qu'en menant t u infiniment proche de b c, le petit espace hyperbolique b t sera $= \frac{maa}{y} \times dy$. On prendra pour la seconde, $AM = \sqrt{aan}$, & menant Ma parallele à Al, & tirant Aa qui se trouvera égale à $a\sqrt{2}n$, Aa sera le demi-axe de la seconde hyperbole dont a sera le sommet, par lequel on tracera la seconde $agec$, dont chaque ordonnée Fg, De, Bc, sera $= \frac{naa}{x}$; & en concevant que $Br(dx)$ est une partie infiniment petite de $AB(x)$, mais telle que $bu = cr = CR = dy$. $Br\ (dx) :: Bc\ (\frac{naa}{x})$. b c $(\frac{maa}{y})$; &

concevant en même tems l'ordonnée ru, le petit eſpace ou l'élément hyperbolique Bu ſera $= \frac{naa}{x} \times dx = \frac{maa}{y} \times dy$; & prolongeant cB, cb, leur rencontre en C donnera un point de la courbe propoſée.

Mais comme on ne peut pas partager des particules infiniment petites dx & dy en tel raport qu'on veut autrement que par l'eſprit, & qu'on ne peut partager ainſi que des quantités finies ; il faut prendre les intégrales de l'équation préparée, qui ſont S. $\frac{maa dy}{y}$ = S. $\frac{naa dx}{x}$, qui expriment des eſpaces hyperboliques finis égaux entr'eux, & qui font voir qu'il faut prendre ſur la premiére hyperbole un eſpace quelconque fini bg ($\frac{maa dy}{y}$), & lui trouver un égal eſpace hyperbolique Fc = S. $\frac{naa dx}{x}$ ſur la ſeconde hyperbole, & prolongeant gf, gF ; leur rencontre au point G ſera un autre point de la courbe propoſée ; & l'on trouvera de la même maniére tant d'autres points de la courbe qu'on voudra.

Les eſpaces hyperboliques fc, Fc étant égaux par la ſuppoſition, on peut concevoir dans l'un & dans l'autre le même nombre infini d'élémens égaux entr'eux ; ceux du premier ſeront chacun = $\frac{maa dy}{y}$, & ceux du ſecond ſeront chacun = $\frac{naa dx}{x}$; & l'on aura bu = $CR\ (dy)$. $Br = RT\ (dx)$ *550. :: $\frac{naa}{x} . \frac{maa}{y}$ :: $CB\ (y) . \frac{m}{n}x$ = * à la ſoutangente : ainſi l'on a décrit la courbe dont la ſoutangente eſt égale à $\frac{m}{n}x$. *Ce qui étoit propoſé.*

REMARQUES.

I.

QUAND le raport des ordonnées bc, fg, &c. d'une hyperbole ceg, & des ordonnées Bc, De, &c. d'une autre hyperbole ceg, qui ſont également éloignées de l'origine A, eſt donné, ſi l'on prend ſur la premiére tel quadrilatére hyperbolique bg qu'on voudra, on peut toujours trouver ſur la ſeconde un quadrilatére hyperbolique Bg égal à celui de la premiére. Pour le concevoir clairement, il faut imaginer BA ſur bA, & l'hyperbole ceg en $\chi\varepsilon\gamma$, & bc étant = $\frac{maa}{y}$, & $b\chi$ étant = $\frac{naa}{x}$, il eſt évident que Ab étant commune, y & x ſont la même ligne : ainſi $b\chi . bc :: n . m$; par conſéquent le quadrilatére hyperbolique $b\varepsilon$ eſt à bg comme n

eſt à m. D'où l'on voit que pour avoir un quadrilatére hyperbolique $b\gamma = bg$, il ne s'agit que de faire en ſorte que $n . m :: b\varepsilon . b\gamma$. Or pour trouver ce $b\gamma$, il n'y a qu'à faire cette proportion $n . m :: bf . bh$, & tirer l'ordonnée $h\gamma$, & l'on aura $b\varepsilon . b\gamma :: n . m$. Car on peut concevoir bf partagée en petites parties qui ſoient en progreſſion géométrique, qui ayent toutes chacune avec ſa voiſine le raport de $\sqrt[n]{Ab}$ à $\sqrt[n]{Af}$, & qu'il y ait autant de ces raports égaux de b à f qu'en marque le nombre n, & que bh eſt partagée de la même maniére, en ſorte qu'il y ait de b à h autant de ces raports égaux qu'en exprime le nombre m; & comme tous les petits quadrilatéres hyperboliques qui auront ces petites parties pour baſes * ſeront égaux, il eſt évident que l'eſpace * 633.
hyperbolique $b\varepsilon$, ſera à l'eſpace hyperbolique $b\gamma$ comme n eſt à m; par conſéquent $b\gamma = bg$.

II.

Chacun des petits raports égaux de la progreſſion géométrique des petites parties de bf, dont il y en a autant qu'en exprime le nombre n, peut être marqué ainſi $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$; car on peut concevoir le raport de Ab à Af compoſé d'autant de raports égaux qu'en exprime le nombre n, & il eſt évident par la doctrine des raports compoſés, que le raport de Ab à Af eſt compoſé d'autant de raports ſimples égaux à $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ qu'en exprime le nombre n, puiſqu'en élevant ce raport ſimple à la puiſſance dont n eſt l'expoſant, on aura le raport compoſé $\frac{Ab}{Af}$.

III.

Si on éléve le raport ſimple $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ à la puiſſance dont m eſt l'expoſant, on aura le raport $\frac{\sqrt[n]{Ab^m}}{\sqrt[n]{Af^m}} = \frac{\overline{Ab}^{\frac{m}{n}}}{\overline{Af}^{\frac{m}{n}}}$ pour le raport compoſé d'autant de raports ſimples égaux $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$

qu'en exprime le nombre m. Or le raport de Ab à Ah eſt compoſé d'autant de raports égaux à $\frac{\sqrt[n]{Ab}}{\sqrt[n]{Af}}$ qu'en exprime le nombre m, puiſque, par la premiére remarque, il y a autant de ces petits raports égaux entre Ab & Ah qu'en exprime le nombre m; par conſéquent $Ab . Ah :: \overline{Ab}^{\frac{m}{n}} . \overline{Af}^{\frac{m}{n}}$.

I V.

D'où il ſuit que les ordonnées correſpondantes bx, bc de deux hyperboles étant entr'elles comme deux nombres exprimés par n & m, ſi l'on en prend deux eſpaces hyperboliques égaux $b\gamma$, bg, & qu'on partage bh en f dans le raport de m à n, en ſorte que $bf . bh :: n . m$, l'on aura toujours $Ab . Ah :: \overline{Ab}^{\frac{m}{n}} . \overline{Af}^{\frac{m}{n}}$.

V.

Si l'on prend ſur AB la droite $AF = Ah$, il eſt évident que la coupée $AB = Ab$ eſt à la coupée $AF = Ah$, comme l'ordonnée $BC = Ab$, élevée à la puiſſance dont $\frac{m}{n}$ eſt l'expoſant, eſt à l'ordonnée $FG = Af$ élevée à la même puiſſance $\frac{m}{n}$. Ce qui fait voir que la courbe AGC, qu'on peut conſtruire par le moyen des quadrilatéres hyperboliques égaux de deux hyperboles équilatéres, eſt toujours une courbe géométrique, quand le raport des ordonnées de ces hyperboles peut s'exprimer par nombres; puiſque la puiſſance d'une ordonnée qui a ce raport pour expoſant, eſt toujours à une ſemblable puiſſance d'une autre ordonnée, comme la coupée correſpondante de la premiére eſt à la coupée correſpondante de la ſeconde. Mais quand ce raport qui fait l'expoſant des puiſſances des ordonnées eſt incommenſurable, on ne peut pas alors exprimer par les expreſſions de l'algébre le raport des ordonnées aux coupées, & la courbe décrite par le moyen des quadrilatéres hyperboliques égaux eſt méchanique.

EXEMPLE XIV.

827. LEs deux droites AE, AB font un angle droit en A qui
FIG. LVIII. eſt diviſé en deux demi-droits par la droite Ab; d'où il ſuit que $AB = Bb$, $AD = Dd$; BS eſt la ſoutangente d'une courbe $AGFC$; a eſt une ligne droite donnée; nommant les

les coupées $AB(x)$, les ordonnées $BC(y)$, il eſt clair que $bC = BC(y) - Bb = AB(x)$; il faut trouver la courbe $AGFC$ par le moyen de cette proprieté donnée, $BC(y)$. $BS\ (*\frac{ydx}{dy}) :: a.\ bC(y-x)$. *550.

Ce Problême, que *M. de Beaune* propoſa de ſon temps à *M. Deſcartes*, eſt un des premiers qui a fait ſentir le beſoin que l'on avoit du calcul differentiel & integral, qui n'étoit pas encore inventé de ce temps-là, pour reſoudre la plûpart de ces ſortes de Problêmes, comme on le va voir.

1°. La proprieté de la courbe qu'on cherche donne cette équation $\frac{ydx}{dy} = yy - xy$, qui ſe reduit à $dx = \frac{y-x}{a} \times dy$; c'eſt l'équation du Problême. 2°. Pour en ſeparer les changeantes, il faut ſuppoſer $\frac{y-x}{a} = \frac{b-z}{b}$; ce qui donnera $y = \frac{ab+bx-az}{b}$, & $dy = \frac{bdx-adz}{b}$. Mettant les valeurs de $\frac{y-x}{a}$ & de dy dans l'équation du Problême, elle deviendra $dx = \frac{adz}{b} - \frac{adx}{z}$, où les changeantes ſont ſeparées. Prenant les integrales, on aura $x = \frac{az}{b} - a \times S.\frac{dz}{z}$, ou bien * $x = \frac{az}{b} - a \times l.\ z$. C'eſt l'équation qui exprime la nature de la courbe propoſée. Voici la maniere de la conſtruire par cette équation. *768.

Il faut prendre $AM = a$, & élever la perpendiculaire $Mf = a$, & par le point f tracer la logarithmique $Ngfc$, dont la ſoutangente ſoit par tout égale à $AM(a)$; on nommera z les ordonnées Mf, Ec, AN, &c. de la logarithmique: l'origine des logarithmes, qu'il faut prendre ſur l'axe AME de la logarithmique, ſera au point M, où $Mf(z)$ eſt égale à (a) qu'on prendra pour l'unité: les logarithmes MH, MA ſeront poſitifs, les logarithmes ME ſeront négatifs, & le logarithme MA étant l'unité, l'ordonnée $AN(z)$ eſt déterminée, & on la nommera b. Il faut auſſi tirer MN qui ſera la tangente de la logarithmique au point N.

A preſent pour conſtruire la courbe, il n'y a qu'à prendre quel point on voudra E ſur l'axe de la logarithmique, tirer l'ordonnée Ec de la logarithmique, & lui abaiſſer en c la perpendiculaire ce juſqu'à la rencontre de MN, puis prolonger cE en C, en ſorte que EC ſoit égale à ec; le point C ſera un de ceux de la courbe. Menant de même Mf, fm, & faiſant $MF = mf$, le point F ſera celui de la courbe qui

répond à l'origine M des logarithmes ; menant de même Hg, gh, & faisant $HG = hg$, G sera un point de la courbe. On trouvera de même les autres.

Demonstration de la construction.

ON prendra le point C, qu'on démontrera être un point de la courbe. Pour cela il faut mener ee parallele à AN, & l'on aura, à cause des triangles semblables AMN, eMe, $NA\,(b)$. $AM\,(a)$ :: $ee = Ec\,(z)$. $Me = \frac{ez}{b}$; ajoutant à cette quantité $ME = -1 \times l.\,z$ avec un signe contraire, c'est-à-dire avec le signe +, parcequ'il y a dans l'équation à construire $x = \frac{ez}{b} - a \times l.\,z$, on aura, par raport aux points qui sont au-dessus de l'origine M des logarithmes, $\frac{ez}{b} + a \times l.\,z = Ee$; mais $x = \frac{ez}{b} - a \times l.\,z$; & cette équation devient du côté des logarithmes négatifs, $x = \frac{ez}{b} + a \times l.\,z$. Donc $AB = EC\,(x) = Ee$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C'est la même démonstration pour les autres points, excepté qu'au dessous de M, où les logarithmes sont positifs, l'on aura $x = \frac{ez}{b} - a \times l.\,z$.

On peut aussi démontrer par la construction, que la courbe $AGFC$ a la proprieté donnée par le Problême. Car en menant les ordonnées infiniment proches $trRT$r, Tt, & la
*550. tangente CS, il faut que * $Cr.\,rT :: CB.\,BS$, & qu'en mettant les valeurs de ces lignes prises de la construction, on trouve l'équation du Problême $dx = \frac{y-x}{a} \times dy$. Or $cr = ER = Cr = dy$, étant la differentielle de $CB\,(y)$, ER étant aussi la differentielle du logarithme ME, qui est supposé
*761. négatif, est * $-\frac{dz}{z}$; ainsi $Cr = dy = -\frac{dz}{z}$ par la construction ; $Tr = tB$ est la differentielle de $AB\,(x)$, ainsi Tr est dx ; mais $AB\,(x) = EC = ec =$ (par la construction) $\frac{ez}{b} + a \times S.\frac{dz}{z}$, (car le logarithme $ME\,(a \times S.\frac{dz}{z})$ négatif, est retranché de $\frac{ez}{b}$,) dont la differentielle est $-\frac{adz}{b} + \frac{adz}{z}$, (parceque les ordonnées $Ec\,(z)$ allant en diminuant, la differentielle $tr\,(-dz)$ est négative, & il faut écrire $-\frac{adz}{b}$ pour la differentielle de $+\frac{ez}{b}$;) ainsi $Tr = dx = -\frac{adz}{b} + \frac{adz}{z}$.
*756. La proprieté de la logarithmique donne aussi * $tr\,(-dz).\,rc\,(dy) :: tR\,(z).\,a$ qui est la soutangente ; d'où l'on tire $adz = -zdy$; enfin ayant supposé pour la construction $\frac{y-x}{a} = \frac{b-z}{b}$, l'on en déduit $z = -\frac{by+bx+ab}{a}$. Mettant à

preſent dans la proportion $Cr . rT :: CB . BS$, les valeurs des lignes priſes de la conſtruction, l'on trouvera $Cr \left(-\frac{dz}{z} = dy\right)$ $. rT \left(-\frac{a dz}{b} + \frac{a dz}{z}\right) :: BC(y) . BS = -\frac{\frac{a y dz}{b} + \frac{a y dz}{z}}{-\frac{dz}{z}} = * \frac{y dx}{dy}$; *550.

ſubſtituant au lieu du dénominateur $-\frac{dz}{z}$ ſa valeur dy, & au lieu de $a dz$ ſa valeur $-z dy$, l'équation de la ſoutangente BS deviendra $-\frac{zdy}{b} + 1dy = dx$; & ſubſtituant dans cette derniere au lieu de $-z$ ſa valeur $\frac{by - bx - ab}{a}$, l'on trouvera $\frac{y-x}{a} \times dy = dx$: ainſi la courbe qu'on a décrite eſt celle à qui convient la proprieté donnée par le Problême.

REMARQUE.

DANS la reſolution des Problêmes où l'on cherche la nature des courbes, quand on prend l'integrale de l'équation differentielle, il arrive quelquefois que cette integrale, qui eſt l'équation du Problême, eſt complete, & quelquefois auſſi, il lui faut ajouter ou en retrancher une grandeur conſtante, afin de la rendre complete. Quand la differentielle ſe peut reduire à la troiſiéme propoſition fondamentale *, la conſtante qu'il faut ajouter eſt ordinairement arbitraire; il ſuffit qu'elle ſoit homogene aux termes de l'integrale; on peut cependant faire le choix de la grandeur conſtante qui donnera une reſolution plus ſimple. Voici la regle pour connoître, dans les autres cas, ſi l'integrale eſt complete; & quand elle ne l'eſt pas, pour trouver la grandeur conſtante qui lui manque pour la rendre complete. 1°. Il faut ſuppoſer la changeante x égale à zero à ſon origine; ſi en même temps on trouve que l'autre changeante de l'équation, y ou z devient auſſi zero, & qu'il ne reſte aucune grandeur conſtante dans l'équation par cette ſuppoſition de $x = 0$, c'eſt une marque que l'integrale eſt complete. 2°. Mais ſi x étant ſuppoſée égale à zero, on trouve une valeur déterminée de l'autre changeante y ou z à l'origine de x, il faut ſubſtituer cette valeur déterminée de y ou de z à ſa place dans l'équation; & ſi après la ſubſtitution on trouve que tout devient zero, & que les grandeurs ſe détruiſent par des ſignes contraires, c'eſt encore une marque que l'integrale eſt complete: mais ſi après la ſubſtitution de la valeur déterminée de y ou de z, * 715.

ou de zero, quand y ou $z = 0$, on trouve une grandeur constante ; il faut ajouter cette constante, avec un signe oppoſé, à l'integrale pour la rendre complete. Par exemple on ſuppoſera $x = 0$ dans l'integrale $x = \frac{az}{b} - a \times \text{S.} \frac{dz}{z}$; ce qui donnera une valeur déterminée de z, car au point A qui eſt l'origine des x, la changeante z eſt $AN = b$, & le logarithme S. $\frac{dz}{z}$ ou $l.\ z$ eſt égal à $AM = a = 1$; ce qui eſt cauſe que $\frac{az}{b}$ devient $\frac{ab}{b} = a = 1$; & $a \times l.\ z$ devient auſſi $a = 1$; & comme les quantités ſe détruiſent par des ſignes oppoſés, il n'y a point de conſtante à ajouter à l'integrale, ni à en retrancher. La raiſon de la regle eſt que la courbe doit être zero à ſon origine ; ainſi l'integrale, qui eſt l'équation qui exprime la courbe, doit auſſi être zero ; ce qui eſt cauſe que, quand il arrive que l'integrale n'eſt pas zero, il en faut retrancher la quantité conſtante qui l'empêche d'être zero ; ce qui ſe fait en la joignant avec un ſigne contraire.

SECONDE PARTIE DE LA DERNIERE SECTION.

Exemples de l'uſage de l'Analyſe dans la reſolution des Problêmes Phyſico-mathematiques, en ſe ſervant du calcul differentiel & integral.

EXEMPLE I.

829. *TROUVER les courbes dont il faut que les verres ayent les figures pour raſſembler en un point, par le moyen de la refraction, les rayons qui partent d'un autre point donné, ou qui ſont paralleles.*

FIG. LIX. SOIENT les courbes qu'on cherche repreſentées par ACc, dont le ſommet ſoit au point donné A de la droite EAF ; ſoit E le point d'où partent les rayons, F celui où ils doivent s'aſſembler après avoir ſouffert refraction en entrant dans la courbe, EC l'un de ces rayons qui entrant dans la courbe en C, ſe rompt, & continue ſon chemin par la droite CF ; & CD ſoit la perpendiculaire à la courbe au point C ; ainſi EC d * eſt l'angle *d'incidence* ; DCF eſt l'angle de *refraction* ; que le raport du ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de

* *Voyez l'article 498.*

l'angle de refraction, qui convient au milieu où eſt le rayon incident EC, & au milieu qui eſt la matiere qui a la figure ACc, ſoit exprimé en general par deux lignes données, dont la plus grande ſera m, la moindre ſera n, ainſi $\frac{m}{n}$ exprimera *le raport de la refraction.* Soit priſe la partie Cc infiniment petite de la courbe, & ſoient menés le rayon incident Ec & le rayon rompu cF, & ſoient tirés cM, cN, la premiere perpendiculaire ſur le rayon incident EC prolongé en M, & la ſeconde ſur le rayon rompu CF. L'angle CcM du triangle CMc rectangle en M, eſt égal à l'angle d'incidence ECd ou à ſon oppoſé au ſommet MCD; car CcM fait un angle droit avec cCM, & MCD fait un angle droit avec le même cCM. L'angle CcN eſt auſſi égal à l'angle de refraction DCF; puiſque dans le triangle CNc rectangle en N, l'angle CcN fait un angle droit avec cCN, avec lequel l'angle de refraction DCF fait auſſi l'angle droit DCc. D'où il ſuit qu'en prenant la particule Cc de la courbe pour le rayon, CM eſt le ſinus de l'angle d'incidence, & CN le ſinus de l'angle de refraction; par conſequent $\frac{CM}{CN} = \frac{m}{n}$. Ces choſes ſuppoſées.

Soient les droites données $EA = a$, $FA = b$, l'augmentation finie & changeante de chaque rayon incident EC ſur le rayon EA, lequel entre par le ſommet A, ſoit ſuppoſée $= z$, ainſi $EC = a + z$; la difference finie & changeante de chaque rayon rompu CF d'avec le rayon AF, ſoit $= u$; cette différence u eſt l'excès de FA ſur FC, ou de FC ſur FA; ainſi $CF = b \mp u$. La differentielle CM de $EC = dz$; la differentielle CN de $CF = \mp du$. L'on aura donc, par les choſes que l'on vient de dire, $\frac{dz}{\mp du} = \frac{m}{n}$; ce qui donne $n\,dz = \mp m\,du$; prenant les integrales on trouve $nz = \mp mu$; & la proportion $m.\ n :: z.\ \mp u$. qui montre que l'excès (z) de chaque rayon incident EC ſur EA (a), eſt à l'excès ($\mp u$) de FA (b) ſur le rayon rompu CF correſpondant à EC, comme m eſt à n. D'où l'on voit l'invention & *la conſtruction des quatre ſortes d'ovales dont parle M. Deſcartes vers la fin du ſecond Livre de ſa Geometrie*, qui ſont, du moins les trois premieres, les courbes propres au Problême propoſé; & avec quelle facilité on les trouve par le calcul differentiel & integral.

Pour tracer ces courbes, 1°. il faut mener la droite GAg, qui faſſe l'angle GAF de quelle grandeur on voudra; & pour avoir tel point C qu'on voudra, prendre Am telle qu'on voudra, & An telle que $m.n :: Am.An$; mener la droite m n, & du centre E avec le rayon Em tracer un arc. 2°. Après avoir pris $AG = AF$, tracer un ſecond arc du centre F avec le rayon Gn; le point C d'interſection de ces deux arcs ſera un point de la premiere de ces courbes. On trouvera de même tous les autres points; par exemple pour avoir un ſecond point c, on prendra Am, & du centre E avec le rayon Em on tracera un arc : on tirera mn parallele à m n, & du centre F, avec le rayon Gn, on tracera un ſecond arc; l'interſection c de ces deux arcs ſera un ſecond point de la courbe; & ainſi des autres. Car il eſt évident, par la conſtruction, qu'à l'égard de chaque point C, le rayon incident $EC = Em$ ou Em ſurpaſſe EA, & que l'excès eſt Am ou $Am = z$; que l'excès de FA ſur le rayon rompu FC eſt An ou $An = u$; & que ces deux excès Am ou Am, & An ou An, ſont entr'eux comme m eſt à n : ce qui donne $nz = -mu$; d'où l'on tire $ndz = -mdu$; & $dz. -du :: m.n$, qui eſt la proprieté de la courbe, *qu'il falloit décrire.*

Pour tracer la ſeconde courbe ou ovale, il faut laiſſer les points E & F, l'un à gauche, l'autre à droite de A, comme ils ſont ſur la droite EAF, & changer de côté le point G, le mettant en g ſur GAg prolongée du côté de Ag, de maniere que $Ag = AG = AF$, & prendre dans la conſtruction g n & g n au lieu de Gn & Gn, pour les rayons des ſeconds arcs qu'on doit tracer du centre F; & leurs interſections avec les premiers arcs, tracés du centre E avec les rayons Em, Em, donneront les points de la ſeconde ovale.

Pour tracer la troiſiéme & la quatriéme, il faut tranſporter le point F en f du même côté où eſt le point E, & qu'il ſoit plus éloigné de A que n'eſt le point E; & pour la troiſiéme il faut faire $Ag = Af$; prendre, dans la conſtruction, le centre f & les rayons gn, gn, pour décrire les ſeconds arcs, dont les interſections avec les premiers, qui ont pour centre E & pour rayons Em, Em, donneront les points de la troiſiéme. Mais pour la quatriéme il faut prendre $AG = Af$, & dans la conſtruction prendre f pour le centre des ſeconds arcs, & Gn, Gn pour leurs rayons; leurs interſections avec les

premiers arcs décrits du centre E avec les rayons Em, Em, donneront les points de la quatriéme.

REMARQUES.

I.

ON remarquera que, dans la premiere & la quatriéme, les excès An, An, (u) ſont négatifs, & poſitifs dans la ſeconde & la troiſiéme; c'eſt-à-dire dans la premiere & la quatriéme les rayons Gn, Gn des ſeconds arcs ſont moindres que FA ou fA, & qu'ils vont en diminuant; mais dans la ſeconde & la troiſiéme, les rayons gn, gn des ſeconds arcs ſurpaſſent FA ou fA, & vont en augmentant. Comme auſſi qu'il eſt évident que, dans toutes ces ovales, l'excès Am ou Am (z) de chaque rayon incident EC ſur EA, eſt à l'excès An ou An (u) du rayon rompu correſpondant FC ſur FA, ou de FA ſur le rayon rompu FC, comme m eſt à n; ce qui donne $nz = \mp mu$, d'où l'on déduit $ndz = \mp mdu$, & $dz . \mp du :: m . n$; ainſi ces ovales ſont les courbes qu'il falloit conſtruire: la proportion $m . n :: z . u$ donne $u = \frac{nz}{m}$.

II.

Si l'on veut avoir l'équation de ces courbes, il faut tirer l'ordonnée CB d'un point quelconque C, & nommer les données EA (a), FA (b); les coupées changeantes AB (x), les ordonnées BC (y), l'excès de EC ſur EA (z), l'excès de FA ſur FC, ou de FC ſur FA, $(u = \frac{n}{m}z)$ (remarquant auſſi que $z = \frac{m}{n}u$:) après ces dénominations, il eſt clair que $EB = a + x$; $FB = b - x$ dans la premiere & la ſeconde ovale; dans la troiſiéme & la quatriéme ovale $fB = b + x$; & $fE = b - a$; $EC = a + z$; comme auſſi $EC = a + \frac{m}{n}u$, $FC = b - u$, ou (pour ne mettre qu'une même changeante dans l'expreſſion des excès z & u,) $FC = b - \frac{n}{m}z$, dans la premiere & la quatriéme ovale; mais dans la ſeconde & la troiſiéme FC ou $fC = b + \frac{n}{m}z$. Cela ſuppoſé, les triangles rectangles ECB, FCB ou fCB, donnent $\overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{FC} - \overline{EB}^2$; c'eſt-à-dire $zz + 2az - xx - 2ax = yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nb}{m}z - xx + 2bx$; d'où l'on tirera une équation qui n'aura que les changeantes z & x ſans y, par le moyen de laquelle on trouvera une valeur de z, qui étant ſubſtituée dans celle que l'on voudra des deux équations dont yy

eſt un membre, l'on aura une équation dont les changeantes ſeront x & y ſans z, & ce ſera l'équation de la courbe.

III.

Si l'on ſuppoſe EA (a) infinie, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe que les rayons incidens EC ſont paralleles entr'eux & à EA l'équation $zz + 2az - xx - 2ax = yy$ deviendra $2az - 2ax = 0$, tous les termes où n'eſt pas a devant zero par raport à ceux où eſt la grandeur infinie a; ce qui donnera $z = x$. Mettant cette valeur de z dans l'équation $yy = \frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nb}{m}z - xx \pm 2bx$, elle deviendra, en tranſpoſant le ſecond membre, $+\frac{mm-nn}{mm}xx \pm \frac{2nb}{m}x \mp 2bx + yy = 0$, qui eſt l'équation de l'ellipſe*, parceque m ſurpaſſant n, le terme où eſt xx eſt poſitif, & le terme yy l'eſt auſſi; & $\frac{mm-nn}{mm}$* exprime le raport du parametre au diametre.

* 440.
* 439.

Si l'on ſuppoſe AF ou Af (b) infinie, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe que les rayons FC ſont les rayons incidens, & qu'ils ſont paralleles à AF, l'équation $\frac{nn}{mm}zz \mp \frac{2nb}{m}z - xx \pm 2bx - yy = 0$ deviendra $\mp \frac{2nb}{m}z \pm 2bx = 0$; d'où l'on tire $z = \frac{m}{n}x$; & ſubſtituant cette valeur de z dans l'équation $zz + 2az - xx - 2ax - yy = 0$, l'on trouvera $\frac{mm-nn}{nn}xx + \frac{2am}{n}x - 2ax - yy = 0$, qui eſt une équation de l'hyperbole par raport au diametre; parceque* xx & yy ont des ſignes differens; & $\frac{mm-nn}{nn}$* exprime le raport du parametre au diametre. D'où l'on voit que dans le cas des rayons incidens paralleles, l'ellipſe & l'hyperbole ſont les courbes propres à diriger par la réfraction ces rayons vers un même point, comme on l'a démontré dans l'art. 498.

* 432.
* 439.

EXEMPLE II.

830. *SUPPOSE' que la premiere ſurface d'un verre ſoit telle que l'on voudra, c'eſt-à-dire qu'elle ſoit la ſurface qui ſeroit formée par la révolution d'une courbe telle qu'on voudra* ACR *autour de ſon axe* EADF, *trouver la courbe* DHR, *qui par ſa révolution autour du même axe* EADF, *formera la ſurface courbe qu'il faut donner à l'autre côté du même verre, afin que les rayons qui partent d'un point donné* E *ſur l'axe commun aux deux ſurfaces du verre, après avoir ſouffert une premiere refraction en entrant dans le verre par ſa premiere ſurface courbe* ACR, *ſoient tous dirigés par la ſeconde refraction*

FIG. LX.

refraction qu'ils ſouffriront en paſſant du verre dans l'air par la ſeconde ſurface DHR, *au même point ou foyer* F *donné ſur l'axe commun* EADF.

ON ſuppoſe, 1°. que quoique la premiére figure du verre *ACR* ſoit arbitraire, elle doit pourtant être telle que l'on ſçache mener par chacun de ces points *C* la tangente de la courbe en ce point là ; afin que l'on puiſſe tirer par chaque point *C* la perpendiculaire à la courbe ou à la tangente de ce point *C* ; car on ne regarde point ici comme une partie de ce Problême, de trouver le rayon rompu *CHf* de chaque rayon incident *EC* ſur la prémiére ſurface *ACR* du verre que l'on regarde comme donnée, quoiqu'il n'importe quelle courbe elle puiſſe être : ainſi on ſuppoſe que l'on ſçait trouver pour chaque rayon incident *EC*, ſon rayon rompu *CHf* : en voici la maniére. On tire la perpendiculaire à la courbe *PC*, puis ayant fait *PC*, priſe d'une longueur arbitraire, le diamétre d'une demi-circonférence *PKIC*, qui coupe le rayon incident *EC* en *I*, on mene la droite *PI*, & ſuppoſant que $\frac{m}{n}$ exprime le raport de la refraction (qui eſt de l'air dans le verre $\frac{3}{2}$,) on prend *PK* quatriéme proportionnelle à *m*, *n*, *PI* ; & ayant mis une pointe du compas ouvert de la grandeur *PK* au point *P*, on trace avec l'autre un arc qui coupe la demi-circonférence en *K*, & enfin on tire *KCHf*, qui ſera le rayon rompu du rayon incident *EC* ; puiſque *PI* qui eſt le ſinus de l'angle d'incidence *PCE*, eſt par la conſtruction à *PK* ſinus de l'angle *PCK* de la refraction, comme *m* eſt à *n*.

Il s'agit donc de trouver ſur chaque rayon rompu *CHf* par la premiére ſurface *ACR*, lequel rayon rompu eſt donné de poſition, comme on vient de le voir ; de trouver, dis-je, ſur ce rayon rompu, le point *H* de la ſeconde ſurface courbe *DHR* qu'il faut donner à l'autre côté du verre, afin que tous les rayons rompus *CH* par la premiére ſurface ſoient dirigés au même point donné *F* par la ſeconde refraction qu'ils ſouffriront aux points *H* en ſortant du verre.

On ſuppoſe, 2°. que l'on prend à diſcrétion ſur l'axe *EADF* le point *D* pour le ſommet de la ſeconde courbe *DHR* dont on veut trouver les points ; ainſi les droites *EA*, *AD*, *DF*, & *Ff* ſont données. On remarquera que la premiére

courbe *ACR* peut être telle que les rayons rompus *CHf* iront rencontrer l'axe à des points f qui ſeront du côté de *E*, & non pas du côté de *F*, ou quelques-uns du côté de *E*, & d'autres du côté de *F*; & en tous ces cas chaque point f & la ligne f*D* ſont toujours donnés. Il peut auſſi arriver que ces rayons rompus *CHf*, ou quelques-uns, ſoient paralleles à l'axe, & dans ce cas on prendra ſur chaque rayon rompu la grandeur *C*f arbitraire, & qui ſera par conſéquent donnée.

FIG. LIX. On ſuppoſe, 3°. qu'en prenant comme dans le premier exemple (fig. 59) une partie *Cc* infiniment petite de la courbe, & tirant de *c* la perpendiculaire *cM* ſur le rayon incident *ECM*, & la perpendiculaire *cN* ſur le rayon rompu *CNF*, ou, ce qui revient au même, du centre *E* avec le rayon *Ec* le petit arc *cM*, & du centre *F* avec le rayon *Fc* le petit arc *cN*; *CM* eſt le ſinus de l'angle d'incidence, & *CN* le ſinus de l'angle de refraction, comme on l'a démontré dans l'exemple précédent; de façon qu'en prenant auſſi $\frac{m}{n}$ pour l'expreſſion du raport de la refraction qui ſe fait au paſſage de l'air dans le verre; l'on aura pour tous les rayons incidens & les rompus correſpondans, *m* . *n* :: *CM* . *CN*. Au contraire au paſſage du verre dans l'air, conſidérant *FC* dans le verre comme le rayon incident, & *CE* dans l'air comme ſon rayon rompu, on aura *n* . *m* :: *CN* . *CM*. Or il eſt clair que *CM* eſt la *différence* infiniment petite du rayon incident, & *CN* la *différence* du rayon rompu; ainſi au paſſage de l'air dans le verre *m* eſt à *n* comme la *différence* du rayon incident eſt à la *différence* du rayon rompu; & au contraire dans le paſſage du verre dans l'air.

FIG. LIX. & LX. Mais chaque rayon incident *EC* contient une partie conſtante égale à *EA*; & en tirant du centre *E* avec le rayon *EA* un arc de cercle *Aμ* (fig. 59), *AM* (fig. 60), la partie *μC*, *MC* du rayon incident eſt ſon autre partie, qui eſt la ſeule quantité changeante du rayon incident. En tirant de même (fig. 60) du centre f avec le rayon f*A* l'arc *AN*, *NC* ſera

FIG. LIX. la partie changeante du rayon rompu; ainſi nommant *z* la partie changeante *μC*, & *u* la partie changeante *νC* dans la figure 59, *CM* ſera égale à *dz*, & *CN* = *du*, & l'on aura *m* . *n* :: *dz* . *du*; d'où l'on déduira *mdu* = *ndz*; & prenant les intégrales on trouvera *mu* = *nz*, ce qui donne *m* . *n* :: *z* . *u*: d'où l'on voit que les intégrales de *dz* & de *du* ſont *μC* (*z*),

$vC(u)$, & qu'ainſi dans la figure 60 $MC . NC :: m . n$. FIG. LX.

Par la même démonſtration, en ſuppoſant que H eſt le point de la ſeconde courbe que l'on cherche ; dont le rayon incident du verre dans l'air eſt CHf, & le rompu HF, & tirant du centre f l'arc Dn, & du centre F l'arc Dm ; l'on aura $n . m :: Hn . Hm$. Ainſi nommant $Hn(z)$, Hm ſera $\frac{m}{n}z$. Il faut bien remarquer ce que l'on vient de démontrer dans tout ce qui précéde ; car c'eſt de là qu'on déduira la réſolution.

RESOLUTION.

ON ſuppoſera que le point H, pris dans le rayon rompu CHf de la premiére refraction, eſt celui de la ſeconde courbe DHR qu'il faut trouver ; on tirera du centre f qui eſt donné les arcs Dn, Hh, Cc, AN ; du centre F, l'arc Dm ; du centre E, l'arc AM ; on menera du point donné C & du point H les droites CB, HG perpendiculaires à l'axe : on remarquera, qu'à cauſe des rayons égaux deux à deux fA, fN ; fC, fc, fH, fh, fD, fn, on aura $NC = Ac$, $CH = ch$, $Hn = hD$, & $Nn = AD$. On nommera les données fF (f), $FD = Fm$ (e), $DB(b)$, $Dc(c)$; les inconnues $DG(x)$, $GH(y)$, & $Hn(z)$; d'où il ſuit que $FG = e + x$, $FH = Fm + mH = e + \frac{n}{n}z$; f$G = f + e + x$, fH = f$D + nH = f + e + z$, f$B = f + e + b$, fC = fc = f$F + FD + Dc = f + e + c$. Ces choſes ſuppoſées.

FIG. LX.

Les triangles FGH, fGH, rectangles en G, donneront $\overline{FH}^2$ $(ee + \frac{2m}{n}ez + \frac{mm}{nn}zz) - \overline{FG}^2 (-ee - 2ex - xx) = \overline{GH}^2 (yy)$ $= \overline{fH}^2 (ff + 2ef + ee + 2fz + 2ez + zz) - \overline{fG}^2 (-ff - 2ef - ee - 2fx - 2ex - xx :)$ d'où l'on tire l'équation

$$\frac{mm - nn}{nn}zz + \frac{2me}{n}z + 2fx = 0.$$
$$- 2ez$$
$$- 2fz$$

Les triangles ſemblables fCB, fHG, donnent auſſi f$C(f + e + c)$. f$B(f + e + b) ::$ f$H(f + e + z)$. f$G(f + e + x :)$ d'où l'on déduit $DG(x) = \frac{f+e+b \times z + bf + be - cf - ce}{c+e+f}$; ſubſtituant cette valeur de x dans l'équation précédente, l'on aura $\frac{mm - nn}{nn}zz + \frac{2me}{n}z + \frac{bf + be - cf - ce}{c+e+f} \times 2f = 0$,

$$- 2ez$$
$$- 2fz$$
$$+ \frac{f+e+b \times 2fz}{c+e+f}$$

qui eſt une équation du ſecond degré dont z eſt l'inconnue, & dont le dernier terme eſt négatif, à cauſe de c (Dc) plus grande que b (DB); ainſi il y a deux valeurs de z dans l'équation, l'une poſitive & l'autre négative. On trouvera la ligne droite qui eſt la valeur poſitive de z, comme on l'a enſeigné dans l'article 294; & après avoir tracé du centre f avec le rayon f D l'arc Dn qui rencontre f H au point n, on prendra nH égale à la ligne droite qui eſt la valeur de z, & le point H, ainſi trouvé, ſera le point de la courbe DHR, *qu'il falloit trouver.*

On trouvera de la même maniére les autres points de la courbe DHR; & après l'avoir tracée, en faiſant faire une révolution à la courbe DHR autour de ſon axe DF, elle formera la ſeconde ſurface qu'il faut donner au verre, afin qu'il dirige au foyer F tous les rayons qui partent du point E, & qui ſouffrent une premiére refraction à l'entrée du verre ACR; ſi l'on fait faire une révolution à la figure $ACRHD$ autour de l'axe AD, elle décrira la figure ſolide que doit avoir le morceau de verre.

REMARQUE.

SI les rayons rompus CHf, ou les incidens EC, ou quelques-uns de ces rayons, ſe trouvoient paralleles à l'axe, ſuppoſant, par exemple pour ces cas là, que Hf eſt parallele à l'axe, il faut alors prendre Cf d'une grandeur arbitraire que l'on regardera comme donnée, & tirer par D, au lieu de l'arc Dn, une droite Dn perpendiculaire aux deux droites ADF, CHf, qui ſont paralleles dans ces cas; & le point n étant ainſi déterminé ſur fn, on trouvera nH (z) de la même maniére qu'on l'a trouvée dans la réſolution qui précéde; en remarquant que les arcs Hh, Cc, AN, ſont des lignes droites perpendiculaires aux deux droites ADF, CHf, que ce cas ſuppoſe paralleles.

SECONDE RESOLUTION,

Ou autre maniére plus ſimple de trouver chaque point H *de la courbe que l'on cherche.*

ON a vû dans la premiére réſolution que $MC . NC :: m . n$, & qu'ainſi $NC = \frac{n}{m} MC$; que $Hm . Hn :: m . n$, d'où l'on a $Hn = \frac{n}{m} Hm$; que $Ac = NC = \frac{n}{m} MC$; que $Dh = Hn$

$= \frac{n}{m} Hm$; que $Fm = FD$; & qu'enfin $Nn = AD$. L'on tire de là $CH = AD - NC - Hn = AD - \frac{n}{m} MC - \frac{n}{m} Hm$; transposant, on aura $CH + \frac{n}{m} Hm = AD - \frac{n}{m} MC$; ajoutant au premier membre $\frac{n}{m} Fm$, & au second $\frac{n}{m} FD = \frac{n}{m} Fm$, l'on trouvera $CH + \frac{n}{m} Hm + \frac{n}{m} Fm = AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$. Mais $Hm + Fm = HF$; ainsi mettant HF dans le premier membre au lieu de $Hm + Fm$, il viendra $CH + \frac{n}{m} HF = AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$. L'on a donc la grandeur toute connue $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$ égale à la somme des deux grandeurs $CH + \frac{n}{m} HF$, dont chacune en particulier est une inconnue : concevant que l'on ôte de chacune la grandeur CH, il doit rester $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD - CH = \frac{n}{m} HF$.

Cela donne cette manière très-simple de trouver le point H. 1°. Il faut prendre sur la ligne CHf donnée de position & de grandeur, la ligne CL égale à la somme des grandeurs données $AD - \frac{n}{m} MC + \frac{n}{m} FD$; & tirer la droite LF. 2°. Il faut prendre sur LHC la ligne Ln égale à la ligne donnée n, & ayant ouvert le compas de la grandeur de la ligne donnée m, en mettre une pointe au point n, & avec l'autre pointe tracer un arc qui coupe la droite LF en un point m, & tirer la droite nm. 3°. Il faut mener par le point donné F la ligne FH parallele à mn, le point H, où elle rencontrera la droite LH, sera le point de la courbe que l'on cherche : car CL étant, par la construction, égale à $CH + \frac{n}{m} HF$, en retranchant CH, il faut que le reste LH soit $\frac{n}{m} HF$. Or par la construction mn (m) . Ln (n) : : HF, LH ; donc $LH = \frac{n}{m} HF$; ainsi le point H, que l'on trouve par la construction, est celui *qu'il falloit trouver*. On trouvera de même les autres points de la courbe DHR.

EXEMPLE III.

31. BAC *est une chaîne très-flexible & incapable d'extension, composée par exemple de très-petits anneaux égaux, ou de globules égaux, attachée par les deux bouts en* B *&* C, *qui sont dans la même horizontale* BC ; *il faut trouver la courbe* BAC *formée par cette chaîne suspendue librement, & construire cette courbe.* FIG. LXI.

IL est évident, 1°. qu'à cause de la parfaite uniformité qu'on suppose dans la chaîne, elle doit se disposer par sa pesanteur

& ſa fléxibilité, de telle ſorte qu'en menant par le point A, qu'on ſuppoſe le plus bas, la verticale AD, la figure BAC ſoit partagée par la moitié par AD, & que les deux moitiés de cette courbe BA & CA ſoient égales & uniformes; de façon que prenant AD pour l'axe, & A pour l'origine, les ordonnées DB, DC, à un même point D de l'axe, ſoient égales.

2°. Que la partie de la courbe au ſommet A, qu'on conçoit infiniment petite, eſt parallele à l'horiſon; & qu'ainſi la tangente Ag au ſommet, eſt horizontale.

3°. Que ſi dans la ſituation où s'eſt miſe la chaîne ſuſpendue en B & C, (la ſuppoſant ſur un plan vertical,) on l'attachoit à ce plan au ſommet A, elle ne changeroit point de figure; de maniére qu'en concevant l'une des moitiés, comme AC, retranchée, celle qui reſteroit, comme BA, conſerveroit la même figure qu'elle avoit; d'où il ſuit qu'on peut concevoir au ſommet A la force qu'on nommera (a), qui retire chaque moitié BA, CA de la ſituation verticale, ou de la perpendiculaire à l'horizon Bg ou CK, où elle ſe diſpoſeroit par ſa peſanteur, ſi elle n'étoit attachée que par l'un de ſes bouts B ou C, pour lui faire prendre la figure courbe BA ou CA.

4°. Que chaque point de la chaîne eſt tiré verticalement en bas par la peſanteur de la partie de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point le plus bas A. Ainſi le point B eſt tiré en bas verticalement par le poids de la moitié de la chaîne BA: chaque point, pris entre B & A, eſt tiré de même par le poids de l'arc de la chaîne qui eſt depuis ce point là juſqu'au point A. On peut prendre, à cauſe de l'uniformité de la chaîne, chacun des arcs de la chaîne, qu'on nommera (u), pour la peſanteur de ce même arc. D'où l'on voit que chaque petite partie de la chaîne eſt tirée verticalement par l'effort du poids (u), & en même tems horizontalement par la force (a) du ſommet A; ce qui lui fait prendre la ſituation de la tangente de ce point ou de cette petite partie de la courbe. Ainſi,

5°. En concevant par chaque point de la chaîne (on prendra ici pour exemple le point B) une verticale Bg juſqu'à la tangente horizontale Ag du ſommet A, la tangente BM de la chaîne à ce point B, & par g la parallele gN à la tangente BM, le point B eſt pouſſé verticalement ſuivant la

direction Bg par le poids de la moitié de la chaîne, & retiré en même tems horizontalement suivant la direction horizontale gA, ou une parallele à gA au point B, par une force constante, qui est la même pour chaque point, & qu'on conçoit au sommet A tirant suivant gA; ce qui est cause que la partie infiniment petite Bb est mise par ces deux efforts dans la direction de la tangente BbM qui est le prolongement de la petite partie Bb. Or en menant la verticale ebm infiniment proche de Bng, l'on aura le petit triangle Bbe, rectangle en e, semblable au triangle BgM, rectangle en g, & l'on aura, pour chaque point comme B, cette proportion (en supposant que Bg représente l'effort de la chaîne BA (u) suivant la verticale, & gM l'effort de la force constante (a) qu'on conçoit au sommet A) $Mg . Bg :: Be . eb :: (a) . BA (u)$.

Ainsi nommant (x) chaque coupée prise sur l'axe AD ou sur les paralleles à l'axe comme Bg, & y chaque ordonnée BD; Be sera dy, & eb sera dx, & la proportion précédente s'exprimera de cette maniére $Be\,(dy) . eb\,(dx) :: a . BA\,(u)$; d'où l'on aura $adx = udy$, ou $dy = \frac{adx}{u}$, *pour l'équation de la courbe* BA *ou* CA *formée par la chaîne.*

COROLLAIRE.

COMME $du = {}^{*}\sqrt{dx^2 + dy^2} =$ (en mettant au lieu de dy^2 sa valeur $\frac{aauu}{uu}$ prise de $dy = \frac{adx}{u}$) $\sqrt{\frac{uudx^2 + aadx^2}{uu}} = \frac{dx}{u}\sqrt{uu + aa}$, qui donne $du^2 = \frac{dx^2}{uu} \times \overline{uu + aa}$, ou bien $uudu^2 = dx^2 \times \overline{uu + aa}$; on aura $udu = dx\sqrt{uu + aa}$; d'où l'on tire $dx = \frac{udu}{\sqrt{uu + aa}}$; en prenant les intégrales, on aura $x = \sqrt{uu + aa}$, & $xx = uu + aa$, & $uu = xx - aa$; ou bien $u = \sqrt{xx - aa}$, (qui fait voir * que la longueur d'un arc quelconque u, de la courbe BA formée par la chaîne, est égale à l'ordonnée d'une hyperbole équilatére dont a est le demi-axe, & x la coupée.) Enfin en mettant cette valeur de u dans $dy = \frac{adx}{u}$, on aura $dy = \sqrt{\frac{adx}{xx - aa}}$ *pour l'équation de la courbe formée par la chainette* qui exprime le raport de l'ordonnée $y = S.dy = S.\sqrt{\frac{adx}{xx - aa}}$, & de la coupée x.

* 582.

* 410.

REMARQUE.

EN ſuppoſant $u = 0$ dans $x = \sqrt{uu + aa}$, ou dans $u = \sqrt{xx - aa}$, on trouve $x = a$; cela fait connoître que la coupée x ne commence pas au ſommet A, qui eſt l'origine des arcs u de la courbe AB, & n'eſt pas ſeulement AD, mais qu'elle s'étend plus loin juſqu'au point E où l'on ſuppoſe $AE = a$; ainſi $ED = x$, & $AD = x - a$.

Différentes maniéres de conſtruire la courbe formée par la chaîne.

I. Par l'hyperbole équilatére.

IL faut multiplier les deux membres de $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx - aa}}$ par a, & l'on aura $ady = \frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$. Or ady eſt l'élément d'un rectangle, & $\frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$ eſt le double de $\frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$, * qui eſt l'élément d'un ſecteur d'hyperbole équilatére, dont la moitié du premier axe eſt a. C'eſt pourquoi ſi l'on décrit ſur le premier axe EAD (x) par le ſommet A, une hyperbole équilatére AF dont le centre ſoit E, & la moitié du premier axe EA (a), & qu'on tire la droite EF, on aura le ſecteur hyperbolique $AEF = * \frac{aadx}{2\sqrt{xx - aa}}$; & ſi l'on mene Ef parallele à Ag, & qu'on faſſe le rectangle Af égal au double du ſecteur hyperbolique AEF, qu'on regarde comme donné, le rectangle Af ſera ay ou S. $ady =$ S. $\frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$. Enfin ſi l'on prolonge l'ordonnée FD de l'hyperbole, & fg du rectangle ; le point de rencontre B ſera un point de la courbe formée par la chaîne, On trouvera de même les autres points de la courbe ; car en concevant le rectangle Af partagé en un nombre infini d'élémens égaux, comme $fgmm$, & de même le ſecteur hyperbolique AEF partagé dans le même nombre infini d'élémens ou de petits ſecteurs égaux, chaque élément du rectangle ſera double de chacun des élémens du ſecteur, & $Be(dy)$ de la courbe BA ſera égale à fm (dy) de l'élément du rectangle, & eb (dx) de la courbe BA ſera égale à gf (dx) qui entre dans l'élément du ſecteur hyperbolique. Ainſi par la conſtruction,

* 609.

* 609.

truction, $ady = \frac{2aadx}{2\sqrt{xx-aa}}$, & $Be\,(dy) = \sqrt{\frac{adx}{xx-aa}}$, qui eſt la propriété de la courbe BA, *qu'il falloit conſtruire.*

II. Par la rectification ſuppoſée de la parabole.

$du^* = \sqrt{dx^2+dy^2} =$ (en ſubſtituant au lieu de dy^2 ſa valeur $\frac{aadx^2}{xx-aa}$ priſe de l'équation de la courbe $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$) $\sqrt{\frac{xdx}{xx-aa}}$. Par conſéquent $dy + du = \frac{adx+xdx}{\sqrt{xx-aa}} =$ (en diviſant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{x+a}$) $dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. Il faut trouver une courbe dont les coordonnées x & y ayent la même origine E que les x & les y de la courbe BA, & ſe prennent ſur les mêmes lignes, qui ait S. dy + S. du pour ſa rectification ; & nommant (t) chacun des arcs de cette nouvelle courbe depuis ſon ſommet, l'élément de ſa rectification ſoit $dt = dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$. Pour cela il faut ſuppoſer $dt = dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} = {}^*\sqrt{dx^2+dy^2}$; ce qui donnera $\frac{xdx^2+adx^2}{x-a} = dy^2+dx^2$, * 582. & ôter dx^2 de chaque membre, & l'on aura $\frac{xdx^2+adx^2}{x-a} - dx^2 = \frac{2adx^2}{x-a} = dy^2$; ce qui donne $dy = dx\sqrt{\frac{2a}{x-a}}$: en prenant les intégrales, on aura $y = 2\sqrt{2a \times x-a} = \sqrt{8a \times x-a}$, qui eſt l'équation d'une parabole ſimple dont les coupées ſont $x-a$; c'eſt-à-dire l'origine des coupées eſt au point A, & le parametre $= 8a$.

C'eſt pourquoi ſi l'on décrit ſur l'axe AD la parabole AG dont le parametre ſoit $= 8a$, & qu'on prenne une droite égale à la longueur, qu'on ſuppoſe donnée, de chacun des arcs de cette parabole, & qu'on applique cette droite au point correſpondant de l'hyperbole équilatére AF, ſur l'ordonnée de ce point là ; par exemple ſi l'on prend la droite égale à AG, & qu'on l'applique au point F correſpondant à G, ſur FD, le point B où ſe terminera cette droite $= AG$, ſera un point de la courbe BA formée par la chaîne. On trouvera de même chacun des autres points : car la longueur de l'arc $AG =$ S. $dt =$ S. $dx\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} =$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\sqrt{x+a}$) S. $\frac{xdx+adx}{\sqrt{xx-aa}} =$ S. $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$ + S. $\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} =$ S. dy + S. du ; d'où ôtant S. $du =$ S. $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$

$= \sqrt{xx-aa}$, (qui eſt l'intégrale de $\frac{xdx}{\sqrt{xx-aa}}$) $= FD$ qui eſt l'ordonnée de l'hyperbole équilatére AF, il reſte S. $dy = y = \text{S.} \frac{a\,dx}{\sqrt{xx-aa}}$. C'eſt l'équation de la courbe BA, *qu'il falloit conſtruire.*

III. Par la logarithmique.

IL faut ſuppoſer la différentielle logarithmique $\frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} = dy$, & chercher la ligne qui peut avoir pour logarithme S. $\frac{adz}{z}$: pour cela il faut ſuppoſer $\frac{zz+aa}{2z} = x$, ce qui donnera $zz - 2xz + aa = 0$; d'où l'on tirera deux valeurs poſitives de z, ſçavoir $z = x \pm \sqrt{xx-aa}$, (la plus grande valeur de z aura le ſigne $+$, & la moindre le ſigne $-$;) & en prenant la différentielle, on aura $dz = \frac{dx \times \sqrt{xx-aa} \pm xdx}{\sqrt{xx-aa}}$; & diviſant le premier membre par z, & le ſecond par la valeur de $z = x \pm \sqrt{xx-aa}$, on trouvera en multipliant les quotiens par a, $\frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$: ce qui fait voir que les grandeurs, dont S. $\frac{adz}{z}$ eſt le logarithme, ſont, la plus grande $z = x + \sqrt{xx-aa}$, la moindre $z = x - \sqrt{xx-aa}$; & les ajoutant enſemble, leur ſomme ſera $2x$, dont la moitié eſt la grandeur x, c'eſt-à-dire la coupée de la courbe BAC formée par la chaîne. Ce qui donne cette conſtruction.

1°. Il faut mener par E l'origine des x, l'horizontale fEK, la prendre pour l'axe de la logarithmique, c'eſt-à-dire pour la ligne des logarithmes $y = \text{S.} \frac{adz}{z} = \text{S.} \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & tracer la logarithmique IAL qui paſſe par le point A, où l'on a $AE = a$, dont la ſoutangente ſoit par-tout égale à $AE\,(a)$, & $AE\,(a)$ ſera priſe pour l'unité dont le logarithme eſt zero, les logarithmes $EK\,(y)$ à la droite de AE, ſeront les logarithmes des grandeurs KL qui ſurpaſſent l'unité (a), & les logarithmes $Ef\,(-y)$ à la gauche de AE, ſeront les logarithmes des grandeurs fI moindres que a, & ces logarithmes ſeront $y = \text{S.} \frac{adz}{z} = \text{S.} \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & les grandeurs, dont ils ſont les logarithmes, ſeront $KL\,(z) = x + \sqrt{xx-aa}$; $fI\,(z) = x - \sqrt{xx-aa}$.

2°. Il faut prendre de chaque côté de E deux logarithmes

égaux EK, Ef, & ajouter enſemble les deux grandeurs KL, fI, dont ils ſont les logarithmes ; ces grandeurs ſeront $KL = z = x + \sqrt{xx - aa}$, $fI = \frac{aa}{z} = x - \sqrt{xx - aa}$; car (à cauſe des logarithmes égaux $EK = Ef = y = S.\frac{adz}{z} = S.\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$,) l'unité a eſt moyenne proportionnelle entre KL (z) & fI ($\frac{aa}{z}$) : Or il eſt évident que leur ſomme ſera $KL + fI = z + \frac{aa}{z} = 2x$. Il faut prendre la moitié de cette ſomme, qui ſera $\frac{zz+aa}{2z} = x$, & faire KC, fB chacune égale à $\frac{KL+fI}{2} = \frac{zz+aa}{2z} = x$, & les points C & B ſeront chacun un point de la courbe BAC formée par la chaînette. On trouvera de même les autres points deux à deux. Car, par la conſtruction, en prenant pK & fm chacune $= dC = dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, EK & ſon égale Ef ſont chacune $= y = S.\frac{adz}{z} = S.\frac{adx}{\sqrt{xx-aa}} = DC = DB$, & c'eſt l'équation de la courbe. De plus les logarithmes égaux EK, Ef ſont, par la conſtruction, les logarithmes, le premier de $KL = z = x + \sqrt{xx-aa}$, & le ſecond de $fI = \frac{aa}{z} = x - \sqrt{xx-aa}$, & la moitié de la ſomme $\frac{KL+fI}{2} = KC = fB$, eſt égale à la coupée ED (x) de la courbe BAC ; parceque c'eſt la coupée (x) de la courbe BAC qui ſe trouve dans l'expreſſion $dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$, & dans $z = x \pm \sqrt{xx-aa}$. Enfin en tirant lp & lp, de façon que dC (dy) ſoit égale à lp & à Kp, & la tangente LS, & nommant KL ($x + \sqrt{xx-aa}$) ; Lp ſera $\frac{dx\sqrt{xx-aa}+xdx}{\sqrt{xx-aa}}$; $lp = pK$ ſera, par la conſtruction, $dy = \frac{adz}{z} = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$; & KS ſera $= a$; & l'on aura cette proportion $Lp\ (\frac{dx\sqrt{xx-aa}+xdx}{\sqrt{xx-aa}})$. $lp\ (dy) :: LK\ (x+\sqrt{xx-aa})$. $KS\ (a)$, qui donne l'équation de la courbe $dy = \frac{adx}{\sqrt{xx-aa}}$.

EXEMPLE IV.

2. *SUPPOSANT qu'un corps peſant, étant mû par ſa ſeule peſanteur, doive aller du point* A *au point* K *qui ſont donnés, non pas dans la même verticale, mais dans la droite* AK *qui fait un angle aigu* KAB *avec l'horizontale* ABD ; *trouver la courbe* ACGK *qui doit décrire ce corps par ſa ſeule peſanteur pour aller de* A FIG. LXII.

en K *le plus vîte qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, en y employant le moins de tems qu'il eſt poſſible.*

QU'ON imagine que la courbe qu'on cherche, eſt *ACEGK*; il eſt évident qu'en prenant deux parties voiſines quelconques infiniment petites *CE*, *EG* de la courbe, le mobile doit employer à les parcourir le moindre tems poſſible; car s'il employoit plus de tems à parcourir les deux particules *CE*, *EG*, que deux autres *CH*, *HG* qu'on pourroit imaginer, il eſt clair que la courbe qu'on cherche ſeroit *ACHGK*, & non pas *ACEGK*, contre la ſuppoſition.

Pour réſoudre le Problême, on va chercher par les conditions données une propriété commune à ces deux particules *CE*, *EG*, c'eſt-à-dire qui ſoit exprimée par une même équation, & ce ſera l'équation de la courbe qui exprime une propriété qui convient à chacun de ſes points ou à chacune des parties infiniment petites dont elle eſt compoſée.

On prendra les coupées ſur l'horizontale *ABD*, & les ordonnées ſeront les verticales *BC*, *DE*, *FG*, &c. & ayant pris les deux parties infiniment petites *CE*, *EG*, qu'on conſiderera comme changeantes, on nommera *CE* (*z*), *EG* (*u*); & comme on les ſuppoſe priſes à une hauteur connue, les ordonnées *BC*, *DE* ſeront regardées comme connues; & on nommera *BC* (*b*), *DE* (*e*), & l'on menera les horizontales *CI*, *EL*; on regardera les points *C*, *G* comme donnés de poſition ſur le plan vertical, & *CI*, *EL* auſſi données de poſition; mais les petites parties de la courbe *CE*, *EG* étant regardées comme changeantes, il faut qu'on puiſſe les faire joindre à un point *E* ſur l'horizontale *LE* donnée de poſition; de façon que le tems que le mobile employera à les parcourir, ſoit moindre que le tems qu'il emploiroit à parcourir deux autres petites parties de courbe *CH*, *HG* qui ſe joindroient à un point *H* différent de *E*. Cela ſuppoſé, le mobile étant deſcendu de la hauteur *BC* quand il parcourt *CE*, & de la hauteur *DE* quand il parcourt *EG*, la viteſſe
* 308. avec laquelle il parcourt *CE* doit s'exprimer* par $\sqrt{BC}$ ($\sqrt{b}$), & $\sqrt{DE}$ ($\sqrt{e}$) ſera la viteſſe avec laquelle il parcourt *EG*, &
* 301. le tems qu'il employe à parcourir *CE* s'exprimera par * $\frac{CE}{\sqrt{Ec}}$ ($\frac{z}{\sqrt{b}}$) de même $\frac{EG}{\sqrt{DE}}$ ($\frac{u}{\sqrt{e}}$) exprimera le tems qu'il employe à parcourir *EG*. Or il faut par les conditions du Problême,

que la ſomme de ces deux tems $\frac{z}{\sqrt{b}} + \frac{u}{\sqrt{e}}$ ſoit *un moindre* ; par conſéquent la différentielle de cette expreſſion doit être * égale à zero ; ce qui donne l'équation $\frac{dz}{\sqrt{b}} + \frac{du}{\sqrt{e}} = 0$. * 556.

Qu'on imagine à préſent dans LE prolongée en H la ligne EH infiniment petite par raport à EL, c'eſt-à-dire, que EH eſt un infiniment petit du ſecond genre, puiſque EL, différentielle de la coupée, eſt un infiniment petit du premier genre : Qu'on tire CH, GH, & du centre C avec le rayon CE le petit arc Em qui rencontre CH en m, & de même du centre G avec le rayon GE le petit arc En ; il eſt évident que Hm eſt la différence dz de CE (z) ; & comme CE va en diminuant, étant plus grande que CH de l'excès Hm, Hm eſt une différence négative ; ainſi $Hm = -dz$. De même $Hn = du$, & du eſt poſitive, parceque GE (u) augmente en devenant GH de la différentielle Hn (du). Les angles CEI, HEm ſont égaux, faiſant chacun un angle droit avec l'angle CEH. Les angles HEn, EGL ſont auſſi égaux, faiſant chacun un angle droit avec l'angle GEL ; car, à cauſe du triangle GEL rectangle en L, $EGL + GEL$ font un angle droit, & les trois angles au point E ſur HL, $HEn + nEG + GEL$ faiſant deux angles droits, & nEG étant droit, $HEn + GEL$ valent un angle droit. En prenant HE pour le rayon, Hm ($-dz$) eſt le ſinus de l'angle $HEm = CEI$, & Hn (du) eſt le ſinus de $HEn = EGL$. D'où l'on voit qu'en donnant un rayon égal aux angles CEI, EGL, Hm ($-dz$) eſt à Hn (du) comme le ſinus de CEI au ſinus de EGL.

Si l'on fait donc $Cg = EG$, & qu'on tire gl parallele à EI, l'angle Cgl ſera égal à CEI, & les rayons Cg, EG, étant égaux, Cl ſinus de l'angle Cgl, égal à l'angle CEI, ſera à EL ſinus de EGL, comme $-dz$ eſt à du. Or nommant CI (m), & EL (n), on trouvera (à cauſe des baſes paralleles EI, gl de l'angle ECI) la valeur de Cl par cette proportion CE (z). $Cg = EG$ (u) :: CI (m) . $Cl = \frac{mu}{z}$. On vient de démontrer que Hm ($-dz$) . Hn (du) :: Cl ($\frac{mu}{z}$) . EL (n). Donc $du = -\frac{nzdz}{mu}$. Il faut ſubſtituer cette valeur de du dans l'équation $\frac{dz}{\sqrt{b}} + \frac{du}{\sqrt{e}} = 0$, & elle deviendra $\frac{dz}{\sqrt{b}} - \frac{nzdz}{mu \times \sqrt{e}} = 0$; d'où l'on tire $mu \times \sqrt{e} = nz \times \sqrt{b}$; & diviſant chaque membre par mn, on aura $\frac{z \times \sqrt{b}}{m} = \frac{u \times \sqrt{e}}{n}$; c'eſt-à-dire (en mettant les lignes exprimées par les lettres) $\frac{CE \times \sqrt{EC}}{CI} = \frac{EG \times \sqrt{DE}}{EL}$; ce qui fait

voir que c'eſt une propriété commune à chaque partie infiniment petite de la courbe qu'on cherche, que le produit de cette partie ou de ce petit arc par la racine de ſon ordonnée, diviſé par la différentielle de ſa coupée, eſt, pour chacune, la même grandeur, c'eſt-à-dire égal à une grandeur conſtante; ainſi nommant chaque coupée $AB\,(x)$, chaque ordonnée $BC\,(y)$, chacun des arcs de la courbe (u) à commencer au point A, & la grandeur conſtante $(\sqrt{a})$, *l'équation*

*582. *de la courbe* ſera $\frac{du \times \sqrt{y}}{dx} = \sqrt{a}$; ou bien (à cauſe de * $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$) $\sqrt{y} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \times \sqrt{a}$.

Or on déduit de $\frac{du \times \sqrt{y}}{dx} = \sqrt{a}$, $dx = \frac{du \times \sqrt{y}}{\sqrt{a}}$; ce qui donne $dx^2 = du^2 \times \frac{y}{a}$; & mettant ces valeurs de dx & de dx^2 dans $\sqrt{y} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \times \sqrt{a}$; l'on trouve $\sqrt{y} \times \sqrt{\frac{y}{a} du^2 + dy^2} = du \times \sqrt{y}$, qui ſe réduit à $\overline{a - y} \times du^2 = a dy^2$; d'où l'on déduit $du = dy \times \sqrt{\frac{a}{a-y}}$; prenant les intégrales, on trouve $u = -2 \times a^{\frac{1}{2}} \times \overline{a - y}^{\frac{1}{2}}$, qui devient, en ſuppoſant $a - y$

*456. $= z$, $u = -2\sqrt{az}$, qui eſt l'équation de la cycloïde, * dont le cercle PSR, qui ſert à la former, a ſon diametre $PR = a$, $PQ = y$, $RQ = a - y = z$; la corde $RS = \sqrt{a \times a - y} = \sqrt{az}$; le ſigne négatif fait voir que ce n'eſt pas l'arc AC de la cycloïde, mais l'arc CR, qui eſt $u = -2\sqrt{az}$. D'où l'on voit que la courbe $ACGR$ de la plus prompte deſcente, eſt une cycloïde. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE V.

833. *TROUVER la figure courbe qu'il faut donner à la proüe d'un Vaiſſeau, afin qu'il vogue dans la mer avec la plus grande viteſſe poſſible; ou, ce qui revient au même, afin qu'il trouve dans l'eau de la mer la moindre réſiſtance poſſible.*

FIG. LXIII. ON réduira ici la queſtion à trouver quelle eſt la courbe CEG, qui tournant autour de ſon axe BDF, doit former la ſurface courbe d'un corps qui, allant dans l'eau ſuivant la direction de ſon axe $FDBAN$, trouve, de la part de l'eau, la moindre réſiſtance poſſible.

Il faut prendre, comme dans l'Exemple précédent, deux parties voiſines, chacune infiniment petite, de la courbe, comme CE, EG, & mener les ordonnées BC, DE, FG, &

les paralleles à l'axe, CI, LE. Et comme, en ſuppoſant que la ſurface formée par la courbe ſe meut dans l'eau en repos ſuivant la direction $FDBA$, elle trouve une réſiſtance préciſément égale à l'effort que feroit l'eau, qu'on ſuppoſeroit ſe mouvoir, ſuivant la même direction ABD, vers le côté oppoſé, contre cette même ſurface ſuppoſée en repos; en ſuivant cette derniére ſuppoſition, on prendra, ſur IC prolongée, CK pour la hauteur du volume d'eau qui viendroit heurter contre la zone formée par la révolution de la petite partie CE autour de l'axe BD. La même CK peut auſſi marquer le filet d'eau qui vient frapper le point C; & les paralleles à CK dans le même plan, peuvent marquer les filets d'eau qui viennent pouſſer la petite partie CE.

Or en tirant par C la perpendiculaire pCP à la courbe, & du point K, Kp perpendiculaire ſur Cp, & enfin de p tirant pq perpendiculaire ſur CK, on trouvera ainſi l'expreſſion de l'effort du quadrilatére d'eau frappant perpendiculairement $OC = EI$, & obliquement CE. Si CK exprime l'effort entier de ce quadrilatére d'eau contre OC, on doit prendre pC pour marquer * l'effort de ce même quadrilatére contre CE ſuivant la direction pCP perpendiculaire à CE. Et pC exprimant l'effort de l'eau contre CE ſuivant la direction perpendiculaire CP, la droite qC * doit marquer l'effort de la même eau contre CE ſuivant la direction CI parallele à l'axe BD. * 318. * 318.

D'où l'on voit que l'effort de l'eau contre CO qu'elle rencontre perpendiculairement ſuivant la direction de l'axe, eſt à l'effort de la même eau contre CE ſuivant la même direction CI parallele à l'axe, comme KC eſt à qC, c'eſt-à-dire en raiſon doublée de KC à pC, (car $KC . pC :: pC . qC$.) Or les triangles rectangles CEI, CKp ſont ſemblables, ECI, pCK faiſant enſemble un angle droit (à cauſe des trois angles ICE, ECp, pCK égaux à deux droits, & que ECp eſt lui ſeul un angle droit;) par conſéquent $KC . qC :: \overline{KC}^2 . \overline{pC}^2 :: \overline{CE}^2 . \overline{EI}^2$. On peut donc exprimer le raport de l'effort de l'eau contre CO ou contre ſon égale EI ſuivant la direction de l'axe, à l'effort de la même eau contre CE ſuivant la même direction de l'axe, par $\frac{\overline{CE}^2}{\overline{EI}^2}$. Et comme la réſiſtance de $CO = EI$, & de CE contre l'effort de l'eau qui les pouſſe-

roit ſuivant la direction de l'axe, eſt égale à la réſiſtance que doivent trouver CO & CE en pouſſant elles-mêmes l'eau en repos ; le même raport $\frac{\overline{CE}^3}{\overline{EI}^3}$ exprimera le raport de ces réſiſtances.

Pour avoir à preſent l'expreſſion de la réſiſtance de la zone formée par la révolution de CE autour de l'axe BD, il faut trouver l'expreſſion de la ſurface ou couronne formée par OC ou par ſon égale EI autour de l'axe BD. Pour cela, en ſuppoſant que $\frac{r}{c}$ exprime le raport du rayon à la circonférence, nommant $DI = BC(y)$, & $EI\,(dy)$, & faiſant $r . c :: DE . \frac{c \times DE}{r} = \frac{c \times y + dy}{r}$, ce quatriéme terme exprimera la circonférence dont DE eſt le rayon, & $\frac{1}{2} DE \times \frac{c \times DE}{r} = \frac{c \times \overline{DE}^2}{2r} = \frac{c \times \overline{y+dy}^2}{2r}$ ſera l'aire de ce cercle. De même $\frac{c \times \overline{DI}^2}{2r} = \frac{cy^2}{2r}$ ſera l'aire du cercle dont DI ou $BC\,(y)$ eſt le rayon ; & ôtant le moindre de ces cercles du plus grand, le reſte $\frac{c \times 2ydy + cdy^2}{2r} = \frac{cydy}{r}$ ($à$ cauſe de dy^2 infiniment petite par raport à ydy) ſera la ſurface ou la couronne formée par la révolution de EI autour de l'axe BD ; & remettant les lignes de la figure à la place des lettres, on aura, pour cette ſurface, $\frac{c \times BC \times EI}{r}$. En ſuppoſant la hauteur du ſolide d'eau, que rencontre cette ſurface, égale à l'unité, & la viteſſe de ce ſolide d'eau, dans la ſuppoſition qu'il fût en mouvement, auſſi égale à 1 ; $\frac{c \times BC \times EI}{r}$ ſera l'expreſſion de l'effort de ce ſolide d'eau en mouvement contre cette ſurface en repos, & par conſéquent de la réſiſtance que trouve la ſurface formée par la révolution de EI autour de l'axe BD, en ſuppoſant qu'elle ſe meut contre l'eau en repos. Or le raport, de la réſiſtance de EI à celle de CE ſuivant la direction de l'axe, eſt $\frac{\overline{CE}^3}{\overline{IE}^3}$; faiſant donc cette proportion $\overline{CE}^2 . \overline{EI}^2 :: \frac{c \times BC \times EI}{r} . \frac{c \times \overline{EI}^3 \times BC}{r \times \overline{CE}^2}$, le quatriéme terme $\frac{c \times \overline{EI}^3 \times BC}{r \times \overline{CE}^2}$ ſera l'expreſſion de la réſiſtance que trouve la zone formée par la révolution de CE autour de l'axe BD, à ſe mouvoir dans l'eau ſuivant la direction de l'axe DBA.

Par les mêmes raiſons, $\frac{c \times \overline{GL}^3 \times DE}{r \times \overline{GE}^2}$ ſera la réſiſtance de la

petite

petite zone voiſine formée par la révolution de GE autour du même axe BD.

Ainſi ſuppoſant les changeantes $CE = z$, $GE = u$, & les conſtantes, regardées comme connues par raport à ces deux petites parties de la courbe, $CB = b$, $DE = c$, $EI = f$, $LG = g$, $CI = m$, $EL = n$; la ſomme des reſiſtances des deux petites zones voiſines formées par la révolution de CE, EG autour de l'axe BDF, ſera $\frac{cf^3b}{rzz} + \frac{cg^3e}{ruu}$, ou bien (en diviſant l'un & l'autre terme par $\frac{r}{c}$, ce qui n'en change point la valeur) $\frac{bf^3}{zz} + \frac{eg^3}{uu}$. Or cette ſomme par les conditions du Problême, eſt *un moindre*; par conſequent * ſa differentielle $\frac{bf^3dz}{z^3} + \frac{eg^3du}{u^3} = 0$. * 558

Or en prenant ſur LE prolongée en H, la droite EH infiniment petite par raport à LE, tirant les droites CH, GH, & du centre C avec le rayon CE, le petit arc Em qui rencontre CH prolongée en m, & du centre G avec le rayon GE, l'arc En qui rencontre GH en n; on prouvera, comme dans le Problême précedent, que l'angle $mEH = CEI$, & $nEH = EGL$; que Hm eſt $-dz$, & Hn eſt du; &, en prenant les rayons égaux $cE = GE$, & tirant ci parallele à CI; que $Hm(-dz)$ eſt à $Hn(du)$, comme le ſinus ci de l'angle CEI, eſt au ſinus EL de l'angle EGL; ainſi $CE(z).cE = GE(u) :: CI(m).ci = \frac{mu}{z}$; & $Hm(-dz).Hn(du) :: ci(\frac{mu}{z}).EL(n)$; ce qui donne $du = -\frac{nzdz}{mu}$. Subſtituant cette valeur dans l'équation précedente, elle devient $\frac{bf^3dz}{z^3} - \frac{eg^3nzdz}{mu^4} = 0$, d'où l'on tire $\frac{bf^3m}{z^4} = \frac{eg^3n}{u^4}$; c'eſt-à-dire (en remettant les droites de la figure à la place des lettres) $\frac{CB \times \overline{EI}^3 \times CI}{\overline{CE}^4} = \frac{DE \times \overline{LG}^3 \times EL}{\overline{GE}^4}$; ce qui fait voir, que c'eſt une proprieté commune à chaque partie infiniment petite de la courbe qu'on cherche; que le produit de ſon ordonnée par la troiſiéme puiſſance de la difference de la même ordonnée, & par la difference de ſa coupée, diviſé par la quatriéme puiſſance de cet arc infiniment petit de la courbe, eſt, pour chacun de ces petits arcs, une même grandeur, c'eſt-à-dire, qu'il eſt par tout égal à une même grandeur conſtante.

Ainſi ſuppoſant chaque coupée BD, BF, &c. $= x$, chaque ordonnée BC, DE, FG, &c. $= y$, chacun des arcs finis de la courbe depuis l'origine $= u$, & la conſtante a, *l'équation de la courbe qu'on cherche*, qui exprime une proprieté commune

à chacune des parties infiniment petites de cette courbe, ſera $\frac{ydy^3dx}{du^4} = a$; ou bien $ydy^3dx = adu^4$; ou bien (à cauſe
*582. de $du = {}^{*}\sqrt{dx^2 + dy^2}$) $ydy^3dx = adx^4 + 2adx^2dy^2 + ady^4$. On ſuppoſera, pour ſéparer les changeantes, $dx = \frac{zdy}{a}$; & ſubſtituant les valeurs de dx & de ſes puiſſances dans l'équation, l'on trouvera $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; en prenant les differences, on aura $dy = \frac{3zzdz}{aa} + 2dz - \frac{aadz}{zz}$. Par conſequent $dx = \frac{zdy}{a} = \frac{3z^3dz}{a^3} + \frac{2zdz}{a} - \frac{adz}{z}$; &, prenant les integrales, on trouvera $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - S.\frac{adz}{z}$: d'où l'on voit qu'il faudra ſe ſervir de la logarithmique pour conſtruire la courbe $S.\frac{adz}{z}$ étant le logarithme de z.

Si l'on ſuppoſe $y = 0$, $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$ donnera l'équation $z^4 + 2aazz + a^4 = 0$, où l'on trouvera $zz = -aa$, & $z = \sqrt{-aa}$; cette valeur imaginaire de z, qui vient de la ſuppoſition $y = 0$, fait voir que y ne peut pas être zero, & que la courbe GEC ne rencontre pas ſon axe BD. Pour trouver la *moindre* y, il faut ſuppoſer $dy = 0$; ce qui donnera $dy = \frac{3zzdz}{a^3} + 2dz - \frac{aadz}{zz} = 0$, qui ſe réduit à $z^4 + \frac{2}{3}aazz - \frac{1}{3}a^4 = 0$, d'où l'on tire $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ à l'origine des y & des x ; & ſubſtituant cette valeur de y dans $y = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$, on trouvera que la *moindre* y, à l'origine de la courbe & des x, eſt $y = \frac{16}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on ſuppoſe $x = 0$, & en même temps le logarithme $-S.\frac{adz}{z} = 0$, l'équation $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - S.\frac{adz}{z} = 0$, deviendra $\frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} = 0$; & comme au point de l'axe, où $x = 0$, l'on a trouvé $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; en mettant cette valeur de z dans la derniere équation, l'on trouve la quantité conſtante $+\frac{5}{12}a$;
u 828. ce qui fait voir* qu'il faut ajouter, à l'integrale qui contient la valeur de x, la quantité conſtante $-\frac{5}{12}a$ avec le ſigne $-$, pour avoir l'integrale complete $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12}a - S.\frac{adz}{z}$.

Ces choſes ſuppoſées, voici la maniere de conſtruire la courbe.

Conſtruction de la Courbe.

1°. IL faut tracer la droite $ABDF$ qu'on prendra pour l'axe de la courbe : on en ſuppoſera l'origine au point B, & les

coupées x ſeront BD, BF, &c. on élevera à l'origine B, la perpendiculaire BCT indéterminée des deux côtés ; & ayant pris BM, de la longueur qu'on voudra, pour la conſtante $a = BM$, on fera BC, qui eſt la *moindre* y, $= \frac{16}{3} a \sqrt{\frac{1}{3}}$, & le point C ſera le premier point de la courbe, ou le point qui répond à l'origine des coupées x & des ordonnées y.

2°. Pour avoir chacun des autres points de la courbe, comme le point G, on prolongera BA vers N tant qu'on voudra, on prendra les z ſur cette droite & ſur les paralleles à cette droite, & elles iront de l'origine B vers A & vers N ; & ayant trouvé à l'origine B que $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, on fera $BA = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & l'on tracera par le point A une logarithmique RAS, dont l'axe ou la ligne des logarithmes ſera BT pour les poſitifs S. $\frac{adz}{z}$, & BX pour les négatifs — S. $\frac{adz}{z}$, & dont la ſoutangente, qui ſe doit trouver ſur l'axe TBX, doit partout être égale à la conſtante $a = BM$. Et comme c'eſt une choſe arbitraire de prendre telle ordonnée qu'on voudra pour celle qui doit être à l'origine des logarithmes, on prendra, pour cette conſtruction, $BA = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ pour l'ordonnée de la logarithmique à l'origine B, dont le logarithme eſt zero. Il eſt évident que tous les logarithmes au-deſſus de B, comme BT ou une parallele à BT, comme NR, ſont exprimés par + S. $\frac{adz}{z} = l.\, z$, & que ceux qui ſont au-deſſous de B, comme nr, ſont exprimés par — S. $\frac{adz}{z} = -l.\, z$.

3°. Il ne faut plus, pour trouver chaque point G de la courbe, que prendre BN d'une longueur arbitraire & connue, & la nommer z ; élever par le point N la perpendiculaire NR qui ſera égale au logarithme de BN (car on peut imaginer BN au point R menée de R juſqu'à l'axe BT de la logarithmique) & NR ſera $= +$ S. $\frac{adz}{z}$ ou à $l.\, z$. Il faut enſuite prendre $BF\,(x) = \frac{32z^4}{9a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12}a - NR$, & prendre $BT\,(y) = \frac{z^3}{aa} + 2z + \frac{aa}{z}$; & enfin tirer FG parallele à BT, & TG parallele à ADF ; & il eſt évident que le point G, où ces deux lignes ſe rencontreront, ſera un point de la courbe. *Ce qu'il falloit trouver.* On trouvera les autres points de la courbe de la même maniere.

REMARQUES.

I.

SI l'on tire par M la droite MN, elle ſera parallele à la tangente de la courbe au point G, qu'on a trouvé par le moyen de $BN(z)$; car, par la conſtruction, $dx = \frac{z\,dy}{a}$; d'où l'on tire $GL\,(dy)$. $LE\,(dx)$ :: $BM\,(a)$. $BN\,(z)$: ainſi les angles droits GLE, MBN, ayant leurs côtés proportionnels, les angles G & M ſont égaux, comme auſſi E & N; & par conſequent l'hypotenuſe MN prolongée eſt parallele à l'hypotenuſe GE qui eſt une petite partie de la tangente de la courbe au point G. D'où il ſuit que MA eſt parallele à la tangente au premier point C de la courbe qui répond à l'origine B. D'où l'on voit auſſi que les ſoutangentes des points de la courbe augmentent du côté de N à meſure que ces points s'éloignent de l'origine, & la courbe ſe trouvant entre les tangentes & l'axe, tourne ſa concavité du côté de l'axe BD.

II.

Quand on prend $BN(z)$ plus grande que BA, on décrit la courbe CEG; mais en prenant Bn moindre que BA, on décrit une autre branche de la courbe CV, & il y a un point de rebrouſſement au point C. Les logarithmes nr négatifs $= -\mathrm{S}.\frac{adz}{z} = -l.\,z$, ſe prennent poſitivement pour trouver les coupées $BF\,(x)$; parceque le ſigne du logarithme étant négatif dans la valeur de $x = \frac{3z^4}{4a^3} + \frac{zz}{a} - \frac{5}{12}a - \mathrm{S}.\frac{adz}{z}$, cela marque qu'il faut ôter le logarithme nr; & pour ôter un logarithme négatif, il faut l'ajouter. Cette ſeconde branche CV de la courbe qui ſatisfait au Problême comme la premiere CG, a ſa convexité tournée du côte de l'axe BD; puiſque ſes tangentes étant paralleles aux Mn qui leur répondent, elles ſe trouvent entre cette branche & l'axe BD.

III.

Si l'on fait tourner laquelle on voudra des deux branches de cette courbe autour de l'axe BD, elle formera par ſa révolution la figure qu'il faut donner à la ſurface de la partie de la proue d'un vaiſſeau qui doit être dans l'eau, & le vaiſſeau avec cette figure trouvera dans l'eau la *moindre* reſiſtance poſſible. Si l'on vouloit rendre la proue pointue,

on pourroit y ajouter la figure conique que formeroit la tangente au point *C* parallele à *MA*, par sa revolution autour de l'axe *ABD*.

EXEMPLE VI.

4. *TROUVER sur un plan vertical la courbe* BEFM, *par laquelle un corps* M, *descendant par le seul mouvement que lui donne sa pesanteur, la presse dans chacun de ses points* M *avec une force constante toujours égale au poids de ce corps ; c'est-à-dire, qu'il presse chaque point de cette courbe avec la même force qu'il presseroit le point d'un plan horizontal sur lequel ce corps pesant seroit en repos ; ou, ce qui revient au même, en supposant que la courbe* CHG *est la developpée de la courbe* BEFM *qu'on cherche, il faut que le poids M suspendu à l'extrémité* M *d'un fil* CM *qui enveloppe* CHG, *en descendant librement le long de la courbe* BEFM, *tire, à chaque point* M *de cette courbe, le fil* CM *avec une force constante toujours égale à la force avec laquelle il tireroit le même fil par sa seule pesanteur si ce corps étoit en repos.* FIG. LXIV.

PREPARATIONS POUR LA RESOLUTION.

5. LES Lecteurs voyent bien que chacune des lignes infiniment petites dont on conçoit que la courbe *BEFM* est composé, étant un plan incliné, le corps pesant en décrivant cette petite ligne, ne peut pas la presser avec toute sa pesanteur, mais seulement avec une partie de cette pesanteur qu'il faut déterminer ; & qu'il est nécessaire par conséquent que le corps, en décrivant chaque petite ligne de la courbe, ait, outre sa pesanteur, une autre force (qu'on doit aussi déterminer) qui lui vienne pourtant de sa seule chute ou descente causée par sa pesanteur ; laquelle force étant unie à la partie de la pesanteur du corps qui presse cette même petite partie de la courbe, il se forme, de ces deux forces, un effort toujours égal à l'effort de la pesanteur entiere de ce corps.

6. Pour déterminer la partie de la pesanteur du corps *M* avec laquelle il presse chaque petite ligne *M* de la courbe que l'on cherche, on supposera que cette courbe est *BEFM* ; que l'horizontale *AP* en est l'axe ; que l'origine des coupées *AP* est au point fixe *A* ; que les ordonnées sont *PM* & ses paralleles, toutes perpendiculaires à l'axe *AP* ; que la

developée de cette courbe eſt CHG, que le fil, dont l'extrémité M forme la courbe en ſe developant, eſt CM; ainſi CM
* 507. eſt le rayon de la developée, & par conſequent * perpendiculaire à la courbe $BEFM$ au point M, & la tangente de la developée au point C: & l'on peut concevoir la petite partie de la courbe au point M, comme un arc infiniment petit décrit du centre C avec le rayon CM. Ces choſes ſuppoſées, on prendra ſur l'ordonnée PM qui repréſente toute autre ordonnée, la droite MR d'une longueur arbitraire, qu'on nommera (a), mais toujours de la même grandeur ſur chaque ordonnée, pour marquer l'effort entier de la peſanteur du corps M; on tirera RS perpendiculaire ſur CM.
* 318. Il eſt évident * que MS exprimera la partie de l'effort de la peſanteur avec laquelle le corps M preſſe ce point M de la courbe $BEFM$.

837. Pour déterminer la ſeconde force cauſée par la deſcente du corps peſant M depuis l'horizontale AP, qui doit ſe joindre avec la partie, de l'effort de la ſeule peſanteur, exprimée par MS, afin que les deux enſemble faſſent une force égale à l'effort de la peſanteur entiere exprimée par MR; il faut faire attention à la force où à la viteſſe, (on ne regardera ici le corps M que comme un point, pour ne pas augmenter les difficultés, ainſi ſa force & ſa viteſſe ſont la même choſe;) que le corps M en deſcendant le long de la courbe $BEFM$ depuis l'horizontale AP, acquiert par ſa chute de la hauteur PM; & qu'avec cette viteſſe acquiſe il décrit dans un inſtant la partie Mm infiniment petite de la courbe. Or cette viteſſe ſuivant la petite droite Mm, doit ſe partager en deux parties. Pour les bien diſtinguer, il faut prendre deux parties égales infiniment petites de la courbe des deux côtés du point M, ſçavoir μM & Mm; mener la tangente Mn au point M; faire $Mn = \mu M = Mm$; tirer du centre M avec le rayon Mm le petit arc mn, qu'on peut prendre pour une droite infiniment petite perpendiculaire ſur Mn, & par conſequent parallele au rayon MC de la developée, & tirer mL parallele à Mn, & par conſequent perpendiculaire au rayon CM au point L: & alors on verra
* 317. clairement que la force ſuivante Mm * ſe doit partager en deux, l'une ſuivant la tangente Mn ou ſuivant ſa parallele Lm, laquelle ne preſſe ou ne pouſſe point la courbe, & ne tire

point le fil CM ſuivant la direction CM, étant perpendiculaire à ce fil ; l'autre ſuivant la direction mn ou ſa parallele LM : de maniere qu'en ſuppoſant que Mm marque la viteſſe ou la force entiere ſuivant Mm avec laquelle le corps M décrit cette partie infiniment petite Mm, la petite droite mn où ſon égale LM marquera la partie de cette force ou viteſſe qui agit ſuivant la direction mn ou LM du fil, & qui tire le fil du centre C ſuivant la direction CM. C'eſt par cette ſeconde force ſuivant mn ou LM (qu'on nomme *la force centrifuge*) que le corps M preſſe ou pouſſe la courbe au point M, ou tire le fil CM ; & cette ſeconde force ſuivant mn eſt preciſément la partie de la force acquiſe par la chute du corps M de la hauteur PM, qui étant jointe avec la partie MS de l'effort de ſa ſeule peſanteur conſiderée à part, forme l'effort entier avec lequel le corps M preſſe le point M de la courbe, lequel effort entier doit à tous les points de la courbe être égal à la peſanteur abſolue de ce corps, marquée par MR (a).

8. D'où l'on voit que pour réſoudre le Problême, il faut, 1°. trouver l'expreſſion analytique de l'effort marqué par mn qui convienne à tous les points de la courbe qu'on cherche. 2°. Trouver de même l'expreſſion de la partie de la peſanteur marquée par MS. 3°. Suppoſer la ſomme de ces deux expreſſions égale à la peſanteur abſolue du corps M marquée par MR (a). Voici la maniere de trouver l'expreſſion de l'effort marquée par mn.

9. CM étant le rayon de la developée perpendiculaire à la courbe au point M, on peut concevoir que l'arc infiniment petit Mm de la courbe, eſt auſſi l'arc d'un cercle décrit du centre C par le rayon CM ; (car le fil CM en ſe developant de maniere qu'il ne forme que l'angle infiniment petit MCm, décrit l'arc de cercle Mm,) &, à cauſe de la petiteſſe infinie de cet arc Mm, on peut prendre ce petit arc pour ſa corde. Or le quarré de la corde Mm* eſt égal au produit du diametre entier, c'eſt-à-dire, de $2CM$ par le ſinus verſe de cette corde qui eſt ici $LM = mn$. On aura donc $\overline{Mm}^2 = 2CM \times mn$; d'où l'on déduira $mn = \frac{\overline{Mm}^2}{2CM}$. Mais Mm étant la longueur que décrit la viteſſe qu'a le corps M au point M pendant un inſtant, en nommant cette viteſſe u, on peut pren- * 288.

dre cette longueur Mm pour exprimer cette viteſſe, en ne la comparant avec une autre viteſſe que par le moyen de la longueur que cette autre fait décrire en un inſtant. En nommant auſſi (r) le rayon CM, on aura cette expreſſion de l'effort mn, ſçavoir $mn = \frac{\overline{Mm}^2}{2CM} = \frac{uu}{2r}$. Cette expreſſion de la force centrifuge mn convient à la force centrifuge de tout arc infiniment petit d'un cercle quelconque, & auſſi à la force centrifuge de toute partie infiniment petite d'une courbe par raport au rayon de la developée qui convient à cette petite partie de courbe. Il faut à preſent la déterminer à exprimer la force centrifuge de la courbe de notre Problême, en y faiſant entrer la peſanteur MR (a) & la hauteur PM. Pour le faire d'une maniere qui ne laiſſe aucune obſcurité aux Lecteurs qui commencent, on va démontrer les principes ſuivans que cela ſuppoſe.

Propoſitions démontrées ſur les chutes des corps peſans, en ſuppoſant le milieu ſans réſiſtance.

PREMIER PRINCIPE.

840. Fig. LXV. *SUPPOSE' qu'on marque le temps entier de la chute libre d'un corps peſant par la droite* AD, *dont l'origine ſoit en* A; *que* AB *marque une partie finie, par exemple la moitié de ce temps depuis le commencement de la chute, & qu'on nomme cette partie de temps* (t); AD *double de* AB *marquera* 2t. *Que l'on conçoive cette droite partagée en parties égales infiniment petites* Ah, hk, km, &c. *ces parties ſeront les* dt; *que l'on tire par chaque diviſion les droites paralleles* hi, kl, mn, &c. *& qu'elles ayent entr'elles les mêmes raports que les viteſſes que produit la peſanteur depuis l'origine juſqu'à l'inſtant que termine chacune de ces paralleles; c'eſt-à-dire que* hi *marque la viteſſe que produit la peſanteur dans le premier inſtant marqué par* Ah; kl *la viteſſe qu'elle produit dans les deux premiers inſtans* Ak; mn *la viteſſe qu'elle produit dans les trois premiers inſtans* Am; *& ainſi de ſuite. Or la peſanteur étant regardée comme une cauſe qui demeure toujours conſtante ou la même, & ſuppoſant le milieu ſans réſiſtance, elle doit produire à chaque inſtant une viteſſe égale à celle qu'elle a produite dans le premier inſtant, & aucune de ces viteſſes ne ſe perdant,*

perdant, celle qu'elle a produite dans les premiers instans demeure entiere dans les instans suivans, pendant chacun desquels, outre celle qui demeure, elle en produit toujours une égale à celle du premier instant. Ainsi chaque ordonnée exprime la somme de toutes les vitesses produites depuis le commencement jusqu'à l'instant que termine cette ordonnée, par exemple mn *exprime la somme des vitesses produites pendant les trois premiers instans, marqués par* Am. *Les ordonnées* hi, kl, mn, &c. *sont donc entr'elles comme leurs coupées* Ah, Ak, Am, &c. *la ligne* ACE *qui passe par les extrémités des ordonnées est donc une ligne droite.*

Or à cause de la petitesse infinie de chacun des instans, qu'on suppose égaux, on peut considerer le mouvement du corps qui descend comme uniforme pendant cet instant : ainsi les longueurs parcourues par la vitesse de chacun des instans, sont entr'elles comme les vitesses de ces instans, car * L. l :: Vdt. udt ; *ainsi les longueurs parcourues pendant chaque instant, peuvent être représentées par les vitesses de ces instans, c'est-à-dire, par les mêmes ordonnées, qui représentent les vitesses, multipliées, si l'on veut, chacune par le tems* dt. *Par exemple la longueur parcourue au premier instant sera* hi × dt ; *celle du second sera* ki × dt, &c. *D'où il suit qu'en prenant un tems fini* (t) *marqué par* AB, *la somme de toutes les ordonnées à* AB, *c'est-à-dire, l'aire du triangle* ABC *marquera la longueur que la pesanteur a fait parcourir à un corps pesant depuis le commencement pendant le tems fini marqué par* AB (t). *De même l'aire* ADE *marquera la longueur parcourue pendant* AD (2t). * 302.

Par consequent les longueurs L, l, que la pesanteur fait parcourir par un mouvement acceleré à un corps pesant pendant deux tems finis T, t depuis le commencement de la chute, sont entr'elles comme les quarrés des tems T^2, t^2, employés à les parcourir ; & encore comme les quarrés des vitesses V^2, u^2, produites par la pesanteur pendant ces deux tems-là. *Ce qui convient évidemment à toutes les longueurs parcourues de même pendant les tems finis qu'on voudra.*

SECOND PRINCIPE.

41. *SI le même corps étoit mû d'un mouvement uniforme pendant le premier tems fini* AB (t), *avec la vitesse acquise à la fin de ce tems fini, représentée par* BC (u), *qui demeurât toujours constante sans acceleration ; il est évident que toutes les ordonnées*

à AB, *c'eſt-à-dire, toutes les paralleles à* BC *qui marqueroient les viteſſes de chaque inſtant, & qui repreſenteroient auſſi les longueurs parcourues à chaque inſtant avec cette même viteſſe conſtante, ſeroient toutes égales, & leur ſomme ſeroit l'aire du parallelogramme* BP *double du triangle* ABC. *Par conſequent* ſi un corps étoit mû d'un mouvement uniforme avec la viteſſe conſtante qu'il auroit acquiſe en deſcendant par le ſeul mouvement de la peſanteur pendant tel tems qu'on voudra, il parcoureroit une longueur double de celle qu'il auroit parcourue en deſcendant depuis le repos d'un mouvement acceleré. *C'eſt-à-dire, s'il parcourt* l *pendant le tems* t *d'un mouvement acceleré, il parcourera* 2l *pendant le même tems* t *d'un mouvement uniforme, avec la viteſſe acquiſe à la fin du tems* t; *ainſi** $u = \frac{2l}{t}$, *&* $t = \frac{2l}{u}$.

* 301.

842. *Il faut étendre les deux mêmes principes aux longueurs qu'empêche de parcourir la perte de la viteſſe cauſée par l'action de la peſanteur, lorſque les corps ſont jettés en haut, & que leur mouvement eſt retardé à chaque inſtant.*

TROISIEME PRINCIPE.

843. *LA viteſſe que produit la peſanteur dans le premier inſtant, peut auſſi être conſiderée en deux états; 1°. comme s'acquerant dans le premier inſtant; 2°. comme toute acquiſe à la fin de ce premier inſtant. Dans le premier état, l'aire du petit triangle* Ahi *repréſente (par le premier principe) la longueur qu'elle fait parcourir en s'acquierant pendant la durée du premier inſtant. Dans le ſecond état, l'aire du petit parallelogramme* Ahiq *repréſente (par le ſecond principe) la longueur qu'elle feroit parcourir toute acquiſe, en perſeverant ainſi conſtante, pendant la durée du premier inſtant. Or de la même maniere qu'on regarde les arcs infiniment petits des courbes comme des lignes droites, & qu'on les compare avec des lignes droites, infiniment petites; on peut auſſi, à cauſe de la petiteſſe infinie d'un inſtant, comparer la viteſſe qui s'acquiert pendant cet inſtant avec celle qui eſt acquiſe à la fin du même inſtant, & les regarder l'une & l'autre comme uniformes; par conſequent la viteſſe qui s'acquiert pendant le premier inſtant par l'action de peſanteur, eſt à celle qui eſt acquiſe à la fin de ce premier inſtant, comme la longueur que fait parcourir la premiere, eſt à la longueur que feroit parcourir la ſeconde, en demeurant conſtante & uniforme, pendant le même inſtant: c'eſt-à-dire,* que

la viteſſe que produit la peſanteur pendant le premier inſtant, & qui s'acquiert dans la durée de cet inſtant, eſt à la viteſſe toute acquiſe à la fin de cet inſtant, comme 1 à 2. *En nommant la premiere de ces viteſſes* la peſanteur (p), *parcequ'elle eſt le premier effet de la peſanteur, la ſeconde de ces viteſſes ſera* = 2p.

QUATRIEME PRINCIPE.

4. *D'OU l'on voit que la premiere ordonnée* hi *marque la viteſſe* 2p *acquiſe à la fin du premier inſtant ; la ſeconde* kl *marque la viteſſe* 2p *acquiſe à la fin du premier inſtant, qui ſe conſerve dans tous les inſtans ſuivans ; elle marque encore de plus la viteſſe* 2p *qui eſt acquiſe à la fin du ſecond inſtant : la troiſiéme ordonnée* mn *marque la viteſſe acquiſe à la fin des trois premiers inſtans, qui eſt* $2p+2p+2p=3\times 2p$, *& ainſi de ſuite ; c'eſt-à-dire, que chaque ordonnée repréſente* 2p *multipliée par le nombre des inſtans depuis le commencement. Par conſequent* la viteſſe *(u)* acquiſe depuis le repos dans un tems fini (*t*), eſt égale à $2p\times t$.

CINQUIEME PRINCIPE.

5. *MAIS* $u=^{*}\frac{2l}{t}$; *par conſequent* $\frac{2l}{t}=2pt$; *ce qui donne* $l=ptt$; *c'eſt-à-dire,* la longueur parcourue par la chute d'un corps qui ne reçoit de mouvement que de la peſanteur qui produit la même viteſſe à chaque inſtant de la chute, peut s'exprimer par le produit de la peſanteur *p* & du quarré *tt* du tems employé à la parcourir. * 841.

AVERTISSEMENT.

LES principes qu'on vient de démontrer ſur les chutes des corps peſans par les lignes verticales, conviennent auſſi aux chutes des mêmes corps par des lignes inclinées ſur l'horizon, & aux deſcentes des mêmes mobiles par des lignes courbes : on va le demontrer ici, afin que les Commençans n'ayent pas beſoin de le chercher ailleurs.

SIXIEME PRINCIPE.

6. LA peſanteur entiere d'un corps A, *avec laquelle il tireroit un fil vertical s'il étoit attaché à ſon extrémité, (qui eſt la peſanteur qui produit la chute verticale,)* eſt à la peſanteur du même corps, ſupporté par un plan incliné AE, *(qui eſt la peſanteur qui produit la chute ſur le plan incliné* AE,) com- FIG. LXVI.

me la longueur AE du plan incliné eſt à ſa hauteur AB, terminées l'une & l'autre par l'horizontale BE.

Car en tirant de quel point on voudra e *pris dans la verticale* AB, *la perpendiculaire* eb *à la ligne inclinée* AE, *& faiſant le rectangle* A d e b ; *il eſt évident qu'en prenant* Ae, *pour marquer*
* 317. *la peſanteur abſolue*, * *ou l'effort entier de la peſanteur ſuivant* Ae, *cet effort eſt conçu compoſé des deux efforts, l'un ſuivant* b e, *lequel eſt entierement ſoutenu par le plan incliné auquel cet effort eſt perpendiculaire ; l'autre ſuivant* A b ; *& c'eſt ce ſeul effort qui demeure au corps peſant* A *pour deſcendre ſuivant la direction* A E *du plan incliné. La peſanteur abſolue du corps* A *eſt donc à la peſanteur qui reſte au même corps ſur le plan incliné* AE, *comme* Ae *eſt à* Ab. *Or les deux triangles rectangles* ABE, Abe *ſont ſemblables, ayant l'angle aigu* A *commun ; ainſi* Ae. Ab :: AE. AB ; *par conſequent la peſanteur abſolue du corps* A *eſt à ſa peſanteur ſur le plan incliné* AE, *comme* AE *eſt à* AB.

Ainſi nommant p *la peſanteur abſolue ;* l, *la longueur de la ligne vertical* AB ; i, *la longueur* AE *du plan incliné ; (en ſuppoſant ces deux longueurs entre les mêmes horizontales)* $\frac{lp}{i}$ *ſera l'expreſſion de la partie de la peſanteur du mobile qui lui reſte ſur le plan incliné.*

COROLLAIRE I.

847. *QUOIQU'IL ne reſte à un corps* A *ſur un plan incliné* AE *qu'une partie de ſa peſanteur abſolue, il n'eſt pas moins évident que cette partie agiſſant ſur le corps à tous les inſtans de la deſcente par le plan incliné, les principes qu'on a démontrés à l'égard des chutes verticales, doivent auſſi convenir aux chutes inclinées : ſçavoir, que les longueurs inclinées parcourues par la deſcente libre du mobile, priſes depuis le commencent de la chute, ſeront entre-elles comme les quarrés des tems employés à ces deſcentes, & comme les quarrés des viteſſes acquiſes à la fin de chacune de ces deſcentes ; ainſi nommant les longueurs inclinées* (i), *les viteſſes par ces longueurs* (u), *le tems employé à parcourir ces longueurs* (t), *on aura* $i . 2i :: u^2 . 4u^2 :: tt . 4tt$. *Que ſi le même corps étoit mû par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe pendant la chute inclinée par le mouvement accelerè, il parcoureroit dans le même tems une longueur double de celle qu'il auroit parcourue par la chute accelerée, & ainſi des autres. L'on aura donc* $u = \frac{2i}{t}$, $t = \frac{2i}{u}$, $i = \frac{tu}{2}$.

COROLLAIRE II.

8. *MAIS si l'on veut comparer les chutes verticales avec les chutes inclinées, il faut se servir du sixiéme principe ; par exemple pour trouver les longueurs inclinées & verticales parcourues dans le même tems, en supposant les verticales marquées par l'indeterminée* (m) *& les inclinées par l'indeterminée* (n), *il faut faire cette proportion ;* $p . \frac{lp}{i} :: m . \frac{lm}{i} = n$; *le quatriéme terme* $\frac{lm}{i} = n$ *marquera la longueur* n *qu'il faut prendre sur le plan incliné depuis le commencement de la chute. Ainsi si l'on veut déterminer la longueur inclinée* AC (n) *qui sera parcourue sur le plan incliné* AE (i) *dans le tems de la chute verticale par* AB (l), *il n'y a qu'à mettre* l (AB) *à la place de* m *dans* $\frac{lm}{i}$, *& l'on aura* $\frac{ll}{i} = \frac{AB \times AB}{AE}$ *pour la longueur* AC ; *ce qui fait voir qu'en tirant* BC *perpendiculaire à* AE, *elle déterminera la longueur* AC, *puisque* $AC = \frac{AB \times AB}{AB}$.

9. *Si l'on veut sçavoir la viteſſe qu'aura acquiſe le corps peſant* A *lorſqu'il ſera arrivé à l'horizontale* E B, *après avoir deſcendu librement par le plan incliné* AE (i) ; *on nommera cette viteſſe* (u) ; *le temps employé à deſcendre* (t) ; *on nommera auſſi* v *la viteſſe par la verticale* AB (l) ; *le tems de la chute par* AB (T) ; *& on remarquera que, ſuivant le ſecond Corollaire, le temps* T *par* AB (l) *eſt le même que le tems par* AC $(\frac{ll}{i})$. *On fera enſuite cette proportion* * AC $(\frac{ll}{i})$. AE (i) :: TT. tt ; *mais* ¶ $t = \frac{2i}{u}$, † $T = \frac{2l}{v}$. *Mettant ces valeurs de* t *& de* T *dans les deux derniers termes de la proportion, elle deviendra* $\frac{ll}{i} . i :: \frac{4ll}{vv} . \frac{4ii}{uu}$; *d'où l'on tire* $\frac{1}{vv} = \frac{1}{uu}$, *& par conſequent* v = u : *ce qui donne le ſeptiéme principe.*

* 847.
¶ 847.
† 841.

SEPTIÈME PRINCIPE.

10. LA viteſſe acquiſe par un corps peſant qui eſt deſcendu librement ſur un plan incliné, eſt égale à la viteſſe qu'il auroit acquiſe par la chute perpendiculaire ou verticale d'une même hauteur. *Ainſi la viteſſe acquiſe par la chute verticale ſe pouvant exprimer par la racine de la hauteur, c'eſt-à-dire,* $v = \sqrt{l}$, *la viteſſe par un plan incliné de la même hauteur ſe pourra auſſi exprimer par* $u = \sqrt{l}$.

On pourroit déduire immédiatement le même principe du ſixiéme, de cette façon : $v = {}^{*} 2pT$. *En mettant pour la chute inclinée* $\frac{1p}{i}$ *au lieu de* p, u *au lieu de* v, *&* t *au lieu de* T, *l'on aura* $u = \frac{2ipt}{i}$. *Par conſequent* $v . u :: 2pT . \frac{2ipt}{i} :: T . \frac{1t}{i}$. *Mais* $T = \frac{2i}{v}$, *&* $t = \frac{2i}{u}$. *Mettant ces valeurs dans les deux derniers termes, on aura* $v . u :: \frac{2i}{v} . \frac{2i}{u} :: \frac{1}{v} . \frac{1}{u}$; *ce qui donne* $vv = uu$, *& par conſequent* $v = u$.

Voici l'application aux chutes par les courbes de ce qu'on vient de démontrer des chutes par un plan incliné.

851. *Quand un plan incliné* AE *ne fait qu'un angle infiniment petit* EAF *avec un autre plan incliné* AF, *l'excès, dont l'effort, de la peſanteur qu'a un corps* A *ſur le premier* AE, *ſurpaſſe l'effort de la peſanteur du même corps ſur le ſecond* AF, *n'eſt qu'une differentielle du ſecond genre par raport à l'effort de la peſanteur du corps* A *ſur le premier* AE.

FIGURE LXVII.

Car ayant pris AG *pour marquer l'effort de la peſanteur du corps* A *ſur le plan incliné* AE, *& tiré* GH *perpendiculaire ſur* AF, *il eſt certain* que* AH *repréſente l'effort de la peſanteur qui reſte au corps* A *ſur le ſecond plan incliné* AF. *Or en tirant du centre* A *avec le rayon* AH *le petit arc* HK *qui rencontre* AG *en* K, KG *ſera l'excès dont l'effort de la peſanteur du corps* A *ſur* AE *ſurpaſſe l'effort de la peſanteur du même corps* A *ſur* AF. *Il reſte donc à prouver que* KG *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à* AG. *Pour le voir clairement, il n'y a qu'à conſiderer que l'angle* HAG *étant infiniment petit, l'arc* HK *qui en eſt la meſure, eſt infiniment petit par raport au rayon* AH *ou* AK; *car s'il avoit un raport fini avec ce rayon, l'angle ne ſeroit pas infiniment petit. On peut donc prendre le petit arc* HK *pour une perpendiculaire du ſommet* H *de l'angle droit* AHG *ſur ſon hypotenuſe* AG; *ce qui donne cette proportion* AK . KH :: KH . KG. *On vient de voir que* KH *eſt une quantité infiniment petite du premier genre par raport à* AK; *par conſequent* KG *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à* AK *& à* AG *qui repréſente l'effort de la peſanteur du corps* A *ſur* AE.

* 844. * 841. * 317.

852. *Si un corps peſant deſcend par le ſeul mouvement de ſa peſanteur ſur un plan incliné* FG, *il aura au point* G *la viteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant verticalement d'une égale hauteur, & il continueroit enſuite de ſe mouvoir ſur le même plan*

FIGURE LXVIII.

incliné en conſervant la viteſſe acquiſe, & ſa peſanteur lui en feroit encore acquerir à chaque inſtant : Or ſuppoſé qu'il rencontre au point G *un nouveau plan incliné* GE *tel qu'il faſſe avec le premier l'angle aigu* KGE *infiniment petit, l'excès, dont la viteſſe, avec laquelle il continueroit de deſcendre ſur le premier plan* FGK, *ſurpaſſe celle qu'il aura en continuant ſa deſcente par le ſecond* GE, *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à la viteſſe qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* FG.

Car ſi l'on ſuppoſe que GH *repréſente la viteſſe qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* FGH, *& de plus celle qu'il recevroit de ſa peſanteur, & qu'on tire* HE *perpendiculaire ſur le ſecond plan* GE ; *il eſt évident que* GE *repréſentera la viteſſe qu'il aura en même tems ſur le ſecond plan ; & que le raport de* GH *à* GE *eſt égal au raport de la viteſſe, qu'il auroit en continuant ſon chemin ſur le premier plan* GH, *avec la viteſſe qu'il aura dans le même tems ſur le ſecond plan* GE. *Qu'on tire à preſent du centre* G *avec le rayon* GE *le petit arc* EK, *qu'on peut regarder comme une petite droite tirée perpendiculairement du ſommet* E *de l'angle droit* GEH *ſur* GH ; *&* KH *ſera l'excès, dont la viteſſe du corps qui deſcendroit par* GH, *ſurpaſſe la viteſſe du même corps qui deſcend par* GE. *Mais* GK. KE :: KE. KH ; *&* KE* *eſt une differentielle du premier genre par raport à* GK *&* GH ; *par conſequent* KH *eſt une differentielle du ſecond genre par raport à* GK *&* GH. * 851.

Or les courbes peuvent être regardées comme des poligones d'une infinité de côtés qui ſont deux à deux des angles aigus infiniment petits. Ainſi un corps peſant, qui deſcend ſur une courbe, peut être regardé comme deſcendant par une infinité de plans inclinés, dont les angles aigus ſont infiniment petits. Ce qui donne le huitiéme principe.

HUITIEME PRINCIPE.

3. LEs viteſſes d'un corps, qui deſcend ſur une courbe par le ſeul mouvement de ſa peſanteur, priſes à chaque point de cette courbe, peuvent être exprimées par les racines de hauteurs depuis l'horizontale, qui paſſe par le commencement de la chute, juſqu'à ces points là. *Ainſi ſi l'on repreſente les hauteurs changeantes de ces points par* (1), *& les viteſſes par* u ; *on aura* $u = \sqrt{1}$ *pour l'expreſſion de la viteſ-*

ſe, qu'a le corps qui deſcend, à chaque point de la courbe.

Car, s'il deſcendoit par un même plan incliné, les viteſſes, qu'il auroit à chaque point, ſeroient, par le ſeptiéme principe, $u = \sqrt{l}$. *Or en deſcendant par la courbe, il aura, à tous les points qui ſont à la même hauteur que les points correſpondans du plan incliné que feroit la tangente de la courbe au point où commence la deſcente, la même viteſſe qu'il auroit à tous ces points correſpondans du plan incliné; puiſque les differentielles, qui feroient l'excès des viteſſes aux points du plan incliné ſur les viteſſes aux points correſpondans de la courbe, ſont du ſecond genre, dont un nombre infini, égal au nombre des angles des petits côtés de la courbe, ne fait qu'une differentielle du premier genre, ainſi elle ne peut avoir de raport fini avec ces viteſſes, & elle ne peut empêcher qu'elles ne ſoient égales.*

COROLLAIRE.

854. *D'OU l'on voit que les expreſſions des viteſſes des chutes verticales d'un corps peſant, conviennent aux viteſſes des deſcentes du même corps ſur des courbes, en prenant les unes & les autres la même hauteur.*

855. *Il ſuit de tous ces principes, & de l'article* 839, *qu'en nommant la force centrifuge* mn (c), *&* (r) *le rayon* CM *de l'arc circulaire infiniment petit dont* mn *eſt la force centrifuge, on aura toutes ces expreſſions,* $c = \frac{uu}{2r}$, $u = 2pt$, $p = \frac{u}{2c}$, $t = \frac{2l}{u}$, $u = \frac{2l}{t}$, $l = ptt$, &c. *Ceux qui veulent s'appliquer aux Problèmes où entrent les forces centrifuges, & à ceux où entre la peſanteur, doivent ſe rendre très-familieres ces expreſſions & leurs démonſtrations.*

FIGURE LXIV.

856. *L'on en déduit cette expreſſion de la force centrifuge où entre la peſanteur; la force centrifuge* mn (c) $= \frac{uu}{2r} =$ (*à cauſe de* $u = 2pt$) $\frac{2pptt}{r} =$ (*à cauſe de* $l = ptt$) $\frac{2lp}{r}$; *ce qui donne auſſi le raport de la force centrifuge* (c) *à la peſanteur* (p), c. p :: 2l. r. *Ces choſes ſuppoſées, voici l'expreſſion analytique de l'effort centrifuge* mn *par raport à notre Problème, c'eſt-à-dire par raport à tous les points de la courbe* BEFM *que l'on cherche.*

857. Nommant les coupées *AP (x)*, les ordonnées *PM (y)*, les arcs finis *BEFM (u)*, la peſanteur abſolue repreſentée par *MR (a)*; prenant la petite partie *Mm* de la courbe qui ſera *(du)*, & menant l'ordonnée infiniment proche *mp*, & tirant *MK* perpendiculaire ſur *mp*; l'on aura $MK = dx$, $Km = dy$;

$Km = dy$; le rayon de la développée MC sera, en supposant du constante, $*\frac{dy\,du}{ddx}$, (car on retient ici du au lieu de sa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$, qui est dans la seconde formule de l'art. 570,) & il est évident que les lettres de la formule de la force centrifuge $mn\,(c) = \frac{2lp}{r}$, où entrent la pesanteur & le rayon de la développée, représenteront, l la hauteur $PM\,(y)$; p, la pesanteur marquée par $MR\,(a)$; r, le rayon de la développée $CM\,(\frac{dy\,du}{ddx})$; & mettant ces valeurs au lieu des lettres de la formule, l'on trouvera $mn = \frac{2PM \times MR}{CM} = \frac{2ay\,ddx}{dy\,du}$ pour l'expression de la force centrifuge mn qui convient à tous les points de la courbe que l'on cherche. *570.

358. Voici à présent la maniere de trouver l'expression analytique de la partie de la pesanteur représentée par MS. Les deux triangles MSR, MKm, rectangles en S & en K, sont semblables; car les angles RMS, mMK, faisant chacun un angle droit avec l'angle CMK, sont égaux; ce qui donne cette proportion $Mm\,(du).\,MK\,(dx) :: MR\,(a).\,MS = \frac{a\,dx}{du}$.

359. Or par les conditions du Problême, $mn = \frac{2PM \times MR}{CM}\,(\frac{2ay\,ddx}{dy\,du}) + MS\,(\frac{a\,dx}{du}) = MR\,(a)$; ainsi l'équation, qui doit donner la résolution du Problême, est $\frac{2y\,ddx}{dy\,du} + \frac{a\,dx}{du} = a$.

RESOLUTION.

360. L'EQUATION précedente donne $2yddx + dydx = dudy$. Multipliant chaque terme par $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, il vient $y^{\frac{1}{2}}\,ddx + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\,dydx = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\,du\,dy$. Prenant les integrales de chaque membre, en supposant du constante, on trouve par la seconde proposition fondamentale*, $y^{\frac{1}{2}}\,dx = y^{\frac{1}{2}}\,du$. (Car en regardant $y^{\frac{1}{2}} \times dx$ comme le produit des deux changeantes $y^{\frac{1}{2}}$ & dx, sa differentielle en est le premier membre $y^{\frac{1}{2}}\,ddx + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\,dy \times dx$; &, à cause de du constante, la differentielle de $y^{\frac{1}{2}}\,du$ est le second membre $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\,dy \times du$.). Mais cette équation, étant divisée par $y^{\frac{1}{2}}$ donne $dx = du$; ce qui ne peut pas être, puisque dans le triangle rectangle MKm, $Mm\,(du)$ qui en est l'hypotenuse, doit surpasser $MK\,(dx)$ *714.

qui eſt l'un des côtés. Cela fait voir que l'integrale, qu'on vient de trouver $y^{\frac{1}{2}}\,dx = y^{\frac{1}{2}}\,du$, n'eſt pas complete; ainſi pour la rendre complete, il faut retrancher une grandeur conſtante du ſecond membre pour le rendre égal au premier. On prendra pour cette grandeur conſtante $a^{\frac{1}{2}}\,du$, & l'équation ſera $y^{\frac{1}{2}}\,dx = y^{\frac{1}{2}}\,du - a^{\frac{1}{2}}\,du$. Car on en déduit $dx = du - a^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,du$; & prenant les differences, en ſuppoſant du conſtante, on trouve $ddx = \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}}\,du\,dy = \frac{du\,dy\sqrt{a}}{2y\sqrt{y}}$. Mettant cette valeur de ddx dans $MC = \frac{du\,dy}{ddx}$, l'on a $MC = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$; & ſubſtituant ces valeurs de dx, de ddx, & de MC dans l'équation $\frac{2PM \times MR}{CM} + MS = MR$, qui eſt $\frac{2a\,y\,ddx}{du\,dy} + \frac{a\,dx}{du} = a$, elle devient $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{y}} - \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{y}} + a = a$; c'eſt-à-dire, le premier membre devient preciſément égal au ſecond. Ce qui fait voir que l'équation $y^{\frac{1}{2}}\,dx = y^{\frac{1}{2}}\,du - a^{\frac{1}{2}}\,du$, eſt celle qui exprime la proprieté de la courbe que l'on cherche. Or en mettant au lieu de du ſa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$, elle devient $y^{\frac{1}{2}}\,dx = y^{\frac{1}{2}} - a \times \sqrt{dx^2+dy^2}$; en élevant chaque membre au quarré, l'on a, après avoir abregé & tranſpoſé, $dx^2 \times 2\sqrt{ay} - a = dy^2 \times y + a - 2\sqrt{ay}$; d'où l'on tire $dx\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = dy\sqrt{y + a - 2\sqrt{ay}}$: mais $\sqrt{y} - \sqrt{a}$ eſt la racine quarrée de $y + a - 2\sqrt{a}\,y$; ainſi $dx\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = dy \times \sqrt{y} - \sqrt{a}$; d'où l'on déduit $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$. C'eſt l'équation differentielle de la courbe que l'on cherche, qui ne contient pas d'autres changeantes que celles des coupées & des ordonnées.

1661. Pour trouver les integrales, on ſuppoſera* $z = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; ce qui donnera $z^2 = 2\sqrt{ay} - a$; $\sqrt{ay} = \frac{z^2+a}{2}$; $ay = \frac{\overline{z^2+a}^2}{4}$; $y = \frac{\overline{z^2+a}^2}{4a}$; $dy = \frac{z^2+a}{a} \times z\,dz$, & $\sqrt{y} = \frac{z^2+a}{2\sqrt{a}}$. On ſubſtituera ces valeurs de y & de dy dans l'équation, & elle deviendra d'abord $dx = \frac{\frac{\overline{z^2+a}^2}{2a\sqrt{a}} \times z\,dz - \sqrt{a} \times \frac{z^2+a}{a} \times z\,dz}{z}$, qui ſe réduira, après avoir diviſé le numerateur & le dénominateur par z,

& fait le calcul, à $dx = \frac{z^4 dz}{2a\sqrt{a}} + \frac{2az^2 dz}{2a\sqrt{a}} + \frac{a^2 dz}{2a\sqrt{a}}$; d'où l'on déduit $2a\sqrt{a} \times dx = z^4 dz - a^2 dz$; prenant les integrales, on trouve l'équation $2ax\sqrt{a} = \frac{z^5}{5} - a^2 z$, dans laquelle $- \frac{az^2 dz}{\sqrt{a}} - \frac{a^2 dz}{\sqrt{a}}$

substituant la valeur de z en y, il vient $\frac{\overline{4y - 4a\sqrt{ay} + a^2}}{5} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a} - aa\sqrt{2\sqrt{ay} - a} = 2ax\sqrt{a}$, qui se réduit en multipliant par 5 & divisant par $2a$, à $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a} = 5x\sqrt{a}$. Multipliant chaque membre par $\sqrt{a}$, on aura enfin $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$, *pour l'équation de la courbe* BEFM. *Ce qu'il falloit trouver.*

Cette équation, qui n'a plus de differences, & qui exprime le raport de tous les points de la courbe par des coordonnées qui sont des lignes droites, fait voir que la courbe est geometrique ; il n'y a qu'à ôter les incommensurables, & l'on verra de quel genre elle est : on peut la décrire par la méthode generale de l'article 424.

REMARQUES.

DANS les Problêmes, où l'on cherche la nature des courbes, quand on a trouvé les équations qui les expriment, on peut ensuite découvrir par le moyen de ces équations les proprietés de ces courbes. On va découvrir par l'équation de la courbe de ce sixiéme Exemple quelques-unes de ses proprietés, pour apprendre aux Lecteurs qui commencent la maniere de le faire dans les autres Exemples qu'ils pourront rencontrer.

1°. Si l'on suppose dans l'équation de la courbe $x = 0$, l'autre membre deviendra aussi égal à zero ; ce second membre est composé des deux équations $\sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 0$, $2y - 2\sqrt{ay} - 2a = 0$, multipliées l'une par l'autre. Or la premiere, en ôtant les incommensurables, donne $y = \frac{1}{4}a$; ce qui fait connoître que l'ordonnée AB (y) a une valeur à l'origine des x, laquelle est égale à $\frac{1}{4}a$; ôtant les incommensurables de la seconde, on trouve l'équation $y^2 - 3ay + a^2 = 0$, dont la plus grande racine est $y = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$, qui fait voir que l'ordonnée ABF, à l'origine A, rencontre en-

core la courbe en un point F, de maniere que $AF = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{5}$; & ne ſe trouvant aucune valeur de y, à l'origine A des x qui ſoit égale à zero ; cela fait voir que la courbe ne rencontre pas l'axe AP.

2°. Si l'on veut trouver la moindre y, on ſéparera, dans l'équation differentielle de la courbe, dy des autres quantités qu'on mettra dans le ſecond membre, & cette équation $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ deviendra $dy = dx \times \frac{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}{\sqrt{y} - \sqrt{a}}$. On

*556. ſuppoſera $dy = 0$ *, & l'on trouvera, en faiſant le calcul, $y = \frac{1}{4}a$. On mettra cette valeur de y dans l'équation de la courbe $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$; & comme le multiplicateur $\sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}$ devient zero par cette ſubſtitution, le premier membre eſt égal à zero, & par conſequent le ſecond ; ce qui donne $x = 0$: d'où l'on voit que la moindre ordonnée $AB\,(y)$ eſt $= \frac{1}{4}a$ à l'origine des x, & que la courbe ne commence qu'au point B ; ainſi le corps M, en commençant à décrire la courbe $BEFM$ au point B, doit déja avoir la viteſſe acquiſe par la chûte $AB = \frac{1}{4}a$.

3°. Si l'on ſuppoſe $dx = 0$ dans l'équation differentielle de la courbe $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$ (ce qui arrive au point de la courbe, où y eſt une tangente de la courbe, & où ſe trouve

*556. la plus grande x *) on aura $\sqrt{y} - \sqrt{a} = 0$, ce qui donne $y = a$. D'où l'on voit, qu'en prenant à l'origine A, $AD = a$, & menant par D la droite $ED\,(x)$ parallele à l'axe AP, cette droite ED ſera la plus grande des x pour tous les points de l'arc BEF. En mettant a au lieu de y dans l'équation de la courbe $\overline{2y - 2\sqrt{ay} - 2a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa} = 5ax$, on trouve $-2aa = 5ax$; d'où l'on tire $x = -\frac{2}{5}a$. Cela fait voir que $DE\,(x)$ au point D, où $AD\,(y) = a$, eſt égale à $-\frac{2}{5}a$, & le ſigne négatif montre que $DE\,(x) = -\frac{2}{5}a$, doit être priſe vers la gauche de AD, & qu'ainſi le point E eſt celui de tous les points de l'arc BEF qui eſt le plus éloigné de $ADF\,(y)$.

4°. L'équation differentielle de la courbe donne $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{ay} - a}}$; multipliant l'un & l'autre membre par y l'on aura la

*550. ſoutangente de chaque point de la courbe * $\frac{ydx}{dy} = \frac{y\sqrt{y} - y\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$.

5°. Si l'on met, dans $\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{y-\sqrt{a}}}{\sqrt{2\sqrt{ay}-a}}$, la valeur de $AB(y)$ qui eſt $\frac{1}{4}a$, le dénominateur deviendra $\sqrt{a-a} = 0$. Cela fait voir qu'au point B, où commence la courbe, dx eſt infinie par raport à dy ; & par conſequent que * la tangente au point B devient parallele à la ſoutangente, c'eſt-à-dire aux x ou à l'axe AP : ainſi la tangente au point B eſt perpendiculaire à AB, & la partie infiniment petite de la courbe au point B étant une partie de la tangente au point B, cette petite partie, & par conſequent la courbe, rencontre perpendiculairement AB au point B. *554.

6°. Si l'on ſuppoſe y infinie dans l'équation de la courbe $\frac{2y-2\sqrt{ay}-2a}{5a} \times \sqrt{\frac{2a\sqrt{ay}-aa}{5a}} = x$, elle deviendra $\frac{2y-2\sqrt{ay}}{5a} \times \sqrt{\frac{2a\sqrt{ay}}{5a}} = x$, les grandeurs $-2a$ & $-aa$ étant zero par raport aux autres où ſe trouve y ; & par la même raiſon le numerateur du premier membre eſt infini par raport à ſon dénominateur ; ainſi x eſt auſſi infinie. Cela fait voir que la courbe ne va pas en s'approchant de ſon axe, mais qu'elle s'en écarte à l'infini.

7°. On a trouvé dans la réſolution du Problême, le rayon de la développée $MC = \frac{dxdy}{ddx} = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$: ce qui donne $\sqrt{AD}(\sqrt{a}) . \sqrt{PM}(\sqrt{y}) :: 2PM(2y) . MC(\frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}})$. Subſtituant dans cette valeur de MC celle de $AB(y)$ au point A qui eſt $\frac{1}{4}a$, l'on trouve $MC = \frac{1}{4}a$; ce qui apprend que le rayon de la développée MC devient $GB = \frac{1}{4}a$ au commencement de la courbe où $y = AB = \frac{1}{4}a$, & que le fil CM, qui envelope la développée CHG, & dont l'extrémité décrit, par le developement, la courbe $BEFM$, doit ſurpaſſer la longueur de cette développée de la droite $GB = \frac{1}{4}a$.

Si l'on ſubſtitue, dans $MC = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, la valeur a de $AD(y)$ l'on trouvera $MC = 2a$; ce qui fait connoître que le rayon de la développée HDE, qui paſſe par l'extrémité D de $AD(y) = \frac{1}{4}a$, eſt égal à $2a$. Ce rayon de la développée HDE coupe perpendiculairement AD ; car l'on a vû (*nombre* 3°) que dx eſt zero au point E par raport à dy ; par conſequent * la tangente de la courbe au point E eſt parallele aux y, c'eſt-à-dire à AD. Mais le rayon de la développée HDE eſt perpendiculaire à la tangente au point E ; HDE eſt donc auſſi perpendiculaire à AD. *554.

8°. Si l'on veut chercher la rectification de tel arc qu'on
* 582. voudra de la courbe $BEFM$, on se servira de la formule * $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, qui donnera $du^2 = dx^2 + dy^2$; on prendra la valeur de dx^2 dans l'équation differentielle de la courbe $BEFM$, $dx = \frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, & l'on aura $dx^2 = dy^2 \times \frac{y + a - 2\sqrt{ay}}{2\sqrt{ay} - a}$: on substituera cette valeur de dx^2 dans $du^2 = dx^2 + dy^2$, & l'on trouvera $du^2 = \frac{y\,dy^2}{2\sqrt{ay} - a}$; d'où l'on tirera $du = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$.

Il faut à present trouver l'integrale du second membre. On
* 661. supposera pour cela * $z = \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; ce qui donnera $z^2 = 2\sqrt{ay} - a$, $\frac{z^2 + a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{y}$, $\frac{z^4 + a^2}{4a^2} = y$, $dy = \frac{z^3 + a}{a} \times z\,dz$. On substituera les valeurs de y & de dy dans $du = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{2\sqrt{ay} - a}}$, & l'on trouvera, après avoir fait le calcul, $du = \frac{z^4 dz + 2az^2 dz + a^2 dz}{2a\sqrt{a}}$. On prendra les integrales, & l'on aura $u = \frac{z^5}{5 \times 2a\sqrt{a}} + \frac{az^3}{3a\sqrt{a}} + \frac{a^2 z}{2a\sqrt{a}}$. On mettra dans cette équation les valeurs de z^5, z^3, z, en y; & en faisant le calcul, on trouvera $u = \frac{6y + 4\sqrt{ay} + 4a}{15\sqrt{a}} \times \sqrt{2\sqrt{ay} - a}$; & multipliant le numerateur & le dénominateur du second membre par $\sqrt{a}$, on aura enfin l'arc $BEFM(u) = \frac{6y + 4\sqrt{ay} + 4a}{15a} \times \sqrt{2a\sqrt{ay} - a^2}$. Et comme y est égale à (a) au point E, si l'on met (a) à la place de y, on trouvera l'arc $BE = \frac{14}{15}a$.

9°. Si l'on veut sçavoir la quadrature de l'espace $BEFMCHGB$ compris entre un arc quelconque $BEFM$ de la courbe $BEFM$, la développée $BGHC$ & le rayon CM de la développée, lequel rayon termine l'arc $BEFM$ de la courbe, & la partie $BGHC$ de la développée qui a servi à former l'arc $BEFM$; on remarquera que cet espace peut être conçu comme composé de petits triangles tels que MCm, formés chacun par deux rayons de la développée infiniment proches l'un de l'autre, & dont la base est un arc infiniment petit, comme Mm, de la courbe. Ainsi tout ce qu'il y a à faire est, 1°. de trouver l'expression qui convient à chacun de ces petits triangles, & ce sera l'élement de l'aire que l'on cherche. 2°. Il faut ensuite trouver l'integrale de cet élement, & elle exprimera la quadrature que l'on cherche.

Or le petit triangle $MCm = CM \times \frac{1}{2}Mm$; & comme on a trouvé, dans la résolution, $CM = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, & que $Mm = du$,

l'on aura $CM \times \frac{1}{2} Mm = \frac{2y\sqrt{y}}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{2} du = du \times \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$. Mais l'équation * $dx\sqrt{y} = du\sqrt{y} - du\sqrt{a}$, donne $du = \frac{dx\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{a}}$; *866.
en mettant cette valeur dans $du \times \frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{a}}$, il vient $\frac{y^2 dx}{\sqrt{ay}-a}$, où
substituant au lieu de dx sa valeur prise de $dx = \frac{dy\sqrt{y}-dy\sqrt{a}}{\sqrt{2}\sqrt{ay}-a}$;
on trouve, après avoir fait le calcul, $\frac{y^2 dy}{\sqrt{2a}\sqrt{ay}-aa} = CM \times \frac{1}{2} Mm$. C'est l'élement de l'aire que l'on cherche.

Pour avoir l'integrale de cet élement, on suppose * z *661.
$= \sqrt{2a\sqrt{ay}-aa}$; ce qui donnera $\frac{z^2+a^2}{2a} = \sqrt{ay}$, $\frac{\overline{z^2+a^2}^2}{4a^3} = y$,
$dy = \frac{\overline{z^2+a^2} \times zdz}{a^3}$. On substituera les valeurs de y & de dy en z dans l'élement de l'aire, & après avoir fait le calcul,
on trouvera $\frac{y^2 dy}{\sqrt{2a}\sqrt{ay}-aa} = \frac{\overline{z^2+a^2}^5}{16a^9} \times dz = \frac{z^{10}dz + 5a^2z^8dz}{16a^9}$
$+ 10a^4z^6dz + 10a^6z^4dz + 5a^8z^2dz + a^{10}dz$. On prendra les integrales,
& l'on aura $z \times \frac{z^{10}}{11 \times 16a^9} + \frac{5z^8}{9 \times 16a^7} + \frac{10z^6}{7 \times 16a^5} + \frac{10z^4}{5 \times 16a^3} + \frac{5z^2}{3 \times 16a} + \frac{a}{16}$. *654.
On substituera les valeurs de z en y, suivant les suppositions qu'on a faites, & l'on trouvera $\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa} \times \frac{\overline{2a\sqrt{ay}-aa}^5}{11 \times 16a^9} +$
$\frac{5 \times \overline{2a\sqrt{ay}-aa}^4}{9 \times 16a^7} + \frac{10 \times \overline{2a\sqrt{ay}-aa}^3}{7 \times 16a^5} + \frac{10 \times \overline{2a\sqrt{ay}-aa}^2}{5 \times 16a^3} + \frac{5 \times \overline{2a\sqrt{ay}-aa}}{3 \times 16a} + \frac{a}{16}$;
c'est l'integrale qui exprime l'aire que l'on cherche. Si l'on veut se donner la peine de former toutes les puissances de $2a\sqrt{ay}-aa$ qui sont marquées dans l'integrale, les ordonnant de façon que toutes les grandeurs correspondantes qui appartiennent à un même terme soient les unes sous les autres, & réduisant à un même dénominateur toutes les grandeurs de chaque terme, on trouvera $\sqrt{2a\sqrt{ay}-aa} \times$
$\frac{2}{11}\sqrt{\frac{y^5}{a^3}} + \frac{10}{11 \times 9} \times \frac{yy}{a} + \frac{5 \times 8}{11 \times 9 \times 7} \times \sqrt{\frac{y^3}{a}} + \frac{5 \times 4 \times 6}{11 \times 9 \times 7 \times 5} \times y$
$+ \frac{10 \times 6 \times 4}{11 \times 9 \times 7 \times 5 \times 3} \times \overline{a+\sqrt{ay}}$ pour l'expression de l'aire *BEFMCHGB*, *qu'il falloit trouver.*

Additions qui regardent la pratique des horloges.

PREMIERE ADDITION.

Ajoutez à la fin de l'article 511, page 150, ce qui ſuit :

LE temps de la deſcente du centre de peſanteur ou du centre d'oſcillation A du pendule ſimple ou compoſé SA (fig. 41.) qui eſt entre les cycloïdes SK, Sk, par chacun des arcs de cycloïde GA, PA, &c. & par la demi-cycloïde DA, eſt toujours le même, par l'art. 499. Nommant D le diametre AE du cercle generateur de la cycloïde DA ; la viteſſe acquiſe par la chute DA, eſt, comme on l'a vu dans le même article 499, $\sqrt{AE}(\sqrt{D})$: & le temps (T) de cette deſcente par la demi-cycloïde DA, eſt $\frac{2DA}{\sqrt{AE}}$. Ainſi, par l'article 510, DA étant égalé à $2AE$, l'expreſſion du temps de chaque deſcente du centre de peſanteur ou d'oſcillation par tel arc qu'on voudra GA, PA, DA de la demi-cycloïde DA, ſera $T = \frac{2DA}{\sqrt{AE}} = \frac{4AE}{\sqrt{AE}} = \frac{4D}{\sqrt{D}} = 4\sqrt{D}$.

Si on prend tel autre pendule qu'on voudra entre deux autres cycloïdes qui lui conviennent ; en ſe ſervant des mêmes lettres, mais italiques pour marquer la difference, on aura, pour l'expreſſion du temps de chacune de ſes vibrations, $t = 4\sqrt{d}$.

Comparant le temps T de chaque vibration du premier pendule avec le temps t de chaque vibration du ſecond, on aura $T . t :: 4\sqrt{D} . 4\sqrt{d} :: \sqrt{D} . \sqrt{d} :: \sqrt{2D} . \sqrt{2d}$: c'eſt-à-dire, le temps T de la premiere eſt au temps t de la ſeconde, comme la racine de la longueur du premier pendule $\sqrt{2D}$, eſt à la racine de la longueur du ſecond pendule $\sqrt{2d}$; la longueur du premier étant $2D$, & celle du ſecond étant $2d$, par l'article 511.

Mais en ſuppoſant que le premier pendule eſt le plus long, & que chacune de ſes vibrations a plus de durée que chacune des vibrations du ſecond, & que le raport de $\frac{T}{t}$ eſt marqué par $\frac{n}{1}$; il eſt évident, en nommant a une vibration du ſecond pendule, que le nombre des vibrations du ſecond pendule, faites dans le temps $T = nt$ d'une vibration du premier pendule, eſt na ; & qu'ainſi le temps T d'une vibration du premier

premier pendule, eſt au tems t d'une vibration du ſecond, reciproquement comme le nombre des vibrations du ſecond pendule faites dans le tems $T = nt$, ou dans tel tems qu'on voudra, eſt au nombre des vibrations du premier pendule faites dans le même tems; $T = nt \,.\, t :: na \,.\, 1a$.

Par conſéquent nommant N le nombre des vibrations du premier pendule pendant tel tems qu'on voudra, comme pendant une heure, & n celui des vibrations du ſecond pendant le même tems, on aura cette proportion $T \,.\, t :: n \,.\, N :: \sqrt{2D} \,.\, \sqrt{2d}$; prenant les quarrés, on aura $nn \,.\, NN :: 2D \,.\, 2d$, qui donne $2d = \frac{NN \times 2D}{nn}$, ou bien, en nommant $2D\,(L)$ & $2d\,(l)$, $l = \frac{NN \times L}{nn}$.

C'eſt la formule pour trouver par le moyen de la longueur connue du pendule à ſecondes, qui eſt de trois pieds huit lignes & demie, quelle doit être la longueur du pendule qui fera pendant une heure tel nombre de vibrations qu'on voudra. Par exemple ſi l'on veut ſçavoir la longueur du pendule dont les vibrations ſeroient d'une demie ſeconde, on ſuppoſera cette longueur inconnue égale à l: on mettra dans la formule, à la place de L, le nombre $3^{\text{pi.}}\ 8^{\text{lig.}}\ \frac{1}{2}$; à la place de NN, le quarré du nombre des ſecondes que contient une heure; & au lieu de nn, le quarré du nombre des demi-ſecondes que contient une heure; & l'on aura la longueur (l) que l'on cherchoit.

Cette même formule peut s'étendre aux pendules ſimples, comme ST, SL (fig. 13 & 14) qui ne ſont point entre des cycloïdes, pourvû qu'on leur faſſe décrire des arcs ſemblables TC, LP. Car nommant (A) l'arc que décrira le pendule SL, & (a) celui que décrira le pendule ST; nommant (S) le ſinus verſe du premier, & (s) celui du ſecond; & enfin nommant (L) la longueur du pendule SL, & (l) la longueur ST du ſecond, l'expreſſion du tems T de chaque vibration du premier, ſera $T = \frac{2A}{\sqrt{S}}$; l'expreſſion du tems de chaque vibration du ſecond ſera $t = \frac{2a}{\sqrt{s}}$.

Mais, à cauſe des arcs ſemblables, $2A \,.\, 2a :: S \,.\, s :: L \,.\, l$. Ainſi l'on peut mettre, quand on compare enſemble ces deux expreſſions, L à la place de A & de S; & l à la place de a & de s, & l'on aura $T \,.\, t :: \frac{2A}{\sqrt{S}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{s}} :: \frac{2L}{\sqrt{L}} \cdot \frac{2l}{\sqrt{l}} :: 2\sqrt{L} \,.\, 2\sqrt{l} :: \sqrt{L} \,.\, \sqrt{l}$. Nommant (N) le nombre des vibrations du pen-

dule SL, & (n) le nombre des vibrations du pendule ST (qu'on suppose le plus court) faites dans le même tems; on aura, comme dans les pendules entre les cycloïdes, $T . t :: n . N :: \sqrt{L} . \sqrt{l}$: & prenant les quarrés, on aura $nn . NN :: L . l$; ce qui donne la formule $l = \frac{NN \times L}{nn}$.

SECONDE ADDITION.

Ajoutez à la page 180, *avant les Remarques, ce qui suit:*

ON peut trouver, par le moyen de la même formule, quel est le point du pendule composé de deux poids SL (fig. 14.) où il faut mettre la lentille A, afin que les vibrations du pendule SL soient *les plus promptes* qu'il soit possible. Car étant démontré dans l'article 344, que la distance du centre d'oscillation de ce pendule composé est $SC\ (z) = \frac{aee + ffl}{ae + fl}$, ou bien, en nommant x la distance SA pour mieux représenter qu'elle est changeante, $SC\ (z) = \frac{axx + ffl}{ax + fl}$; la question se réduit à trouver la *moindre* $SC\ (z)$. Pour la découvrir, 1°. il faut prendre les différences, & l'on aura $\frac{dz}{dx} = \frac{aaxx + 2afx - affl}{\overline{ax + fl}^2}$. 2°. Il faut supposer $dz = 0$; ce qui donnera $xx + \frac{2fl}{a} x - \frac{ffl}{a} = 0$. D'où l'on tirera $x = -\frac{fl}{a} + \frac{f}{a}\sqrt{ll + al}$. 3°. Il faut substituer cette valeur de x dans l'équation, & l'on trouvera, après avoir fait le calcul, $z = -\frac{2fl}{a} + \frac{2f}{a}\sqrt{ll + al}$.

Ce qui fait voir que, quand la distance du centre d'oscillation $SC\ (z)$ est la *moindre* qu'elle puisse être, (ce qui rend les vibrations du pendule composé *les plus promptes* qu'il soit possible,) alors la distance $SA\ (x)$ de la lentille A est égale à $-\frac{fl}{a} + \frac{f}{a}\sqrt{ll + al}$, qui est la moitié de la *moindre* distance du centre d'oscillation.

D'où l'on voit que, soit qu'on hausse la lentille A au-dessus du point du pendule qu'on vient de déterminer, soit qu'on l'abaisse au-dessous, on retardera l'horloge: Et que quand la lentille est au-dessus de ce point, si on l'abaisse, & quand elle est au-dessous, si on la hausse, on fera avancer l'horloge.

FIN.

TROISIE'ME ADDITION.

EN cherchant dans la page 142 quelle eſt la courbe *DGA* (fig. 41.) que doit décrire le centre d'oſcillation d'un pendule, afin que les deſcentes par chacun de ſes arcs *DA*, *PA*, *GA* ſe faſſent en des tems égaux; on a ſuppoſé dans la réſolution (en nommant *s* chacun de ces arcs, & *x* leurs hauteurs correſpondantes *AE*, *AB*, *AM*) que $\frac{s}{\sqrt{x}}$, ou ſon multiple $\frac{2s}{\sqrt{x}}$, étoit un raport conſtant égal au tems de chaque deſcente qui eſt ſuppoſé le même. Voici la démonſtration de cette ſuppoſition.

Qu'on prenne deux arcs quelconques *DA*, *GA* de la courbe *DGA*, qu'on ſuppoſe être celle que l'on cherche; qu'on conçoive chacun de ces arcs partagé dans le même nombre de parties infiniment petites, en ſorte que les parties du premier ſoient toutes égales entr'elles, & que les petites parties du ſecond ſoient auſſi égales entr'elles; & qu'on nomme *parties correſpondantes* la premiére partie de l'un & la premiére partie de l'autre, la ſeconde partie de l'un & la ſeconde partie de l'autre, & ainſi de ſuite; il eſt évident que le raport du premier arc au ſecond eſt égal au raport de deux parties correſpondantes. Qu'on ſuppoſe que deux parties correſpondantes ſont parcourues en deux inſtans égaux; il eſt évident qu'en conſidérant dans ces inſtans indéfiniment petits les mouvemens comme uniformes, le raport de deux petites parties correſpondantes eſt égal au raport des viteſſes avec leſquelles ces parties ſont parcourues. Ainſi le raport de deux parties correſpondantes étant le même pour toutes, le raport des viteſſes avec leſquelles elles ſont parcourues (qui lui eſt égal) eſt auſſi le même. Le raport des arcs *DA*, *GA* eſt donc auſſi le même que celui des viteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus. Il ſuit de là que le raport de l'arc *DA* à ſa viteſſe eſt égal au raport de l'arc *GA* à ſa viteſſe. D'où l'on voit que dans la courbe que l'on cherche, le raport de chacun de ſes arcs à la viteſſe avec laquelle il eſt parcouru, qui eſt $\frac{s}{\sqrt{x}}$, eſt un raport conſtant égal au tems employé à le parcourir, qui eſt auſſi ſuppoſé conſtant. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ainſi en ſuppoſant $\frac{s}{\sqrt{x}}$ égale à une conſtante homogéne $2\sqrt{a}$, on aura $s = 2\sqrt{ax}$ pour l'équation de la courbe que l'on cherche, qui eſt la cycloïde.

On remarquera que ce n'eſt que dans la comparaiſon des tems des deſcentes par différentes cycloïdes, que l'on peut

exprimer le tems de la descente par chacun des arcs de la cycloïde DGA (fig. 41.) par $\frac{DA}{\sqrt{AE}}$, ou par son multiple $\frac{2DA}{\sqrt{AE}}$; & que ce n'est qu'en ce sens qu'on l'a supposé dans la premiére addition.

Mais dans la comparaison des tems des descentes par deux arcs semblables de cercle que l'on a faite à la fin de la premiére addition, il faut considérer ces arcs comme des polygones semblables, & les raporter à deux plans inclinés composés chacun de plusieurs petits plans inclinés qui font deux à deux des angles égaux indéfiniment petits, & dont les hauteurs ont le même raport que les longueurs de ces plans inclinés. Ainsi nommant leurs longueurs A & a, & leurs hauteurs correspondantes S & s, & les tems correspondans T & t; l'on aura $T . t :: \frac{2A}{\sqrt{S}} . \frac{2a}{\sqrt{s}}$.

On peut encore remarquer qu'en nommant s chaque corde AH, AF (fig. 41.) du cercle AHE; x, chaque sinus verse correspondant AM, AB; & $4a$ le diamétre AE; l'on trouve que chaque corde $AH\ (s) = \sqrt{4ax}$, qui est la même équation. Cela vient de ce que le tems de la descente par chaque corde $AH\ (s)$ qui peut s'exprimer par $\frac{s}{\sqrt{x}}$, est aussi constant, ou le même: ainsi en supposant ce raport constant, on trouve l'équation du cercle par raport à ses cordes.

La même équation $s = \sqrt{4ax}$ convient aux ordonnées BC, bc, (fig. 19.) de la parabole ACc, en nommant s chaque ordonnée BC; x, chaque coupée AB; & $4a$, le paramétre AP. Cela vient de ce que le raport $\frac{s}{\sqrt{x}}$ de chaque ordonnée de la parabole à la racine de sa coupée est constant. Ainsi en cherchant une courbe qui soit telle, qu'un corps pesant descendant de la hauteur de ses coupées, il décrive dans un tems égal par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquise de cette hauteur, qui sera $\sqrt{x}$, chaque ordonnée correspondante s de cette courbe; l'on trouvera que l'équation sera celle de la parabole, l'expreſſion du tems par chaque ordonnée s, qui est $\frac{2s}{\sqrt{x}}$ ou $\frac{s}{\sqrt{x}}$, étant un raport constant.

D'où l'on tire aisément (les ordonnées ayant le même raport que les viteſſes) que le mobile décrira dans un tems égal par un mouvement uniforme, avec la viteſſe acquise par la hauteur de chaque coupée x, chaque circonférence c que formeroit l'extrêmité de chaque ordonnée correspondante s de la parabole par sa révolution autour de l'axe. Car $\frac{c}{r}$, qui est le raport de la circonférence au rayon, sera l'expreſſion du tems.

REMARQUES

REMARQUES
DE MONSIEUR VARIGNON
SUR L'ANALYSE DEMONTRÉE
DU R. P. REYNEAU.

VOICI, mon Reverend Pere, le Manuſcrit que vous m'avez mis entre les mains : je n'ai pû que le parcourir & par repriſes, en ayant été inceſſamment diſtrait non-ſeulement par mes devoirs de Claſſe & d'Academie ; mais encore par des choſes à examiner tant par ſon ordre que par celui de Monſeigneur le Garde des Sceaux, outre des corrections d'épreuves de choſes qui me regardent dans les Mémoires de l'Academie : Cependant quelque rapidement que j'aye parcouru ce Manuſcrit, je n'ai pas laiſſé d'y voir beaucoup d'ordre & de netteté, avec des Obſervations curieuſes ſur la nature des racines des équations cubiques dont le ſecond terme eſt évanoui. Quant aux valeurs de ces racines, la plus grande partie de ce Manuſcrit eſt employée à faire voir que le quotient du dernier terme de chacune de ces équations diviſé ſans reſte par la difference de la grandeur du troiſiéme terme à un quarré parfait qui auroit ce quotient pour racine, en eſt une de l'équation propoſée : cela eſt vrai, & l'équation $x^3 \times \mp px \mp q = 0$, generale y combinant de toutes les manieres chacun des ſignes du troiſiéme avec chacun de ceux du dernier, le fait voir tout d'un coup en donnant tout d'un coup $x = \frac{+q}{xx + p}$. Mais pour avoir ce quarré parfait xx, il faudroit en avoir la racine x, &c. c'eſt ce qu'on cherche : auſſi l'Auteur abandonne-t-il enfin cette méthode, & a recours aux formules ordinaires des racines de ces équations, deſquelles formules on pouvoit abreger le calcul de la moitié, ainſi que je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Academie Tome I. de 1699. p. 142. &c. où j'ai trouvé ces racines cubiques ſur la même méthode que le quarré.

LIVRE V.

SECTION II.

REMARQUES

Sur les équations cubiques. Voyez *les Mémoires de l'Academie de* 1699. *pag.* 142. *Tome I. de ces Memoires.* Voyez auſſi *le Tome II. Liv. IX. des Elemens de Mathematique du* P. PRESTET. Voyez auſſi *l'Analyſe demontrée du* P. REYNEAU, *Tome I. pag.* 198. *ſect.* 2. Voy. auſſi *l'Arithmetique univerſelle de M.* NEWTON, *pag.* 272.

DE LA NATURE DES RACINES DES EQUATIONS CUBIQUES DONT LE SECOND TERME EST EVANOUI.

I. DANS $x^3 \times + px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme px eſt poſitif, il y a une racine réelle avec deux imaginaires. Car ſi elles étoient toutes trois réelles, l'évanouiſſement du ſecond terme de cette équation, marquant qu'une d'elles ſeroit poſitive égale à la ſomme des autres négatives, ou une négative égale à la ſomme des deux autres poſitives; la ſomme des trois produits de ces trois racines multipliées l'une par l'autre deux à deux, ſeroit négative, & conſéquemment auſſi p qui exprime cette ſomme de produits.

II. On jugera de même des racines des autres formules de ces ſortes d'équations: Par exemple dans $x^3 \times - px \mp q = 0$, qui a p négatif, ſi $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$, cette équation aura trois racines réelles dont les deux moindres ſeront égales entre elles, & leur ſomme égale à la plus grande; car ſi l'on prend $\pm r$ pour la plus grande de ces trois racines, & conſéquemment $\mp \frac{1}{2} r$ pour chacune des deux moindres, la ſomme p des trois produits de ces trois racines multipliées l'une par l'autre deux à deux, ſera $-p = \frac{1}{4} rr - \frac{1}{2} rr - \frac{1}{2} rr = \frac{1}{4} rr - rr = -\frac{3}{4} rr$, ou $p = \frac{3}{4} rr$; ce qui donne $\frac{1}{3} p = \frac{1}{4} rr$, & $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{64} r^6$. D'un autre côté le produit q de ces trois mêmes racines ſera $\mp q = \frac{1}{2} r \times \frac{1}{2} r \times r = \frac{1}{4} r^3$, & $\pm \frac{1}{2} q = \frac{1}{8} r^3$; ce qui donne $\frac{1}{4} qq = \frac{1}{64} r^6$. Donc $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

III. Si, le troiſiéme, étant encore négatif, l'équation a $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, elle a une racine réelle avec deux imaginaires. Car ſi elles étoient toutes trois réelles dont les deux moindres fuſſent égales entr'elles, cette équation auroit (Art. 2.) $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} q$; & ſi les deux moindres racines étoient inégales, la même équation auroit $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$; parceque cette inégalité feroit croître q, & décroître p. Donc $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, lorſque p eſt négatif, marque une racine réelle avec deux imaginaires.

IV. Si p eſt négatif, $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, l'équation a trois racines réelles, dont les deux moindres ſont inégales, puiſque (Art. 2.) ſi elles étoient égales elles rendroient $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$; & leur inégalité faiſant croître $\frac{1}{27} p^3$, & décroître $\frac{1}{4} qq$, ſans bornes, il ne peut y avoir d'inégalité entre $\frac{1}{27} p^3$ & $\frac{1}{4} qq$, ni conſéquemment entre les deux moindres racines. *Il faudra examiner ceci.*

V. Dans ce dernier cas l'expreſſion generale des racines, telle qu'elle eſt dans les Mem. de 1706, ne peut ſignifier aucune quantité réelle (dit M. Newton,) parceque la racine eſt ici multipliée, & cette quantité eſt ſimple (*à examiner:*) elle exprime cependant une de ces valeurs dont les autres ſont impoſſibles.

PROBLÈME A METTRE

Après les égalitez de la page ſuivante. Il faudra voir s'il ne doit point être auſſi après les Obſervations qui la ſuivent, & avant les Theorêmes; & de plus ſi ces Obſervations ne doivent point être miſes par propoſitions détachées.

PROBLÈME.

TROUVER auxquelles des formes précedentes les égalitez A, B, C, D, E, F, *ſe réduiſent ſelon que* f *&* g, *ſont égales ou inégales, avec les valeurs de* p, q, *qui en réſultent à ces égalitez.*

SOLUT. I. Quelque ſoit le raport de f à g, il eſt manifeſte que l'égalité A eſt de la premiere forme G, & que B eſt de la ſeconde H; & qu'elles auront également $3ff = p$, & $2f^3 = q$.

II. Dans le cas de $f=g$,

1°. Les égalitez C, D, deviendront du second degré qui n'a aucune difficulté, ce cas faisant évanouir leur quatriéme terme.

2°. L'égalité E sera de la cinquiéme forme L, & l'égalité F de la sixiéme M: ce qui donnera $o=p$ dans toutes deux; $2f^3+2fgg=q$ dans l'égalité E, & $2f^3+6fgg=q$ dans l'égalité F.

III. Dans le cas de $f>g$,

1°. L'égalité C sera de la premiere forme G, & l'égalité D de la seconde H; ce qui leur donnera également $3ff+gg=p$, & $2f^3-2fgg=q$.

2°. L'égalité E sera de la premiere forme G, & l'égalité F sera de la seconde H; ce qui leur donnera également $3ff-3gg=p$, & $2f^3+6fgg=q$.

IV. Dans le cas de $f<g$,

1°. L'égalité C sera de la seconde forme H, & l'égalité D de la premiere G; ce qui donnera également $3ff+gg=p$, avec $2fgg-2f^3=q$.

2°. L'égalité E sera de la troisiéme forme I, & F de la quatriéme K; ce qui leur donnera également $3gg-3ff=p$, $2f^3+6fgg=q$.

Au lieu de ce Corollaire il en faudra un plus correct.

FORMULES GENERALES
d'Equations du troisiéme degré dont le second terme est évanoüi, & les racines données.

A. $x^3x-3ffx-2f^3=o$, dont les trois racines sont $x+f=o$, $x+f=o$, & $x-2f=o$, dont deux sont égales entre elles, & négatives avec la troisiéme positive égale à leur somme, & toutes trois réelles.

B. $x^3x-3ffx+2f^3=o$, dont les deux premieres sont encore égales entre elles, mais positives avec la troisiéme négative, & toutes trois réelles.

C. $x^3x-3ffx-2f^3=o$, dont les trois racines sont $-ggx+2fgg$

$x+f+g=o$, $x+f-g=o$, & $x-2f=o$, toutes trois réelles & inégales, desquelles la troisiéme égale encore à la somme des deux autres est positive; & elles négatives, lorsque f est plus grande que g; ou la premiere d'entre elles négative, & la seconde positive si $g>f$.

D. $x^3 \times -3ffx + 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$-gg x - 2fgg$

$x - f - g = 0$, $x - f + g = 0$, & $x + 2f = 0$, toutes trois réelles & inégales, & dont la troiſiéme égale à la ſomme des deux autres, eſt négative ; & elles poſitives, lorſque f eſt plus grande que g ; ou la premiere d'entre elles poſitive, & la ſeconde négative ſi $g > f$.

E. $x^3 \;.\; -3ffx - 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$+3ggx - 6fgg$.

$x + f + \sqrt{-3gg} = 0$, $x + f - \sqrt{-3gg} = 0$, & $x - 2f = 0$, deſquelles racines la troiſiéme égale à la ſomme des deux autres, eſt réelle & poſitive ; la troiſiéme égale, & elles imaginaires négatives, quelle que ſoit g par raport à f, plus grande ou plus petite, il n'importe.

F. $x^3 \;.\; -3ffx + 2f^3 = 0$, dont les trois racines ſont
$+3ggx + 6fgg$

$x - f - \sqrt{-3gg} = 0$, $x - f + \sqrt{-3gg} = 0$, & $x + 2f = 0$, deſquelles les deux premieres ſont encore imaginaires & inégales, mais poſitives ; & dont la troiſiéme égale à leur ſomme eſt réelle négative, quelle que ſoit encore g par raport à f, plus grande ou plus petite, il n'importe..

FORMULES GENERALES

de toutes les égalitez du troiſiéme degré, leſquelles n'ont point de ſecond terme, & dont le dernier q *& le coëficient* p *du ſecond, ſont connus.*

G. $x^3 \;.\; -px - q = 0.$

H. $x^3 \;.\; -px + q = 0.$

I. $x^3 \;.\; +px - q = 0.$

K. $x^3 \;.\; +px + q = 0.$

L. $a^3 \;.\; .\; . \; -q = 0.$

M. $x^3 \;.\; .\; . \; +q = 0.$

Pour trouver les racines cherchées de ces ſix dernieres égalitez generales, il faut les comparer de la maniere ſuivante avec les ſix précedentes de racines données, chacune avec ſa ſemblable.

COMPARAISON

Des ſix premieres égalitez A, D, C, D, E, F, *de racines données, avec les ſix autres* G, H, I, K, L, M, *de racines cherchées.*

I. Il eſt manifeſte que les égalitez C, E, ſont de même forme que A, lorque f eſt plus grande que g; & que l'égalité D eſt auſſi de la même forme, lorſque g eſt au contraire plus grande que f. De ſorte que A étant toujours de même forme que G, les égalitez C, E, D, ſont auſſi de la même forme que G dans ces ſuppoſitions de $f > g$ pour C, E, & de $f < g$ pour D. D'où il ſuit que dans ces conditions pour C, E, D, & abſolument pour A, ces quatre égalitez ſont de même forme G; & qu'ainſi dans ces ſuppoſitions les cinq égalitez A, C, E, D, G, renferment deux racines négatives, & une racine poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme par la conſtruction.

COROL. Cet Article premier fait voir que les égalitez de la premiere formule $x^3 . - px - q = 0$, ont toujours deux racines négatives, & une poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égales à leur ſomme.

II. Il eſt pareillement manifeſte que les égalitez D, E, ſont de même forme que B, lorſque f eſt plus grande que g; & que l'égalité C eſt auſſi de la même forme, lorſque g eſt au contraire plus grande que f. De ſorte que B étant toujours de même forme que H, les égalitez D, E, C, ſont auſſi de la même forme que H dans ces ſuppoſitions de $f > g$ pour D, E, & de $f < g$ pour C. D'où il ſuit que dans ces conditions pour D, E, C, & abſolument pour B; & qu'ainſi dans ces ſuppoſitions les cinq égalitez D, E, C, B, H, renferment toujours deux racines poſitives, & une négative plus grande que chacune de celle-là, mais égale à leur ſomme.

COROL. Il ſuit de cet Art. 2. que les égalitez de la ſeconde formule $x^3 . - px + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives, & une négative plus grande que chacune de ces deux-là, mais égale à leur ſomme.

III. Il eſt encore manifeſte que lorſque f eſt plus petite que g, l'égalité E eſt de même forme I; ainſi l'égalité E

dans cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines négatives imaginaires inégales, & une racine réelle poſitive égale à leur ſomme par la conſtruction, donc l'égalité *I* renferme auſſi trois pareilles racines.

COROL. Il ſuit de cet Art. 3. que les égalitez de la troiſiéme formule $x^3 . + px - q = 0$, renferment toujours deux racines négatives imaginaires entre elles, & une réelle poſitive égale à leur ſomme.

IV. Lorſque f eſt plus petite que g, l'égalité F ſe trouvant de même forme que K; & par cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines poſitives imaginaires & inégales avec une racine réelle négative égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité K doit renfermer auſſi trois pareilles racines.

COROL. Il ſuit de cet Art. 4. que les égalitez de la quatriéme formule $x^3 . + px + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives imaginaires & inégales, avec une réelle négative égale à leur ſomme.

V. Lorſque $f = g$, l'égalité E ſe trouvant de même forme que l'égalité L; & par cette ſuppoſition renfermant toujours deux racines négatives imaginaires inégales, avec une racine réelle poſitive égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité L doit auſſi renfermer trois pareilles racines.

COROL. Il ſuit de cet Art. 5. que les égalitez de la cinquiéme formule $x . . - q = 0$, renferment toujours deux racines négatives imaginaires & inégales, avec une réelle poſitive égale à leur ſomme.

VI. Lorſque $f = g$, l'égalité F ſe trouvant de même forme que l'égalité M; & par cette ſuppoſition renfermant toujours alors deux racines poſitives imaginaires & inégales, avec une racine réelle négative égale à leur ſomme par la conſtruction; l'égalité M doit auſſi toujours renfermer trois pareilles racines.

COROL. Il ſuit de cet Art. 6. que les égalitez de la ſixiéme formule $x . . + q = 0$, renferment toujours deux racines poſitives imaginaires inégales, & une réelle négative égale à leur ſomme

THEOREME I.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré repréſentées d'une maniere generale par les égalitez A, B; *le cube du tiers de la grandeur connue de leur troiſiéme terme, eſt toujours égal au quarré de la moitié du dernier, ou toujours* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Car la grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez *A*, *B*, eſt $3ff = p$, le tiers eſt $ff = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 = \frac{1}{27}p^3$. Or la grandeur du dernier terme des mêmes égalitez eſt $3f^3 = q$, donc la moitié eſt $f^3 = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 = \frac{1}{4}qq$. Donc $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Th. 8. THEOREME II.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré repréſentées d'une maniere generale par les égalitez C, D; *l'on a toujours* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez *C*, *D*, eſt $3ff + gg = p$, dont le tiers eſt $ff + \frac{1}{3}gg = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 + f^4gg + \frac{1}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$. Or la grandeur du dernier terme de ces égalitez *C*, *D*, eſt $\pm 2f^3 \mp 2fgg = q$, dont la moitié eſt $\pm f^3 \mp fgg = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 - 2f^4gg + ffg^4 = \frac{1}{4}qq$.

Donc ayant $f^6 + f^4gg + \frac{1}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3$, & $f^6 - 2f^4gg + ffg^4 = \frac{1}{4}qq$; dans les égalitez *C*, *D*, ſi l'on retranche la ſeconde de la premiere de ces valeurs de $\frac{1}{27}p^3, \frac{1}{4}qq$; il en reſtera $3f^4gg - \frac{2}{3}ffg^4 + \frac{1}{27}g^6 = \frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$, de qui le premier membre eſt poſitif, étant le tiers du quarré $9f^4gg - 2ffg^4 + \frac{1}{9}g^6$ certainement poſitif, puiſque ſa racine $3ffg - \frac{1}{3}g^3$ n'eſt point imaginaire, donc $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq$ eſt pareillement ici poſitif; & conſequemment $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il faloit démontrer.*

Th. 9. THEOREME III.

Toutes les égalitez du troiſiéme degré generalement exprimées par E, F, *ont toujours* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

Ceci ne ſatisfait qu'au cas de $f < g$, & non à celui de $f < g$: pour ſatisfaire aux deux à la fois, il faudroit $\pm 3ff \mp 3gg = p$, ainſi qu'ils le donnent enſemble dans les égalitez E, F, ce qui donne $ff - gg = \pm\frac{1}{3}p$, dont le ſuperieur du double ſigne eſt pour le premier de ces deux cas, & l'inferieur pour le

le ſecond : & en procedant comme ici, l'on trouveroit $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq \mp \frac{1}{27}p^3$, dont le ſigne ſuperieur donneroit ce que porte ce Theorême 3. mais non pas l'inferieur qui ne dit rien de ce qu'on veut ici ſçavoir : car on trouvera $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq \mp \frac{1}{27}p^3$.

DEMONST. La grandeur du troiſiéme terme de ces égalitez E, F, eſt $3ff - 3gg = p$, dont le tiers eſt $ff - gg = \frac{1}{3}p$, de qui le cube eſt $f^6 - 3f^4gg + 3ffg^4 - g^6 = \frac{1}{27}p^3$. La grandeur du dernier terme des mêmes égalitez eſt $2f^3 + 6fgg = q$, dont la moitié eſt $f^3 + 3fgg = \frac{1}{2}q$, de qui le quarré eſt $f^6 + 6f^4gg + 9ffg^4 = \frac{1}{4}qq$, duquel retranchant le cube précedent, il reſte $9f^4gg + 6ffg^4 + g^6 = \frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; ce qui étant poſitif, l'on aura $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 10. THEOREME IV.

Dans toutes ces égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours trois racines réelles, dont les deux moindres ſont égales entre elles, & la troiſiéme égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font voir que le cube du tiers de la grandeur connue du troiſiéme terme des égalitez A, B, eſt toujours égal au quarré de la moitié de la grandeur connue du dernier terme, & toujours plus grand ou plus petit dans les autres égalitez C, D, E, F : c'eſt-à-dire toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ dans A, B ; & au contraire toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans les autres égalitez C, D, E, F. Or l'inconnue a toujours trois racines réelles dans les égalitez A, B, deſquelles racines deux ſont égales entre elles, & la troiſiéme égale à leur ſomme. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, cette égalité aura toujours trois racines réelles dont deux ſont égales entre elles, & une troiſiéme égale à leur ſomme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 11. THEOREME V.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours trois racines réelles & inégales entre elles, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font voir auſſi que les égalitez *C*, *D*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$; & que les quatre autres *A*, *B*, *E*, *F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or l'inconnue a toujours trois racines réelles & inégales dans les égalitez *C*, *D*, par leur conſtruction. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi; cette égalité a toujours trois racines réelles & inégales entre elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 12. THEOREME VI.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Les Th. 1, 2, 3, font pareillement voir que les égalitez *E*, *F*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$; & que les quatre autres *A*, *B*, *C*, *D*, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Or l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales, & une réelle égale à leur ſomme dans les égalitez *E*, *F*, par leur conſtruction. Donc lorſque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$ dans une égalité quelconque du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi; cette égalité a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle égale à leur ſomme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 13. THEOREME VII.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme $x^3 . - px - q = 0$, *l'inconnue a toujours deux racines réelles négatives égales entre elles, & une racine poſitive réelle égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. Par la comparaiſon art. 1. on a vû que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, les deux moindres racines ſont toujouts réelles négatives, & la plus grande réelle poſitive; & par le Theorême 4. que

dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles, deux égales entre elles, & la troiſiéme toujours plus grande qu'elles, & égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, l'inconnue a toujours deux racines réelles négatives égales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, puiſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

Th. 14. THEOREME VIII.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule $x^3 . - px - q = 0$, *l'inconnue* x *a toujours deux racines réelles négatives inégales, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. On a vû par la comparaiſon premiere, que toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere formule, ont leur deux moindres racines toujours négatives, & leur plus grande toujours poſitive & égale à la ſomme de ces deux-là. Le Theorême 5. fait voir auſſi que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles & inégales, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, l'inconnue a toujours deux valeurs réelles négatives inégales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune de ces deux-là, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 15. THEOREME IX.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme $x^3 . - px - q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs négatives imaginaires inégales, & une réelle poſitive égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaiſon premiere fait voir que toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, ont leurs deux moindres racines toujours négatives, & la plus grande toujours poſitive. Le Theorême 6. fait auſſi voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, l'inconnue a toujours deux racines imaginaires inégales entre elles, & une réelle poſitive plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſ-

que $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere forme, l'inconnue a toujours deux valeurs négatives imaginaires inegales, & une réelle poſitive égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 16. THEOREME X.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme $x^3 - px + q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives égales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

DEMONST. La comparaiſon 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, les deux moindres racines ſont toujours poſitives, & la plus grande toujours négative. Le Theorême 4. fait voir de plus que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles, que les deux moindres ſont toujours égales entre elles, & la plus grande toujours égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. Donc dans toutes égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives égales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

Th. 17. THEOREME XI.

Dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme $x^3 . - px + q = 0$, *l'inconnue a toujours deux valeurs réelles poſitives inégales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur ſomme, lorſque* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$.

DEMONST. La comparaiſon 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme, les deux moindres racines ſont toujours poſitives, & la plus grande toujours négative. Le Theorême 9. fait auſſi voir que dans toutes les égalitez du troiſiéme degré, dont le ſecond terme eſt évanoüi, les trois racines ſont toujours réelles inégales entre elles, lorſque $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la ſeconde forme,

l'inconnue a toujours deux racines réelles positives inégales entre elles, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égales à leur somme, lorsque $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 18. THEOREME XII.

Dans toutes les égalitez du troisiéme degré de la seconde forme l'inconnue a toujours deux valeurs positives imaginaires & inégales, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur somme, lorsque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. La comparaison 2. fait voir que dans toutes les égalitez du troisiéme degré de la seconde forme, les deux moindres racines sont toujours positives, & la plus grande toujours negative. Or le Theorême 6. fait aussi voir que dans toutes les égalitez du troisiéme degré, dont le second terme est évanoüi, l'inconnue a toujours deux valeurs imaginaires inégales entre elles, & une réelle plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur somme, lorsque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Donc dans toutes les égalitez du troisiéme degré de la seconde forme, l'inconnue a toujours deux valeurs positives imaginaires inégales, & une réelle négative plus grande que chacune d'elles, mais égale à leur somme, lorsque $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 19. THEOREME XIII.

Dans toutes les égalitez du troisiéme degré de la premiere & seconde forme, chacune des deux moindres racines est toujours la racine quarrée du tiers de la grandeur connue de leur troisiéme terme, ou la racine cube de la moitié du dernier (ces deux termes considerez sans raport aux signes qui leur conviennent dans les égalitez qui les renferment;) & la troisiéme racine ou la plus grande des trois, toujours le double de ces mêmes racines quand $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, *ou bien chacune des deux moindres racines est toujours* $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, *ou* $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$; *& la plus grande des trois toujours* $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, *ou* $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, *ou quand* $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

DEMONST. On sçait que les six égalitez A, B, C, D, E, F, représentent d'une maniere generale toutes les égalitez possibles du troisiéme degré, dont le second terme est évanoüi.

On a vû dans les démonstrations des Theorêmes 1, 2, 3, que $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ dans les égalitez A, B; & que dans les

quatre autres, c'eſt toujours $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

On ſçait que l'égalité A eſt toujours de la premiere forme, & l'égalité B toujours de la ſeconde.

On ſçait que chacune des deux moindres racines des égalitez A, B, eſt $= f$, & que la plus grande des trois eſt $2f$, par leur conſtruction.

On ſçait encore que $3ff$ grandeur connue de leur troiſiéme terme eſt $= p$, & que la connue du quatriéme eſt $2f^3 = q$; ce qui donne $ff = \frac{1}{3} p$, & $f^3 = \frac{1}{2} q$, d'où réſulte $f = \sqrt{\frac{1}{3} p}$, & $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$.

Or $f = \sqrt{\frac{1}{3} p}$ eſt la racine quarrée du tiers de $3ff = p$, & $f = \sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$ la racine cubique de la moitié de $2f^3 = q$; & que $2f = 2\sqrt{\frac{1}{3} p} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$ eſt le double de chacune de ces mêmes racines.

Donc dans toutes les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, chacune des deux moindres racines eſt toujours $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, ou $\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$; & la plus grande toujours $2\sqrt{\frac{1}{3} p}$, ou $2\sqrt[3]{\frac{1}{2} q}$, quand $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Th. 20. Corol. Puiſqu'on a ici $ff = \frac{1}{3} p$, & $f^3 = \frac{1}{2} q$, l'on y aura auſſi $f\left(\frac{p}{ff}\right) = \frac{3q}{2p}$ pour la valeur de chacune des deux moindres racines, & $2f = \frac{3q}{p}$ pour la valeur de la plus grande égale à leur ſomme.

Th. 21. THEOREME XIV.

Lorſque $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ *dans les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, la plus grande de leurs trois racines, la poſitive dans une égalité de la premiere forme, & la négative dans une égalité de la ſeconde forme, eſt toujours* $2f = \frac{q}{4ff - p}$, *c'eſt-à-dire, eſt toujours la racine* $2f$ *d'un quarré parfait* $4ff$ *plus grand que la grandeur connue* p *de leur troiſiéme terme, & qui diminué de cette grandeur* p *diviſe le dernier terme* q *ſans reſte, & donne cette racine* $2f$ *pour quotient de cette diviſion, ſous le ſigne qui lui convient dans l'égalité lineaire qui la renferme auſſi bien que l'inconnue dont elle eſt la valeur, ſçavoir ſous le ſigne* — *pour l'égalité de la premiere forme, & ſous le ſigne* + *pour celle de la ſeconde.*

DEMONST. Les Theorêmes 1, 2, 3, font voir que les égalitez A de la premiere forme, & B de la ſeconde, ont tou-

jours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, & que les quatre autres égalitez C, D, E, F, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or les égalitez A, B, comparées aux égalitez G, H, de leurs formes, ont $3ff = p$, & $2f^3 = q$; ce qui donne $4ff - p = 4ff - 3ff = ff$, & en conſequence $\frac{q}{4ff-p} = \frac{2f^3}{ff} = 2f$, qui eſt la plus grande racine de chacune des égalitez A, B, par leur conſtruction, leſquelles ſont de la premiere & ſeconde formes, & ont ſeules (Th. 1, 2, 3,) $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, donc, &c.

Th. 22. THEOREME XV.

Lorſque $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$ *dans les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme, chacune de leurs deux moindres racines égales, eſt toujours* $= f = \frac{q}{p-ff}$; *c'eſt-à-dire, égale à la racine* f *d'un quarré parfait* ff *moindre que la grandeur connue* p *du troiſiéme terme de ces égalitez, & qui retranché de cette grandeur connue* p, *laiſſe un reſte* p — ff, *lequel diviſe lē quatriéme terme* q *ſans reſte, & donne cette racine* f *pour quotient de cette diviſion, ſous le ſigne qui lui convient dans l'égalité lineaire qui la renferme, c'eſt-à-dire ſous le ſigne* + *pour l'égalité de la premiere forme, & ſous le ſigne* — *pour celle de la ſeconde forme ou formule.*

DEMONST. Les Theorêmes 1, 2, 3, font voir que les égalitez A, B, de la premiere & de la ſeconde forme, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, & que les quatre autres C, D, E, F, ont toujours $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Or ces égalitez A, B, comparées avec les égalitez G, H, de leurs formes, ont $3ff = p$, & $2f^3 = q$, ce qui donne $2ff = p - ff$, & conſéquemment $\frac{q}{p-ff} = \frac{2f^3}{2ff} = f$, qui eſt la valeur des deux plus petites racines égales de chacune des égalitez A, B, par leur conſtruction, leſquelles ſont de la premiere & de la ſeconde forme, & les ſeules (Th. 1, 2, 3.) qui ayent $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. donc, &c.

Th. 23. (*à remarquer.*) THEOREME XVI.

Lorſque les égalitez du troiſiéme degré de la premiere & de la ſeconde forme ont $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$ *comme les ſeules égalitez* C, D; *la plus grande des trois racines de chacune de ces égalitez, poſitive dans la premiere forme, & négative dans la ſeconde, eſt toujours la racine d'un quarré dont la difference a la grandeur connue* p *du troiſiéme terme de ces égalitez, diviſe ſans*

reſte leur quatriéme terme q, *& donne cette racine pour quotient de cette diviſion.*

Il faudra comprendre dans ce Theorême les trois racines $2f$, $f+g$, $f-g$, ou $g-f$ des égalitez C, D, dont les deux premieres $2f$, $f+g$, ſont déja dans la démonſtration de ce Theorême, & la troiſiéme $f-g$, ou $g-f$ eſt dans ſon Corol. 2.

DEMONST. 1°. Lorſque $f>g$, l'égalité C eſt de la premiere forme, & l'égalité D de la ſeconde; & ont également $2f^3-2fgg=q$, $3ff+gg=p$, de ſorte que la preſente hypotheſe de $f>g$, rendant $4ff>3ff+gg=p$, & $ff+2fg+gg<3ff+gg=p$; cette hypotheſe dans ces deux égalitez C, D, leur donnera également $4ff-p=4ff-3ff-gg=ff-gg$, & $p-ff-2fg-gg=3ff+gg-ff-2fg-gg=2ff-2fg$. Ce qui leur donne $\frac{q}{4ff-p}=\frac{2f^3-2fgg}{ff-gg}=2f$, & $\frac{q}{p-ff-2fg-gg}=\frac{2f^3-2fgg}{2ff-2fg}=f+g$.

2°. Lorſque $f<g$, l'égalité C eſt de la ſeconde forme, & D de la premiere; & ont également $2fgg-2f^3=q$, & $3ff+gg=p$, de ſorte que la preſente hypotheſe de $f<g$, rendant $4ff<3ff+gg=p$, & $ff+2fg+gg>3ff+gg=p$; cette hypotheſe dans les égalitez C, D, leur donnera $p-4ff=3ff+gg-4ff=gg-ff$, & $ff+2fg+gg-p=ff+2fg+gg-3ff-gg=2fg-2ff$. Ce qui leur donne $\frac{q}{p-4ff}=\frac{2fgg-2f^3}{gg-ff}=2f$, & $\frac{q}{ff+2fg+gg-p}=\frac{2fgg-2f^3}{2fg-2ff}=g+f$.

3°. Donc non ſeulement, (*nomb.* 1.) $f>g$, qui rend l'égalité C de la premiere forme, & l'égalité D de la ſeconde, leur donne également $\frac{q}{4ff-p}=2f$, & $\frac{q}{p-ff-2fg-gg}=f+g$; mais encore (*nomb.* 2.) $f<g$, qui rend au contraire C de la ſeconde forme, & D de la premiere, leur donne auſſi également $\frac{q}{p-4ff}=2f$, & $\frac{q}{ff+2fg+gg-p}=f+g$. Or $2f$, $f+g$, ſont les racines des quarrez $4ff$, $ff+2fg+gg$, donc ces racines des égalitez de la premiere & de la ſeconde forme, qui (comme les égalitez C, D,) ont $\frac{1}{27}p^3>\frac{1}{4}qq$, ſont les quotiens du dernier terme q de ces égalitez, diviſe ſans reſte par la difference de ces quarrez à la grandeur connue p de leur troiſiéme terme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. 1. Le cas de $f>g$ donnant ici $4ff>p$, & $ff+2fg+gg<p$; au contraire le cas de $f<g$ donnant $4ff<p$, & $ff+2fg+gg>p$: on voit que lorſque la difference d'un quarré à la grandeur connue p du 3ᵉ terme de l'égalité, diviſe

diviſe ſans reſte le dernier terme q, & que le quotient ſe trouve la racine de ce quarré, ce quotient eſt auſſi une des racines de l'équation dont il s'agit ici.

Il faudra examiner ſi cette racine doit venir ſous le ſigne qu'elle a dans l'égalité lineaire qui entre dans l'égalité en queſtion : ce qui ſera aiſé de lui donner.

On voit auſſi que lorſqu'il n'y a aucun quarré parfait qui puiſſe ainſi donner quelqu'une des racines de cette équation, cette racine eſt incommenſurable.

COROL. 2. quel que ſoit le raport de f à g, la moindre des trois racines des égalitez C, D, étant $f-g$, ou $g-f$, dont le quarré eſt $ff-2fg+gg$; & ayant encore ci-deſſus $3ff+gg=p$; l'on aura ici $p-ff+2fg-gg=3ff+gg-ff+2fg-gg=2ff+2fg$. Donc ayant auſſi $2f^3-2fgg=q$; on aura ici $\frac{q}{p-ff+2fg-gg}=\frac{2f^3-2fgg}{2ff+2fg}=f-g$, troiſiéme racine des égalitez C, D, dont les deux moindres racines ſont dans le preſent Th. 16. Cette troiſiéme racine s'expliquera comme les deux autres.

On jugera ici de l'incommenſurabilité de cette racine comme ſur la fin du Coroll. 1. pour les démontrer.

REMARQUE. L'on aura de même $ff-2fg+gg-p=ff-2fg+gg-3ff-gg=-2ff-2fg$, donc à cauſe de $q=2f^3-2fgg$, l'on aura ici $\frac{q}{ff-2fg+gg-p}=\frac{2f^3-2fgg}{-2ff-2fg}=-f+g=g-f$.

Il faudra comprendre ce Corollaire dans le Theorême qui donnera ainſi toutes les racines.

FORMULES RADICALES D'EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.

Voyez *l'Analyſe démontrée du P.* REYNEAU, *Tome* 1. *pag.* 8. *Art.* 9.

Soit l'équation propoſée $y^3\times+3by+2c=0$. (A).

I. Soit priſe $y=z-\frac{b}{z}=\frac{z^2-b}{z}=\frac{z^4-bz^2}{z^3}$ (B).

Cette équation B donnera $y^3=\frac{z^6-3bz^4+3bbz^2-b^3}{z^3}$,

avec . . . . $+3by=+\frac{3bz^4-3bbz^2}{z^3}$.

Donc l'équation (A) $0=y^3\times+3by+2c=\frac{z^6-b^3}{z^3}+2c=0$; d'où réſulte $z^6+2cz^3-b^3=0$; (C) & conſéquemment $z^6+2cz^3+c^2=c^2+b^3$, dont la racine quarrée eſt $z^3+c=\sqrt{c^2+b^3}$: d'où réſulte $z^3=-c+\sqrt{c^2+b^3}$ (D), & $z=\sqrt[3]{-c+\sqrt{c^2+b^3}}$ (E). Donc ayant $y=z-\frac{b}{z}$ (B) ; l'on aura auſſi $y=\sqrt[3]{-c+\sqrt{c^2+b^3}}-\sqrt[3]{\frac{b}{-c+\sqrt{c^2+b^3}}}$ (E) pour une des racines de l'équation propoſée (A).

II. De plus l'équation C donnant $\frac{b^3}{z^3} = z^3 + 2c$ (suivant l'équation D.) $= -c + \sqrt{c^2 + b^3} + 2c = c + \sqrt{c^2 + b^3}$; l'on aura $\frac{b}{z} = \sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}$, d'où réſulte $z = \sqrt[3]{\frac{b}{c + \sqrt{c^2 + b^3}}}$. Donc l'équation B étant $y = z - \frac{b}{z}$, l'on aura auſſi $y = \sqrt[3]{\frac{b}{c + \sqrt{c^2 + b^3}}} - \sqrt[3]{c + \sqrt{c^2 + b^3}}$ (G) racine encore de l'équation A. Il faudra comparer cette racine G avec la précedente F.

III. Pour trouver les racines des équations cubiques de toutes les formes que voici, par le moyen de la racine F ou G de l'équation A, il faut comparer terme à terme chacune de ces formes avec cette équation A; & ſubſtituer enſuite dans la valeur de ſa racine F ou G au lieu de b, c, leurs valeurs réſultantes en p, q, de ces comparaiſons; & cette racine F, G, ſe changera en celle de la forme dont la comparaiſon avec l'équation A aura donné ces valeurs de b, c, en p, q, ſçavoir

Formes de toutes les Equations cubiques dont le premier terme eſt évanoüi.

$y^3 \times + py + q = 0$ (H)

$y^3 \times + py - q = 0$ (K)

$y^3 \times - py + q = 0$ (L)

$y^3 \times - py - q = 0$ (M)

1°. La comparaiſon de la premiere forme H avec l'équation A, donne $b = \frac{1}{3}p$, & $c = \frac{1}{2}q$; leſquelles valeurs b, c, ſubſtituées dans ſa racine F, la changeront en $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - 3\sqrt[3]{\frac{p}{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ (N);

& dans la racine G, la changeront en $y = 3\sqrt[3]{\frac{p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ (G) pour la forme H.

2°. La comparaiſon de la ſeconde forme K avec la même équation A, donne de même $b = \frac{1}{3}p$, $c = -\frac{1}{2}q$; leſquelles valeurs de b, c, ſubſtituées dans la racine F, la changeront en $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - 3\sqrt[3]{\frac{p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ (P);

& dans la forme G, la changeront en $y = 3\sqrt[3]{\frac{p}{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ (Q) pour la forme K.

3°. La comparaiſon de la forme L avec A, donnera $b = -\frac{1}{3}p$, & $c = \frac{1}{2}q$; ce qui changera F en $y = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$ (R) pour la troiſiéme forme L. Et ainſi de la quatriéme M, lorſqu'il n'y aura que le premier & le quatriéme terme, il faudra prendre $p = 0$.

DES EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.

THEOREME I.

Toute équation cubique $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *de trois racines réelles, doit toujours avoir ſon troiſiéme terme* px *négatif, quel que ſoit le ſigne de ſon quatriéme terme* q.

DEMONST. Soient $x \mp r + b = 0$, $x \mp r - b = 0$, & $x \pm 2r = 0$, les trois racines réelles de cette équation, deſquelles la troiſiéme vaut la ſomme des deux autres, ainſi que l'évanoüiſſement du ſecond terme de cette équation le requiert; lequel évanoüiſſement exigeant auſſi que ces deux premieres racines $x \mp r + b = 0$, $x \mp r - b = 0$, ſoient négatives ou fauſſes lorſque la troiſiéme $x \pm 2r = 0$ eſt poſitive ou vraye; & au contraire que ces deux-là ſoient toutes deux poſitives ou vrayes, lorſque cette troiſiéme eſt négative ou fauſſe; exige auſſi $r > b$.

Cela poſé, la ſomme des trois produits de ces trois racines multipliées deux à deux, chacune par chacune, ſera $= rr - bb - 2rr \pm 2rr - 2rr \pm 2br = -3rr - bb$, donc cette ſomme étant exprimée par p dans l'équation propoſée $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$ de trois racines réelles, cette équation doit avoir $-p = -3rr - bb$, c'eſt-à-dire avoir $-px$ négatif, & conſéquemment être $x^3 \times -px \ldots q = 0$, quel que ſoit le ſigne de q. *Ce qu'il falloit démontrer.*

$$x^3 \times -3rrx \pm 2r^3 = 0,$$
$$-bbx \pm 2rbb.$$

COROL. Donc une équation cubique $x^3 \times + px \ldots q = 0$, qui a $+px$ poſitif, ou $px = 0$ pour troiſiéme terme, n'a jamais qu'une racine réelle avec deux imaginaires qui marchent toujours deux à deux ou en nombre pair; puiſque le preſent Theorême fait voir que ſi cette équation avoit trois

racines réelles, elle ſeroit $x^3 \times -px \ldots q = 0$, & non pas $x^3 \times +px \ldots q = 0$, comme ici.

SCHOLIE. Quoique trois racines réelles donnent toujours $x^3 \times -px \ldots q = 0$, il n'eſt pas réciproquement vrai qu'elles ſoient toujours toutes réelles dans toute équation de cette forme; car on va voir qu'une telle équation $x^3 \times px \ldots q = 0$, peut avoir quelquefois deux racines imaginaires avec une réelle, auſſi bien que $x^3 \times +px \ldots q = 0$, qui les a toujours: en voici le cas.

THEOREME II.

Toute équation cubique de trois racines réelles, toujours exprimée (Th. 1.) *par* $x^3 \times -px \ldots q = 0$, *aura toujours*

1°. $\frac{1}{27} p^3$ *plus grand que* $\frac{1}{4} qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines inégales entre elles.*

2°. *Et* $\frac{1}{27} p^3$ *égal à* $\frac{1}{4} qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines égales entre elles.*

DEMONST. Soient encore $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, $x \mp 2r = 0$, les trois racines réelles de la preſente équation $x^3 \times -px \ldots q = 0$. Il eſt viſible que le produit de ces trois racines enſemble, exprimé par $\ldots q$, eſt $= \mp 2r^3 \pm 2rbb$; & qu'ainſi l'on aura ici $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$, ou $\frac{1}{2} q = r^3 - rbb$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4} qq = r^6 - 2r^4 bb + rrb^4$. Or dans la démonſtration du Theorême 1. ces trois racines ont donné $-p = -3rr - bb$, d'où réſulte $\frac{1}{3} p = rr + \frac{1}{3} bb$, dont le cube eſt $\frac{1}{27} p^3 = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rr b^4 + \frac{1}{27} b^6$. Donc $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6 - r^6 + 2r^4 bb - rrb^4 = 3r^4 bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$. Or

1°. Lorſque des trois racines réelles ici ſuppoſées les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, ſont inégales entre elles, elles ont non-ſeulement b réel pour les rendre inégales; mais encore b moindre que r pour rendre leurs valeurs de même ſigne, qui contraire au correſpondant de la troiſiéme racine $x \mp 2r = 0$ égale à leur ſomme, rende la ſomme des trois égale à zero, ainſi que le requiert l'évanoüiſſement du ſecond terme de l'équation propoſée: lequel cas de b réel, & moindre que r, rendant poſitive la quantité $3r^4 bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$, & conſéquemment auſſi ſon égale $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$; rend ici $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. Donc en ce cas d'inégalité entre les deux moindres des trois racines réelles de

l'égalité proposée $x \times - px \ldots q = 0$, cette équation aura toujours $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. Quant au cas où les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines de cette équation, sont égales entre elles, ce cas rendant $b = 0$, rend aussi la quantité $3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4 = 0$, & en consequence aussi $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 0$, d'où résulte $\frac{3}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. Donc en ce cas d'égalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité proposée $x^3 \times - px \ldots q = 0$, cette équation aura toujours $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. 1. Donc quand cette équation $x^3 \times - px \ldots q = 0$, aura $\frac{1}{27} p^3$ moindre que $\frac{1}{4} qq$, c'est-à-dire $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$; elle n'aura qu'une racine réelle avec deux imaginaires qui vont toujours deux à deux; puisque suivant ce Theorême 2. si les racines de cette équation étoient toutes trois réelles, elle auroit toujours alors $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

COROL. 2. Il suit de ce Corollaire 1. & du Corol. du Theorême 1. qu'une équation cubique $x \times px \ldots q = 0$, dont le second terme est évanoüi, aura toujours deux racines imaginaires avec une seule réelle, tant qu'elle aura $+ px$, quelqu'en soit le reste, ou qu'elle aura $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, même avec $- px$, quelqu'en soit aussi le reste.

THEOREME III.

Toute équation cubique $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *qui a des racines imaginaires, a toujours* $p = 0$, *ou toujours* $+ px$ *positif; ou si elle a* $- px$ *négatif, elle a toujours alors* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, *quelque soit le signe de* q.

DEMONST. I. Soient $x \pm r + \sqrt{-bb} = 0$, $x \pm r - \sqrt{-bb} = 0$, les deux racines imaginaires de cette équation $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, & égales ensemble. La somme p des trois produits $x \mp 2r = 0$ de ces trois racines multipliées deux à deux, chacune par chacune, sera $= rr + bb - 2rr \mp 2r\sqrt{-bb} - 2rr + 2r\sqrt{-bb} = bb - 3rr$; ce qui donnera $\ldots p = bb - 3rr$: sçavoir $p = 0$, si $b = r\sqrt{3}$, ou $+ p = bb - 3rr$, si $b > r\sqrt{3}$; & $- p = bb - 3rr$, si $b < r\sqrt{3}$.

II. Quant à ce cas de $b < r\sqrt{3}$, il rendra aussi $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Car en donnant $- p = bb - 3rr$, il donne aussi $\frac{1}{3} p = rr - \frac{1}{3} bb$, dont le cube est $\frac{1}{27} p^3 = r^6 - r^4bb + \frac{1}{3} rrb^4 - \frac{1}{27} b^6$. D'ailleurs le produit $\ldots q$ des trois racines supposées $x \pm r + \sqrt{-bb} = 0$,

$x \mp r - \sqrt{-bb} = 0$, $x \mp 2r = 0$, qui eſt $= \mp 2r^3 \mp 2rbb$, dans les cas rendant $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rbb$, rend auſſi dans tous les cas $\frac{1}{2}q = r^3 + rbb$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = r^6 + 2r^4bb + rrb^4$. Donc en ce cas-ci de $b < r\sqrt{3}$, l'on aura $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = r^6 + 2r^4bb + rrb^4 - r^6 + r^4bb - \frac{1}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6 = 3r^4bb + \frac{2}{3}rrb^4 + \frac{1}{27}b^6$ poſitif, par conſequent $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

III. Donc toute équation cubique $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, qui a des racines imaginaires, a toujours (Art. 1.) $px = 0$, ou $+px$ poſitif, ou tout à la fois $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$, quel que ſoit le ſigne de q. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Cela étant, puiſque ſuivant les Th. 1, 2. cette équation auroit toujours $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou avec $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$, quel que ſoit auſſi le ſigne de q; il ſuit

1°. Qu'une équation de quelqu'une des quatre formes compriſes $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \dots \mp q = 0$, a toujours deux racines imaginaires avec une ſeule réelle.

2°. Qu'une équation de quelqu'une des deux formes $x^3 \times - px \mp q = 0$, a toujours auſſi deux racines imaginaires avec une réelle lorſqu'elle a $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$.

3°. Que les trois racines d'une équation de quelqu'une des mêmes formes compriſes $x^3 \times - px \mp q = 0$, ſont toutes réelles, lorſque cette équation a $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$; & que les deux moindres de ces trois racines réelles ſont inégales entre elles dans le cas de $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, & égales entre elles dans celui de $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$.

SCHOLIE. Il eſt à remarquer que lorſque l'équation $x^3 \times \dots px \dots q = 0$ a $-q$ qui eſt le produit de ſes trois racines; elle en a deux fauſſes & une vraye égale à la ſomme des fauſſes; & ſi elle a $+q$, elle a au contraire deux racines vrayes & une fauſſe, égale à leur ſomme, cela quand les deux qui ſont enſemble vrayes ou fauſſes (ce ſont toujours les deux moindres) ſeroient imaginaires; auquel cas $-q$ marqueroit que la troiſiéme racine (qui ſeroit réelle) ſeroit vraye, & $+q$ la marqueroit fauſſe: joignez à cela la conſideration du ſigne de p dont $+p$ donne deux imaginaires, & $-p$ trois réelles, ſi, &c.

DES EQUATIONS CUBIQUES dont le ſecond terme eſt évanoüi.

THEOREME I.

En toute équation cubique $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *de ſecond terme évanoüi, & de trois racines réelles, je dis que quel que ſoit le ſigne de ſon quatriéme terme* q,

I. *Le troiſiéme terme ſera toujours* $-px$ *négatif, quelles que ſoient auſſi les valeurs de* p, q.

II. *Qu'elle aura toujours* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$ *dans le cas de ſes deux moindres racines inégales entre elles.*

III. *Et toujours* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$ *dans le cas d'égalité entre ſes deux moindres racines.*

DEMONST. Soient $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, & $x \mp 2r = 0$, les trois racines réelles de cette équation $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, la troiſiéme eſt égale à la ſomme des deux autres, ainſi que l'évanoüiſſement du ſecond terme de l'équation le requiert: lequel évanoüiſſement exigeant auſſi que ces deux autres racines $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, ſoient toutes deux négatives ou fauſſes lorſque la troiſiéme eſt poſitive ou vraye, & au contraire toutes deux poſitives ou vrayes, lorſque cette troiſiéme eſt négative ou fauſſe; exige de plus $r > b$.

PART. I. Cela poſé, ſi l'on multiplie ces trois racines entre elles, il en réſultera l'équation cubique $x^3 \times -3rrx \mp 2r^3 = 0$, $-bbx \mp 2rbb$ qui comparée terme à terme avec la propoſée $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, ſuppoſée de mêmes racines qu'elle, donnera pour ici $-3rr - bb = -p$, & $\mp 2r^3 \pm 2rbb = \mp q$; ce qui y déterminera cette équation propoſée à $x^3 \times - px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme eſt $-px$ négatif, quelles que ſoient la valeur & le ſigne — ou + de ſon quatriéme terme q. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Puiſque (*Part. I.*) $-p = -3rr - bb$, & $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$; l'on aura ici $\frac{1}{3} p = rr + \frac{1}{3} bb$, dont le cube eſt $\frac{1}{27} p^3 = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6$; & l'on aura auſſi $\frac{1}{2} q = r^3 - rbb$, de qui le quarré eſt $\frac{1}{4} qq = r^6 - 2r^4 bb + rrb^4$. Donc $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = r^6 + r^4 bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6 - r^6 + 2r^4 bb - rrb^4 = 3r^4 bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$. Or venant de voir que le

cas d'inégalité entre les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines réelles de l'égalité proposée, exige b réel ; & que l'évanoüiſſement du ſecond terme de cette égalité exige de plus b moindre que r : il eſt viſible que lorſque les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, que la réalité de toutes trois détermine (*Part. I.*) à $x^3 \times - px \mp q = 0$, ſont inégales entre elles, la quantité $3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$ ſera poſitive, & conſéquemment auſſi $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$. Donc en ce cas d'inégalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'égalité propoſée, cette égalité aura non-ſeulement ſon troiſiéme terme $= - px$ négatif ſuivant la Part. 1. mais encore $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Si preſentement on ſuppoſe que les deux moindres $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, des trois racines réelles de l'égalité propoſée, ſont égales entre elles ; cette égalité exigeant $b = 0$, l'équation $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$ trouvée dans la précedente Part. 2. ſe reduira à $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 0$, d'où réſulte $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. Donc en cas d'égalité entre les deux moindres des trois racines réelles de l'équation propoſée $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, que la réalité de toutes ces trois racines détermine (*Part.* 1.) à $x^3 \times - px \mp q = 0$; cette équation aura non-ſeulement ſon troiſiéme terme $= - px$ négatif ; mais encore $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

COROL. 1. La premiere Partie fait voir qu'aucune équation cubique dont le ſecond terme eſt évanoui, & dont le troiſiéme eſt $+ px$ affirmatif ; n'a toutes ſes racines réelles ; & qu'ainſi elle n'en a pour lors jamais qu'une réelle avec deux imaginaires qui vont toujours deux à deux.

COROL. 2. De plus quand même une équation cubique, de ſecond terme évanoüi, auroit ſon troiſiéme $- px$ négatif, tel que l'exige la Part. 1. lorſque toutes les racines en ſont réelles ; les Parties 2, 3. font auſſi voir que cette équation ne laiſſeroit pas de n'avoir encore qu'une racine réelle avec deux imaginaires, ſi elle avoit $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

THEOREME II.

THEOREME II.

En toute équation cubique $x^3 \times .... px .... q = 0$, *de ſecond terme évanoüi, & qui a des racines imaginaires.*

I. *Le troiſiéme terme eſt toujours* $+ px$ *poſitif, quel que ſoit le ſigne de la valeur quatriéme* q.

II. *Ou* ... $px = 0$, *quel que ſoit encore le ſigne & la valeur de* q.

III. *Ou enfin* $- px$ *négatif, mais ſeulement lorſque* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$, *quel que ſoit auſſi le ſigne de* q.

DEMONST. Soient $x \mp r + \sqrt{-cc} = 0$, $x \mp r - \sqrt{cc} = 0$, les deux racines imaginaires de cette équation $x^3 \times .. px .. q = 0$, $x \mp 2r = 0$, la réelle égale à leur ſomme. Ces trois racines multipliées entre elles donneront l'équation cubique $x^3 \times + ccx \mp 2r^3 = 0$,
$- 3rrx \mp 2rcc$
qui comparée terme à terme avec la propoſée $x^3 \times .. px .. q = 0$, donnera pour ici .... $p = cc - 3rr$, & $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$, Donc

PART. I. Lorſqu'on aura $cc > 3rr$, ou $c > rr3$, l'on aura $+ p = cc - 3rr$ poſitive; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une réelle, à $x^3 \times + px \mp q$, de troiſiéme terme poſitif, quels que ſoient les valeurs de p, q, & les ſignes de q. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Lorſqu'on aura $cc = 3rr$, ou $c = rr3$, l'on aura ... $p = cc - 3rr = 0$; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une racine réelle, à $x^3 \times \times \mp q = 0$, quels que ſoient le ſigne & la valeur de q. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. Enfin lorſqu'on aura $cc < 3rr$, ou $c < rr3$, l'on aura $- p = cc - 3rr$ négative; ce qui en ce cas réduira l'équation propoſée de deux racines imaginaires & d'une réelle, à $x^3 \times - px \mp q = 0$, dont le troiſiéme terme eſt à la verité négatif comme (Th. 1. Part. 1.) dans les équations cubiques de trois racines réelles; mais avec cette difference que celles-là ont toujours (Th. 1. Part. 1, 2.) $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, ou $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$; & que celle-ci au contraire a toujours $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. Pour le voir retournons aux équations $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$, $- p = cc - 3rr$, dont la premiere a été trouvée ci-deſſous les cas précedens, & dont la ſeconde vient de l'être pour

celui-ci de $c < rr3$: la premiere donnera $\frac{1}{2}q = r^3 + rcc$, de qui le quarré eſt $\frac{1}{4}qq = r^6 + 2r^4cc + rrc^4$; & la ſeconde donnera $\frac{1}{3}p = rr - \frac{1}{3}cc$, de qui le cube eſt $\frac{1}{27}p^3 = r^6 - r^4cc + \frac{1}{3}rrc^4 - \frac{1}{27}c^6$. Donc $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3 = r^6 + 2r^4cc + rrc^4 - r^6 + r^4cc - \frac{1}{3}rrc^4 + \frac{1}{27}c^6 = 3r^4cc + \frac{2}{3}rrc^4 + \frac{1}{27}c^6$ poſitif ; par conſequent $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$ étant pareillement poſitif, l'on aura ici $\frac{1}{4}qq > \frac{1}{27}p^3$, ou $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. Donc l'équation propoſée de deux racines imaginaires n'aura point de troiſiéme terme $-px$ négatif qu'avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Il ſuit de ce Th. 2. & des Coroll. du Th. 1. que quel que fût le ſigne du quatriéme terme q d'une équation cubique $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, ſecond terme évanoüi, & quelques auſſi les valeurs de ſes quantitez p, q ; elle n'aura jamais qu'une ſeule racine réelle avec deux imaginaires, tant qu'elle aura ſon troiſiéme terme $+px$ poſitif, ou nul, ou enfin négatif $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$: au contraire que cette équation aura toujours toutes ſes racines réelles, ſi elle a ſon troiſiéme terme $-px$ négatif avec $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou avec $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$. De là on voit que dans les formules ſuivantes d'équations cubiques chacune de ſecond terme évanoüi, quelles que ſoient les valeurs de ſes quantitez p, q, & quel que ſoit le ſigne de la derniere q,

1°. Les équations compriſes dans les formules $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \times \mp q = 0$, auront toujours de cela ſeul, deux racines imaginaires avec une réelle.

2°. Les équations compriſes dans la formule $x^3 \times - px \mp q = 0$, auront auſſi deux racines imaginaires avec une ſeule réelle, non pas à la verité toujours & abſolument ; mais ſeulement quand elles auront $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}qq$: dans lequel cas aucune de ces équations ne ſera exemte de racines imaginaires.

3°. Au contraire ces équations compriſes dans la formule $x^3 \times - px \mp q = 0$, auront toujours toutes leurs racines réelles tant qu'elles auront $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}qq$, ou $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}qq$: Celles de ces équations qui ſeront dans le premier de ces deux cas, auront toujours leurs trois racines réelles toutes inégales entre elles ; & celles qui ſeront dans le ſecond, auront toujours égales entre elles les deux moindres de leurs trois racines réelles. Tout cela ſuit des parties 2, 3. du Th. 1.

Voilà juſqu'ici pour diſcerner les racines tant réelles, qu'imaginaires d'une équation cubique quelconque dont le ſecond terme eſt évanoüi. Voici preſentement les racines tant vrayes que fauſſes.

Le Theorême qui l'enſeigne eſt la propoſition 59. des cahiers de l'Algebre Latine.

Voici ce morceau de l'Algebre Latine de M. Varignon tel qu'on l'a trouvé à la ſuite de ceci dans l'exemplaire de l'Analyſe démontrée qu'avoit M. Varignon.

PROPOSITIO 57.

Æquatio cubica quævis $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *ſecundo termino carens, ſi tres ſuas radices habeat omnes reales; tùm quodcunque ſit in ea ſignum quantitatis* q.

1°. *Habebit ea ſemper ſuum terminum ſecundum* $-px$ *negativum, quicunque ſint in ea valores quantitatum* p, q.

2°. *Præterea ipſi ſemper erit* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, *quando ea duas ſuarum radicum minores habebit inæquales inter ſe.*

3°. *At verò ſi duæ radices ejus minores ſint invicem æquales, tùm ea ſemper habebit* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$.

DEMONSTR. *Sint* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, & $x \mp 2r = 0$, *tres radices reales æquationis propoſitæ* $x^3 \times .. px .. q = 0$, *quarum duæ minores* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, *ambæ veræ ſi major* $x \mp 2r = 0$ *ſit falſa, vel ambæ falſæ ſi hæc ſit vera, huic eidem ſimul æquales eſſe debent ut earumdem trium radicum valores ſimul conſtituant ſummam* $= 0$, *quà affectus ſecundus æquationis propoſitæ terminus deficiat; ſi quidem in ea deficere ponitur. Adde quod cùm ad hoc illæ duæ minores ejuſdem æquationis radices debeant eſſe vel ambæ veræ vel ambæ falſæ, nec id permittat* $b >$, *nec* $b = r$; *eædem idcircò duæ radices minores* $x \pm r + b = 0$, $x \pm r - b = 0$, *debent habere* $b < r$, *quæ quantitas* b *realis eſſe debet ſi hæ duæ radices ſint inæquales inter ſe, vel nullæ ſi æquales.*

Pars prima. 1°. *Si tres hæ radices multiplicentur inter ſe, component æquationem* $x^3 \times - 3rrx \mp 2r^3 = 0$, *cujus termini* $- bbx \pm 2rbb$

ſinguli æquati reſpondentibus ſingulis propoſitæ $x^3 \times .. px .. q = 0$, *eamdem (hyp.) radicem dabunt* .... $px = -3rrx - bbx$, ... $q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$, *ſeu* $-px = -3rrx - 2bbx$, $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$; *atque hinc iſta generalis æquatio* $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *hoc in caſu trium radicum ejus realium determinabitur ad* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *cujus tertius terminus eſt* $-px$ *negativus, quicunque ſint in ea valores quantitatem* p, q, *& ſignum hujus quarti termini* q. Quod erat 1°. demonſtrandum.

Pars 2ª. Si quidem (part.) est $-p = -3rr - bb$, & $\mp q = \mp 2r^3 \pm 2rbb$; *est etiam* $\frac{1}{3} p = rr + \frac{1}{3} bb$, *cujus cubus est* $\frac{1}{27} p^3 = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6$; & $\frac{1}{2} q = r^3 - rbb$, *cujus quadratum est* $\frac{1}{4} qq = r^6 - 2r^4bb + rrb^4$. *Ergo* $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = r^6 + r^4bb + \frac{1}{3} rrb^4 + \frac{1}{27} b^6 - r^6 + 2r^4bb - rrb^4 = 3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$ *quæ quantitas est positiva; si quidem superius constat* b *realem esse in casu præsenti inæqualium inter se duarum radicum minorum. Ergo etiam hic est positiva quantitas* $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq$; *ac proinde hoc in casu radicum omnium realium, & duarum minorum & inæqualium inter se, semper est* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$. Quod erat 2°. demonstrandum.

Pars 3ª. Jam cùm casus alter duarum minorum radicum æqualium inter se reddat $b = 0$, *reddit etiam* $3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4 = 0$. *Ergo cùm modo (part. 3.) fuerit inventum* $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 3r^4bb + \frac{1}{27} b^6 - \frac{2}{3} rrb^4$, *hoc in præsenti casu duarum minorum radicum æqualium erit* $\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} qq = 0$; *ac proinde* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{qq}$. Quod erat 3°. demonstrandum.

COROL. I. *Ex parte primâ sequitur æquationis cubicæ secundo termino carenti radices non omnes esse reales si tertium habeat affirmativum* $+ px$; *adeoque unicum & tunc ipsi realem cum duabus imaginariis, quæ binæ semper procedunt.*

COROL. *Præterea licet æquatio cubica secundo termino carens, tertium terminum habeat negativum* $- px$, *qualem exigit (part.) ex partibus secunda & tertia, sequitur duas nihilominus ipsi etiam esse radices imaginarias cum unica reali si habeat* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

THEOREMA 58.

Si æquatio cubica $x^3 \times \ldots px \ldots q = 0$, *secundo termino carens, radices habeat imaginarias, nimirum duas cum una reali, quicunque sint valor & signum quarti ejus termini, semper habebit tertium terminum.*

1°. *Vel affirmativum* $+ px$.

2°. *Vel nullum* $\ldots px = 0$.

3°. *Vel negativum* $- px$ *cum* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

DEMONST. *Sint* $x \mp r + \sqrt{-cc} = 0$, $x \mp r - \sqrt{-cc} = 0$, *imaginariæ duæ radices æquationis propositæ* $x^3 \times .. px .. q = 0$, *cujus tertia realis sit* $x \mp 2r = 0$, *æqualis istarum summæ. Jam ex tribus his radicibus per invicem multiplicatis componetur æquatio* $x^3 \times + ccx \mp 2r^3 = 0$, *cujus termini singuli æquati*

$$- 3rrx \mp 2rcc$$

respondentibus singulis propositæ $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *earumdem (hyp.) radicem, dabunt* $\dots px = +ccx - 3rrx$, & $\mp q = \mp 2r^3 \mp 2rcc$. *Ergo ubi erit* $cc > 3rr$, *vel* $c = r\sqrt{3}$.

Pars prima. In æquatione proposita $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *statim hæc tertium habebit terminum positivum* $+px = ccx - 3rrx$, *qui eam tunc determinabit ad* $x^3 \times + px \mp q = 0$, *termini tertii positivi, quicunque sint valor & signum quarti* q.

Pars 2ª. Si æquatio ita generalis $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *habeat* $cc = 3rr$, *vel* $c = r\sqrt{3}$, *tùm tertius terminus ejus erit* $\dots px = ccx - 3rrx = 0$, *sive nullus; atque ita aut reducetur ea ad* $x^3 \times \mp q = 0$, *quicunque sint etiam valor & signum quarti ejusdem termini* q. Quod erat 2°. demonstrandum.

Pars 3ª. Tandem si in istà æquatione generali fuerit $cc < 3rr$, *vel* $c < r\sqrt{3}$, *tùm terminus ejus tertius erit negativus* $-px = cc - 3rr$; *atque ita tunc evadet ea* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *tertii termini hac lege negativi ut in ea sit* $c < r\sqrt{3}$. Quod erat 3°. demonstrandum.

COROL. *Ex hoc & ex precedenti Theoremate fluit juxta ejus Corol.* 1, 3. *æquationem cubicam secundo termino carentem, quodcunque quarti sit signum, radices duas imaginarias cum unicâ reali semper habere, quando tertius terminus ejus est positivus seu affirmativus, vel nullus, vel denique negativus cum* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$: *è contra reales eam semper habere radices omnes, quando tertius terminus ejus negativus est absque* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$. *Atque hinc patet in formis subsequentibus omnium æquationum cubicarum secundo termino carentium*

1°. *In unâquaque formarum* $x^3 \times + px \mp q = 0$, $x^3 \times \mp q = 0$, *duas esse radices imaginarias cum unica reali; ac etiam in iis quæ sunt formæ* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *cum habet* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

2°. *E contra in æquationibus hujus formæ* $x^3 \times - px \mp q = 0$, *habentibus* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, *vel* $\frac{1}{27} p^3 = \frac{1}{4} qq$, *radices omnes semper erunt reales, quarum duæ minores erunt æquales vel inæquales inter se, prout ipsis erit* $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} qq$, *vel* $\frac{1}{27} p^3 < \frac{1}{4} qq$.

PROPOSITIO 59.

Æquatio cubica generalis $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *secundo termino carens, convertetur in specialem* $x^3 \times \dots px - q = 0$, *si duas habeat radices falsas cum unâ verâ; at si duas habeat veras cum unâ falsâ, convertetur in* $x^3 \times \dots px + q = 0$. *Vicissim æquatio* $x^3 \times \dots px - q = 0$, *duas semper habet radices falsas cum unâ verâ; è contra æquatio* $x^3 \times \dots p + q = 0$, *duas semper habet radices veras cum unâ falsâ.*

DEMONST. *Ex obſervat. 4. cap. 2. conſtat ultimum ac totaliter notum cujuſlibet æquationis terminum, ipſum eſſe productum ex valoribus omnium ejuſdem radicum multiplicatis per invicem; atque adeò æquationis cubicæ* $x^3 \times \dots px \dots q = 0$, *terminum quartum* q *pariter eſſe productum ex omnibus valoribus trium radicum quibus hæc conſtat æquatio; cujus cùm ſecundus terminus deficiat, ſumma vel differentia trium iſtorum valorum (juxtà eamdem obſervat. 4. cap. 2.) debet eſſe* $= 0$: *atque ità non modo eorum duo ſimul æquales eſſe debent tertio . . . .*

LIVRE VII. *pag.* 383.

PROBLÊME II.

EXEMPLE I.

LA premiere équation $a^3 + nna - 2n^3 = 0$, laquelle ſe réduit à $0 = 0$, en y ſuppoſant $a = n$, donc cette équation eſt diviſible par $a - n = 0$.

La ſeconde, $3aab + nnb = -na$, ce qui rend $b = -\frac{1}{4}$ dans la ſeconde équation, & ainſi des autres.

La troiſiéme, $3aac + nnc = -3abb - nb$.

La quatriéme, $+3aad + nnd = -6abc - b^3 - nc + 1$.

La 5e. $nne + 3aae = -3bbc - 3acc - nd - 6abd$.

POUR LA SECONDE PUISSANCE. *Page* 413.

Avis à donner au R. P. REYNEAU.

ETANT tombé par hazard, Mon Reverend Pere, ſur la page 413. du Tome I. de votre Analyſe démontrée, il m'a pris envie de chercher la démonſtration que vous avez omiſe de la pratique que vous y donnez pour trouver une ſuite égale à $\frac{1}{a+b^2} = \frac{1}{aa+2ab+bb}$: Vous dites qu'il faut 1°. diviſer $ab+bb$ par $aa+ab$, ce qui donne $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$; 2°. diviſer 1 par $\overline{aa+ab} + \overline{ab+bb}$, en ne conſiderant ce diviſeur que comme fait des deux parties qui ſont ici barrées pour les diſtinguer: De cette maniere vous dites que l'on aura $\frac{1}{aa+ab} - \frac{b}{a^3+a^2b} + \frac{bb}{a^4+a^3b} - \frac{b^3}{a^5+a^4b} + \frac{b^4}{a^6+a^5b} - \&c. = \frac{1}{a+b^2}$. Prenez garde, cela n'eſt vrai que lorſque b eſt moindre que a; car lorſqu'il eſt plus grand, la ſomme de cette ſuite devient infinie, étant $= \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4}}, \&c. = \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1 - \frac{b}{a}} \times \overline{1 + \frac{bb}{aa} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^8}{a^8}} + \&c.$ en progreſſion geometrique dont la ſomme eſt viſiblement infinie lorſque b eſt plus grand que a, & conſequemment infiniment plus grande que la fraction propoſée $\frac{1}{a+b^2}$.

Il eſt vrai que cette ſuite eſt égale à cette fraction lorſque b eſt moindre que a: car alors elle eſt $= \frac{1}{aa+ab} \times \overline{1 - \frac{b}{a}} \times \frac{1}{1-\frac{bb}{aa}}$ $= \frac{1}{aa+ab} \times \frac{a-b}{a} \times \frac{aa}{aa-bb} = \frac{1}{a+b} \times \frac{a-b}{aa-bb} = \frac{1}{a+b} \times \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+b^2}$ qui eſt la fraction propoſée.

Mais quand b eſt plus grand que a, 1°. ce n'eſt pas $ab+bb$ qu'il faut diviſer par $aa+ab$ pour avoir $\frac{ab+bb}{aa+ab} = \frac{b}{a}$, mais $aa+ab$ par $ab+bb$ pour avoir $\frac{aa+ab}{ab+bb} = \frac{a}{b}$. Il ne faut pas non plus diviſer 1 par $\overline{aa+ab} + \overline{ab+bb}$, mais par $\overline{ab+bb} + \overline{aa+ab}$, en ſorte que la diviſion ſe commence par la plus grande partie $aa+bb$ du diviſeur, (choſe à obſerver dans toutes les diviſions qu'on veut pouſſer en ſuites infinies). En ce cas ſi vous prenez $x = aa+ab$, & $y = ab+bb$, vous aurez $\frac{1}{y+x} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} - \frac{x^3}{y^4} -$ &c. $= \frac{1}{y} \times 1 - \frac{x}{y} + \frac{x^2}{yy} - \frac{x^3}{y^3} + \frac{x^4}{y^4} -$ &c. $= \frac{1}{ab+bb} \times 1 - \frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^4}{b^4} -$ &c. $= \frac{1}{ab+bb} - \frac{a}{ab^2+b^3} + \frac{a^2}{ab^3+b^4} - \frac{a^3}{ab^4+b^5} + \frac{a^4}{ab^5+b^6} -$ &c. $= \frac{1}{a+b^2}$. Car cette ſuite eſt viſiblement $= \frac{1}{ab+bb} \times 1 - \frac{a}{b} \times 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^6}{b^6} + \frac{a^8}{b^8}$ + &c. (dans ce cas de $b > a$) $= \frac{1}{ab+bb} \times \frac{b-a}{b} \times \frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b-a}{ab^2+b^3}$ $\times \frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b} \times \frac{b-a}{b^2-a^2} = \frac{1}{a+b} \times \frac{1}{b+a} = \frac{1}{a+b^2}$ qui eſt la fraction propoſée.

Les ſuites que vous trouvez (pag. 414, 415, &c.) pour les puiſſances troiſiémes, quatriémes, &c. auſſi bien que les partitions que vous faites de ces ſuites en d'autres, ſont ſujettes aux mêmes inconveniens ou exceptions.

Quant à l'uſage que vous faites pour le même ſujet (p. 418.) de la formule $\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2} \times a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \times a^{n-3}b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \times a^{n-4}b^4 +$ &c. il ne vaut de même que pour le cas où a eſt plus grand que b. Quant à celui où b ſeroit plus grand que a, il faudroit ſe ſervir de la formule $\overline{b+a}^n = b^n + \frac{n}{1} b^{n-1}a + \frac{n.n-1}{1.2} \times b^{n-2}a^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \times b^{n-3}a^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \times b^{n-4}a^4 +$ &c. en rendant ici, comme là, n négative.

Voila ce que le hazard m'a offert, vous en ferez tel uſage qu'il vous plaira, pourvû que vous me faſſiez la juſtice de me croire toujours avec beaucoup d'eſtime & d'attachement pour vous,

MON REVEREND PERE,

Votre très-humble & très-obéiſſant ſerviteur, VARIGNON.

LIVRE VII. *page* 413. *ligne* 8.

Et $ab+bb$ pour la ſeconde : comme qui diviſeroit 1 par $x+y$ en prenant $x=aa+ab$, & $y=ab+bb$; & conſequemment $\frac{y}{x}=\frac{ab+bb}{aa+ab}=\frac{b}{a}$. Une telle diviſion donneroit $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^3}-\frac{y^3}{x^4}+\frac{y^4}{x^5}-$ &c. $=\frac{1}{x}\times 1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^4}{x^4}-$ &c. $=\frac{1}{aa+ab}\times 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-$ &c. = à la diviſion ou au quotient de l'Auteur. Mais $1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}+$ &c. $=1-\frac{b}{a}\times 1+\frac{bb}{aa}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^8}{a^8}+$ &c. progreſſion geometrique dont la ſomme (ſi $b<a$) ſera $\overline{1-\frac{b}{a}}\times\overline{1-\frac{bb}{aa}}=\overline{1-\frac{b}{a}}\times\frac{aa}{aa-bb}=\frac{a-b}{a}\times\frac{aa}{aa-bb}=\frac{a}{a+b}$. Donc la ſuite trouvée ſera $\frac{1}{aa+ab}\times 1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+$ &c. $=\frac{1}{aa+ab}\times\frac{a}{a+b}=\frac{a}{aa+ab\times a+b}=\frac{1}{a+b\times a+b}=\frac{1}{a+b^2}$; ce qui étoit la fraction propoſée : ſuppoſé, dis-je, que $b<a$; mais ſi $b>a$, la ſerie $1+\frac{bb}{aa}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^6}{a^6}+$ &c. auroit la ſomme infinie, & par conſequent auſſi celle de l'Auteur. En ce cas de $b>a$ il faudroit 1°. diviſer $aa+ab$ par $ab+bb$, ce qui donneroit $\frac{aa+ab}{ab+bb}=\frac{a}{b}$; 2°. 1 par $y+x$, ce qui donneroit $\frac{1}{y+x}=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y^3}-\frac{x^3}{y^4}=\frac{1}{y}\times\overline{1-\frac{x}{y}+\frac{x^2}{yy}-\frac{x^3}{y^3}+\frac{x^4}{y^4}-}$ &c. $=\frac{1}{ab+bb}\times\overline{1-\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^3}{b^3}+}$ &c. $=\frac{1}{ab+bb}\times\overline{1-\frac{a}{b}\times 1+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^6}{b^6}+}$ &c. $=\frac{1}{ab+bb}\times\frac{b-a}{b}\times\frac{1}{1-\frac{a^2}{b^2}}=\frac{b-a}{ab^2+b^3}\times\frac{b^2}{b^2-a^2}=\frac{b-a}{b+a\times b^2-a^2}=\frac{1}{b+a\times b+a}=\frac{1}{a+b^2}$ fraction propoſée.

LIVRE VII. *page* 429. *ligne* 21.

$\frac{dx}{dy}+\frac{y\,dx}{dy}-1=0$, laquelle donnant $\frac{1+y}{dy}-\frac{1}{dx}=0$, & conſequemment $\frac{dy}{1+y}=\frac{dx}{1}=dx$, eſt à la logarithmique.

Tome II. page 913. *troiſiéme Addition. ligne* 31.

Ils ſont parcourus, cette conſequence n'eſt pas juſte : il faut *elles ſont parcourues* au lieu de *ils ſont parcourus*. Mais en ſuppoſant que ces deux arcs ſont les deux derniers en A, les viteſſes en ce point A avec leſquelles elles ſont parcourues, étant celles avec leſquelles les arcs entiers (dont elles ſont les élemens) ſont parcourues, ces arcs ſeront auſſi comme ces viteſſes entieres, & conſequemment $\frac{1}{\sqrt{x}}$ un raport conſtant. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Fin des Remarques de Monſieur Varignon.

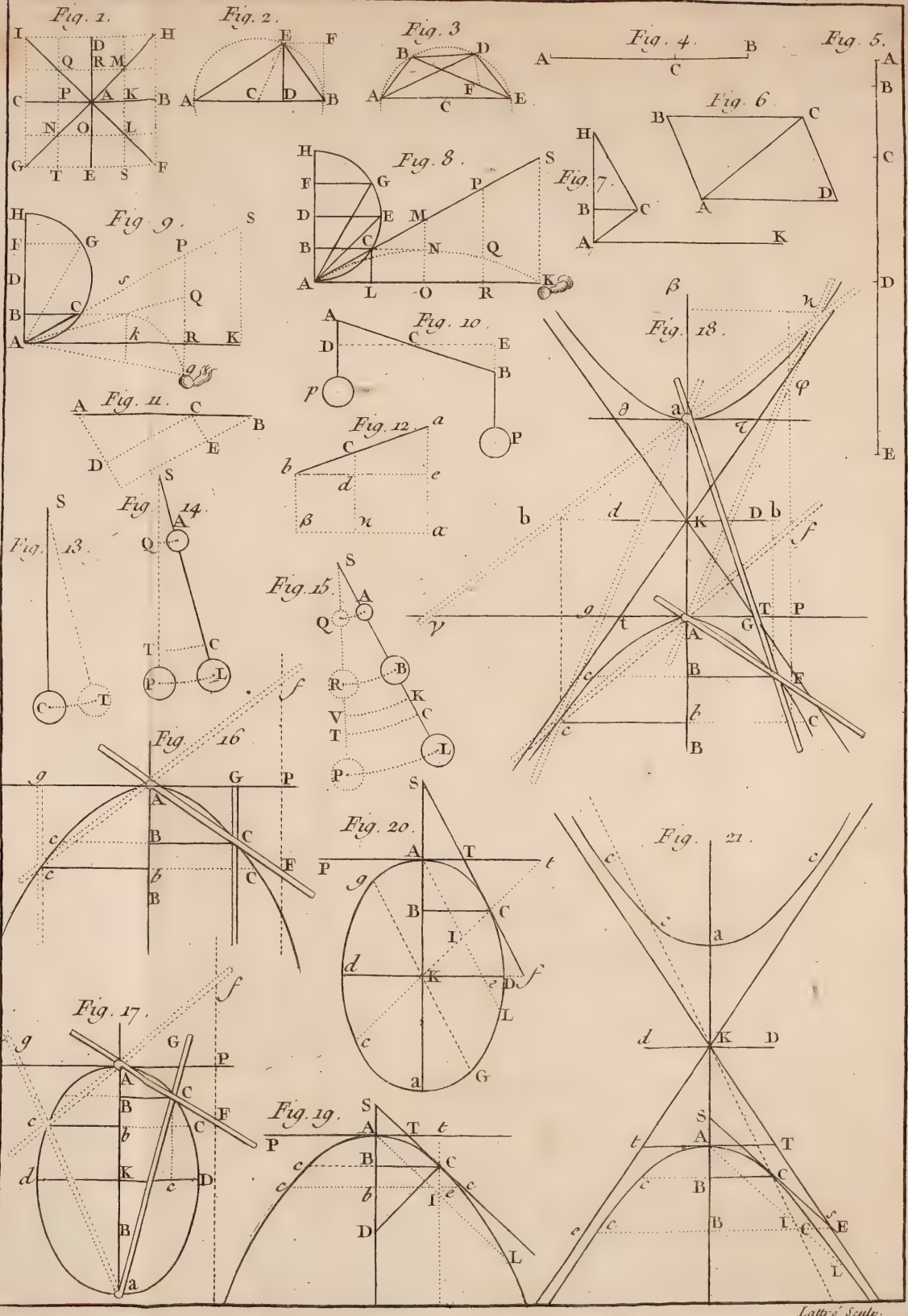


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12
Fig. 13.
Fig. 14
Fig. 15.
Fig. 16
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Lattré Sculp.

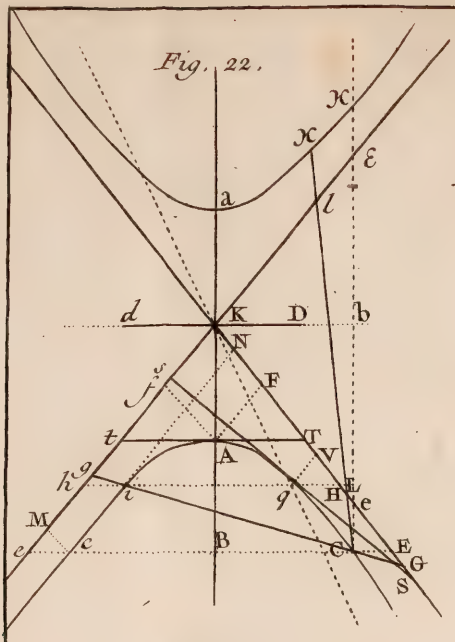


Fig. 22.

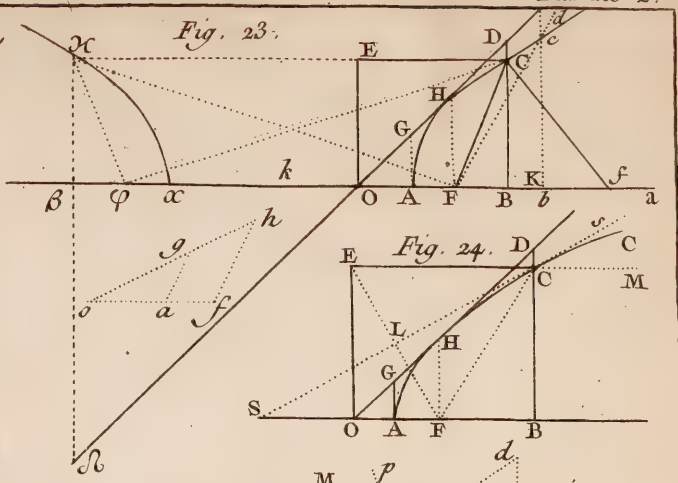


Fig. 23.

Fig. 24.

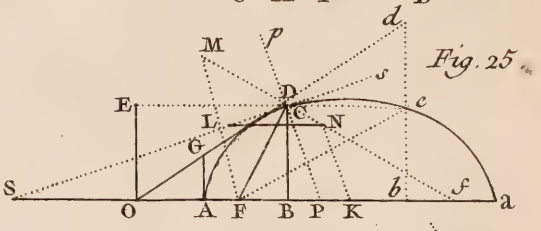


Fig. 25.

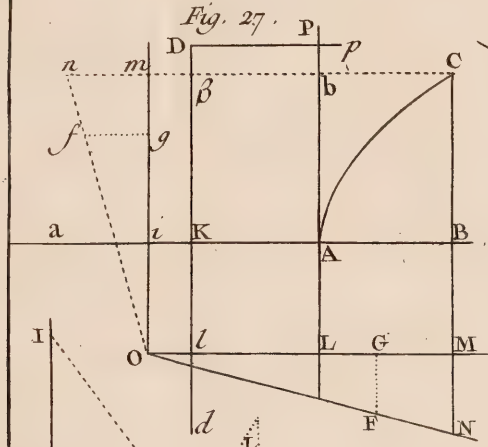


Fig. 27.

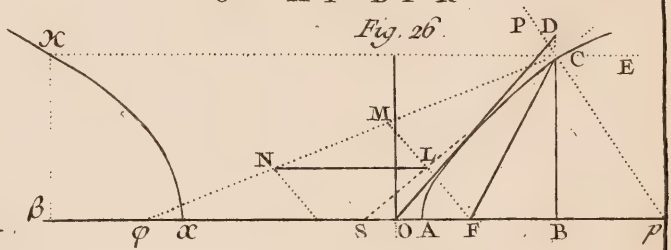


Fig. 26.

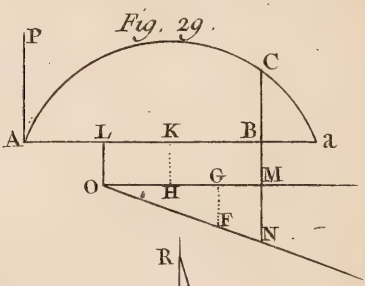


Fig. 29.

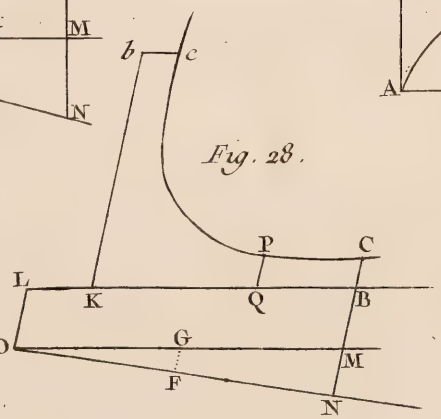


Fig. 28.

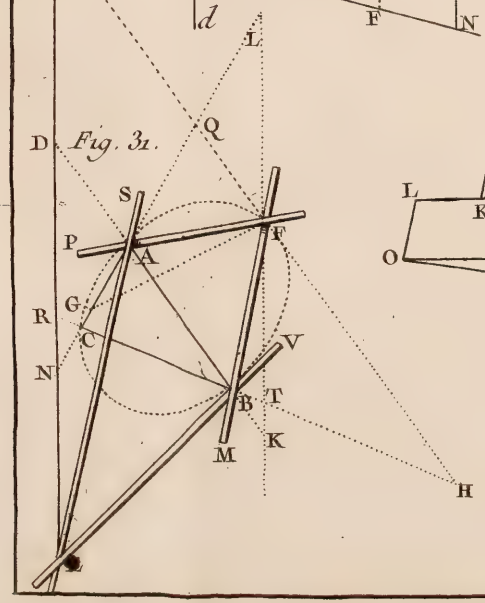


Fig. 31.

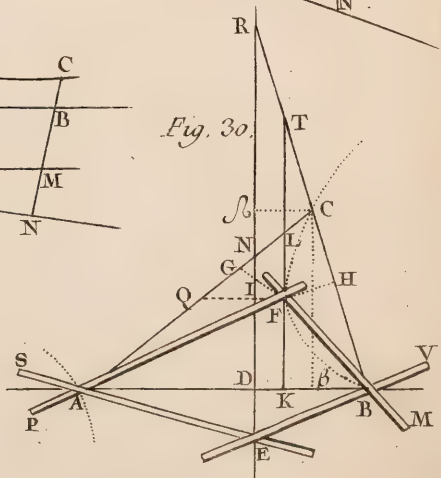


Fig. 30.

Fig. 32.

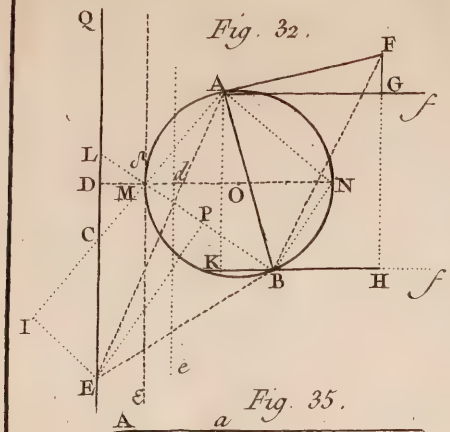


Fig. 33.

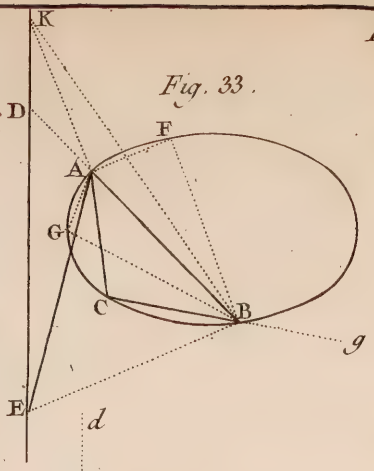


Fig. 34.

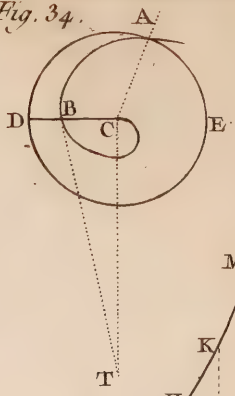


Fig. 35.

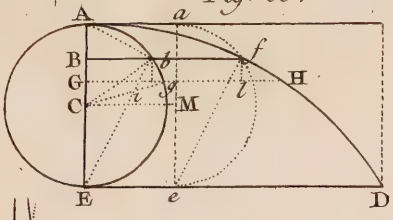


Fig. 36.

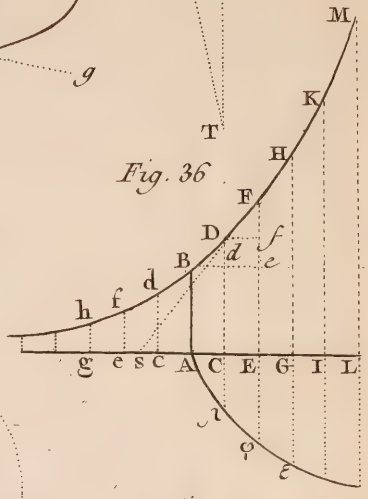


Fig. 37.

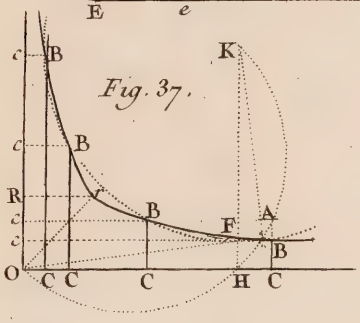


Fig. 38.

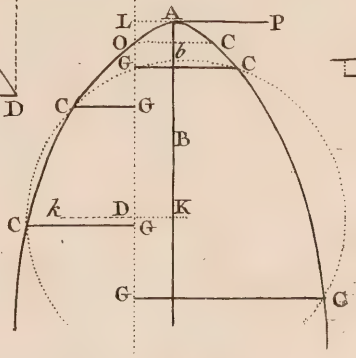


Fig. 39.

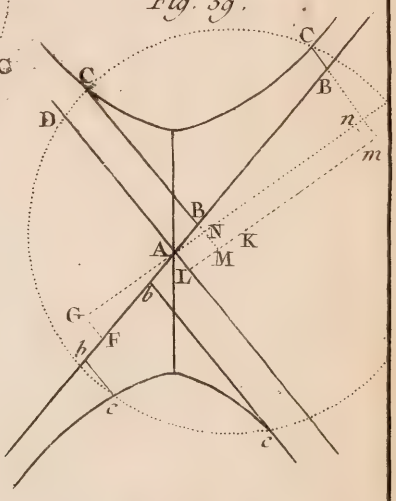


Fig. 40.

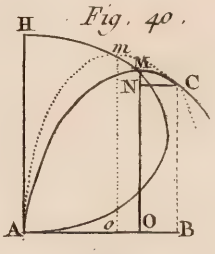


Fig. 41.

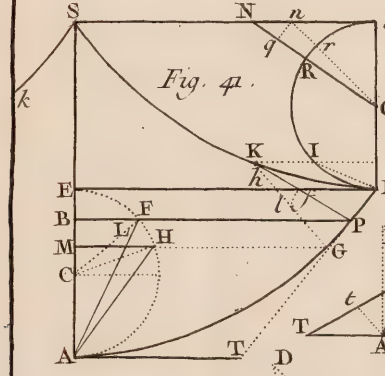


Fig. 42.

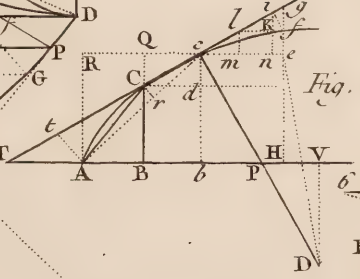


Fig. 43.

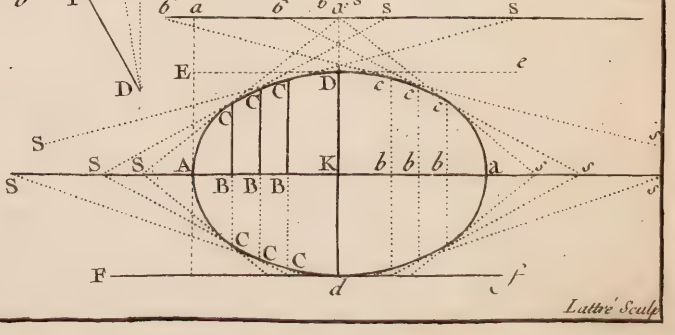


Fig. 44.

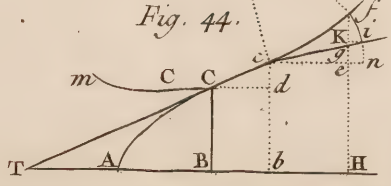


Fig. 45.

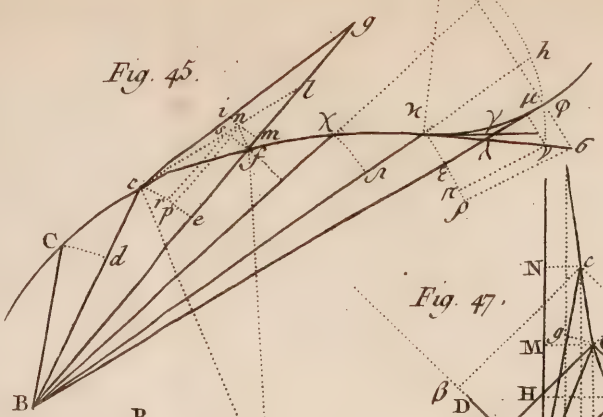


Fig. 46.

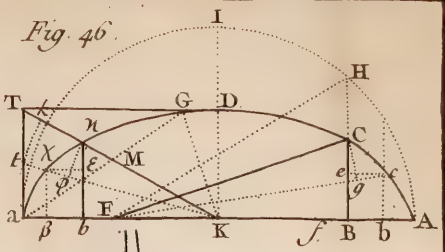


Fig. 47.

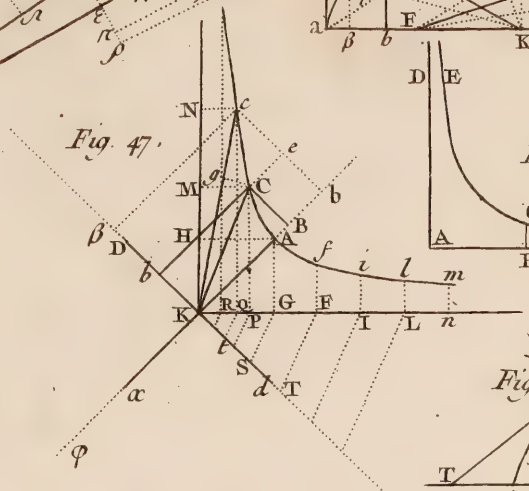


Fig. 49.

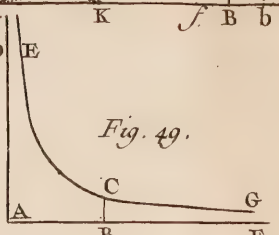


Fig. 48.

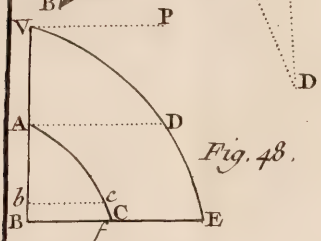


Fig. 54.

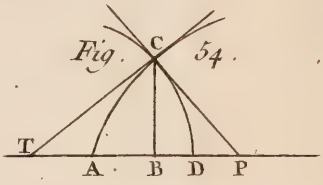


Fig. 50.

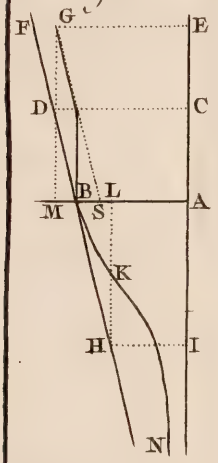


Fig. 52.

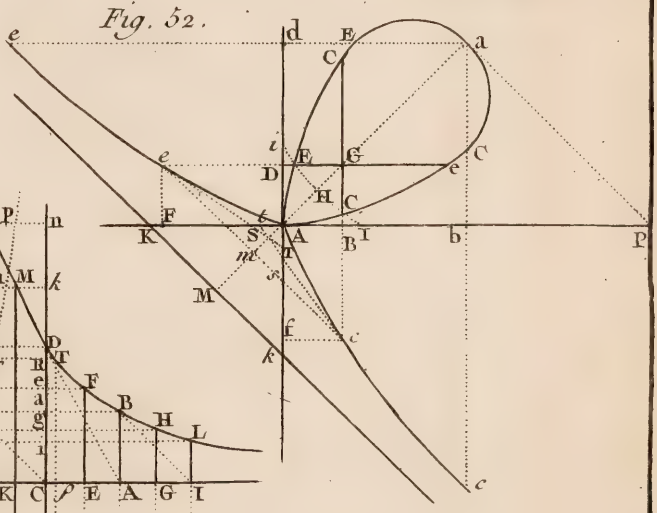


Fig. 56.

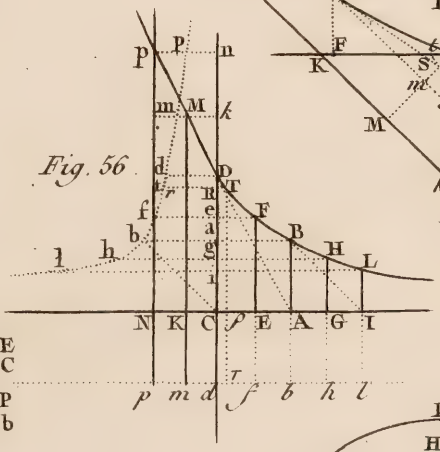


Fig. 51.

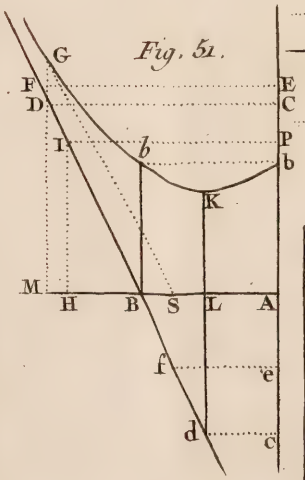


Fig. 55.

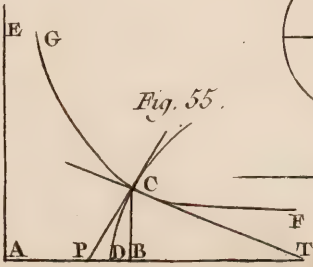


Fig. 53.

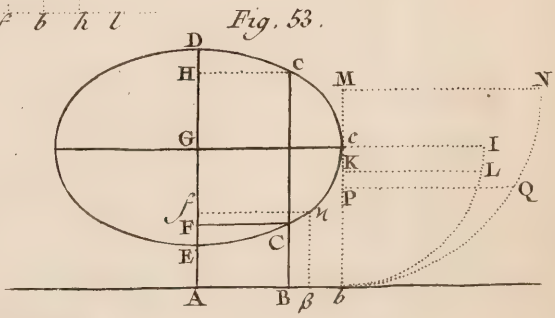


Fig. 60.

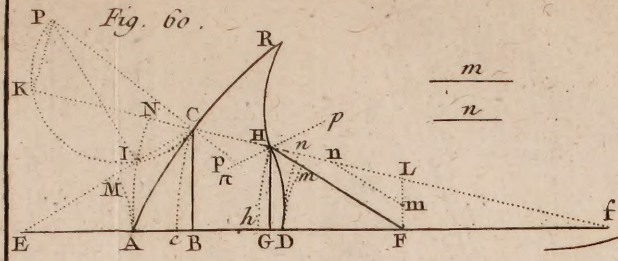


Fig. 57.

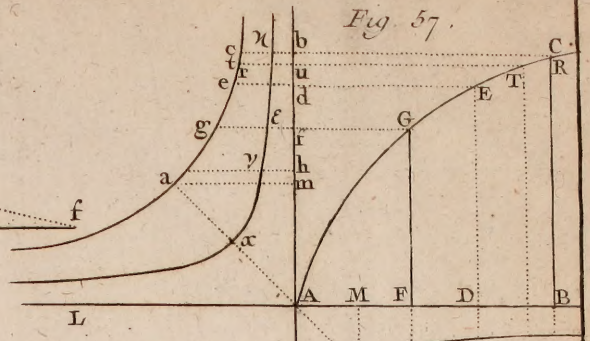


Fig. 59.

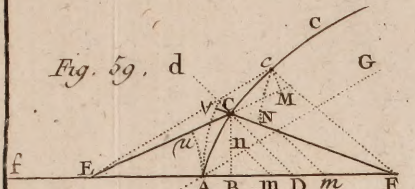


Fig. 58.

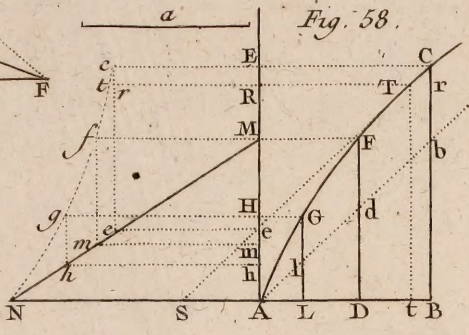


Fig. 62.

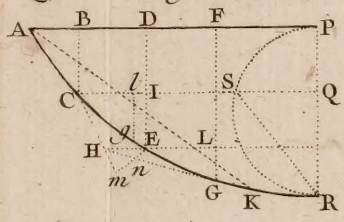


Fig. 61.

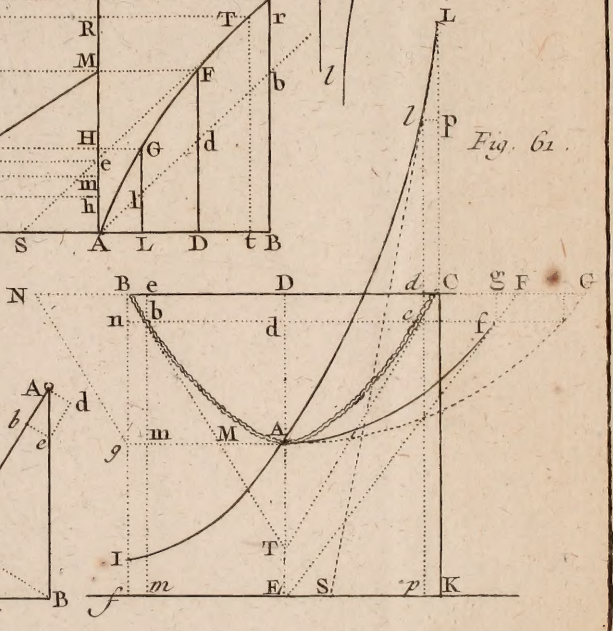
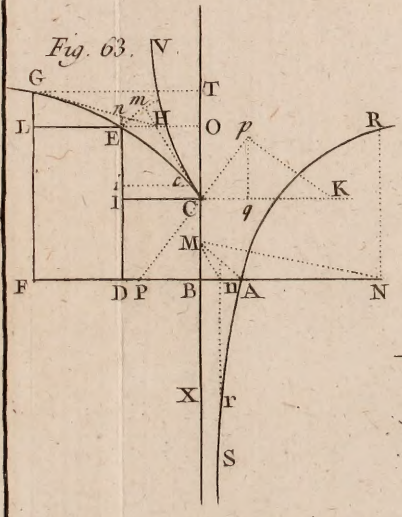


Fig. 63.



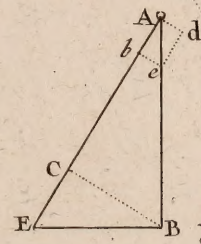


Fig. 64.

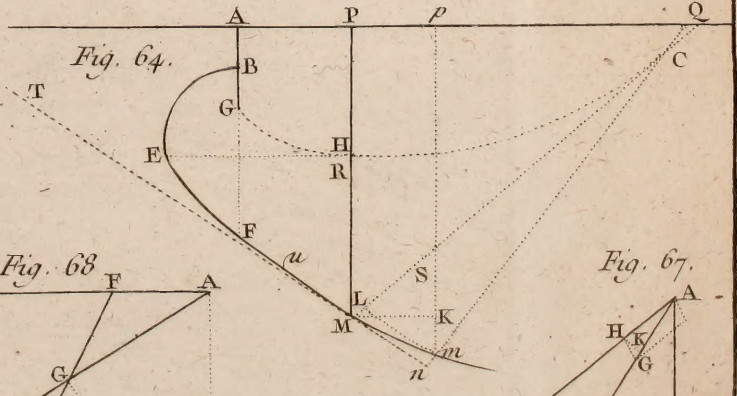


Fig. 65.

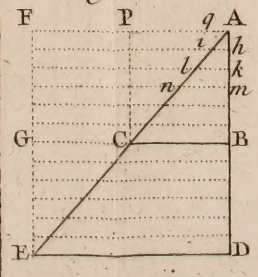


Fig. 68.

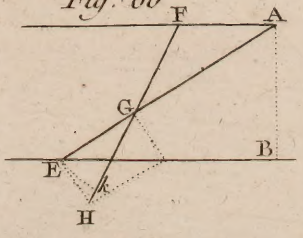
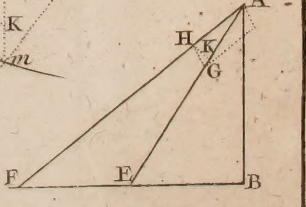



Fig. 67.